ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

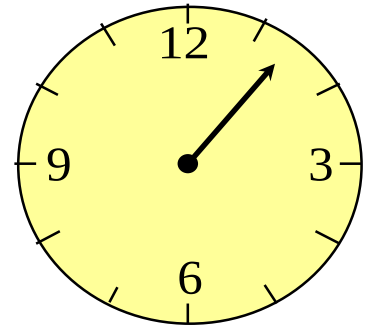
Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Βασικά στοιχεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Σεραφείμ Καραμπογιάς
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Βασικά στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων

Η έννοια του Πειράματος Τύχης.



Το σύνολο των πιθανών εκβάσεων ενός πειράματος τύχης καλείται ***δειγματοχώρος*** ή ***δειγματικός χώρος*** (*sample space*) και συμβολίζεται με Ω ή με S. Ένα στοιχείο ω ή s του δειγματικού χώρου Ω ή S καλείται ***δειγματικό στοιχείο***.

Ένας δειγματοχώρος είναι ***διακριτός*** αν το πλήθος των στοιχείων του είναι πεπερασμένο ή άπειρο αλλά αριθμήσιμο, διαφορετικά ο δειγματοχώρος είναι ***μη διακριτός***.

Ένα ***γεγονός*** ή ***ενδεχόμενο*** είναι ένα υποσύνολο του δειγματοχώρου. Για διακριτούς δειγματοχώρους, κάθε υποσύνολο του δειγματοχώρου είναι ένα γεγονός. Ένα γεγονός το οποίο περιέχει ένα μόνο στοιχείο του Ω καλείται ***απλό*** ή ***στοιχειώδες γεγονός***.

Η έννοια της Πιθανότητας

Υπάρχουν πολλές επαναλαμβανόμενες καταστάσεις στη φύση για τις οποίες μπορούμε να προβλέψουμε από προηγούμενη εμπειρία τι θα συμβεί κατά μέσον όρο, αλλά όχι ακριβώς τι θα συμβεί. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι οι εμφανίσεις είναι τυχαίες.

- Προδιαγράφουμε ένα στοιχειώδες πείραμα τύχης.
- Καθορίζουμε όλες τις πιθανές εκβάσεις του στοιχειώδους πειράματος τύχης.
- Επαναλαμβάνουμε το στοιχειώδες πείραμα πολλές φορές κάτω από ομοιόμορφες συνθήκες (φαινομενικά τουλάχιστον) και παρατηρούμε τις εκβάσεις του πειράματος.

Ονομάζουμε ***σχετική συχνότητα*** του γεγονότος A *σε* n δοκιμές το λόγο $\frac{n_A}{n}$

Όπου n_A είναι η φορές που εμφανίστηκε το γεγονός A στις n επαναλήψεις του πειράματος τύχης.

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών ενός πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα (**στατιστική ομαλότητα** ή ***νόμος των μεγάλων αριθμών***).

Εμπειρική Πιθανότητα

Στο απλό γεγονός A αντιστοιχίζουμε ένα μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $P(A)$ που ονομάζεται ***πιθανότητα εμφάνισης*** (*probability of occurrence*) και ορίζεται ως

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Η εμπειρική πιθανότητα είναι

α) *μη αρνητική* $P(A) \geq 0$ για κάθε γεγονός A,

β) *νορμαλισμένη* $P(\Omega) = 1$,

γ) *πεπερασμένως προσθετική* $P(A + B) = P(A) + P(B)$ για οποιαδήποτε ξένα γεγονότα A και B.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας είναι:

$$P(A) \equiv \frac{\text{Αριθμός ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Ολικός αριθμός αποτελεσμάτων}}$$

Θα πρέπει ο δειγματοληπτικός χώρος να είναι διακριτός και τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα.

Σε πείραμα τύχης υπάρχουν N πιθανές εκβάσεις A_1, A_2, …, A_N, που είναι ***αμοιβαία αποκλειόμενες*** (*mutually exclusive*), δηλαδή, η εμφάνιση οποιασδήποτε έκβασης αποκλείει την εμφάνιση όλων των άλλων. Για όλα της δυνατές εκβάσεις ισχύει

$$\sum_{k=1}^{N} P(A_k) = 1$$

Η ***από κοινού πιθανότητα εμφάνισης*** δύο γεγονότων A και B είναι

$$P(A,B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{AB}}{n}$$

όπου n_{AB} είναι η φορές που εμφανίστηκε το συνδυασμένο γεγονός (A,B) στις n επαναλήψεις του πειράματος τύχης.

Ο λόγος $\frac{n_{AB}}{n_A}$ παριστάνει τη σχετική συχνότητα της εμφάνισης του γεγονότος B δοθέντος ότι έχει εμφανιστεί το γεγονός A. Για μεγάλο πλήθος επαναλήψεων του πειράματος τύχης ο λόγος $\frac{n_{AB}}{n_A}$ ορίζει την πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος B δοθέντος ότι έχε ι εμφανιστεί το γεγονός A. Η πιθανότητα αυτή αναφέρεται ως ***υποσυνθήκη πιθανότητα*** και συμβολίζεται ως $P(B|A)$, δηλαδή,

$$P(B \mid A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{AB}}{n_A}$$

Για μη διακριτούς δειγματοχώρους, δεν είναι δυνατό να εκχωρήσουμε σε κάθε υποσύνολο του δειγματοχώρου Ω μία πιθανότητα χωρίς να θυσιάσουμε θεμελιώδεις διαισθητικές ιδιότητες της πιθανότητας. Για να ξεπεράσουμε τη δυσκολία αυτή, ορίζουμε ως ***σ-πεδίο*** $\mathcal{B}$ στο δειγματοχώρο Ω μία συλλογή από υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες

- $\Omega \in \mathcal{B}$
- Αν ένα υποσύνολο (γεγονός) $E \in \mathcal{B}$ τότε $E^c \in \mathcal{B}$
- Αν $E_i \in \mathcal{B}$ για όλα τα i, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}$

Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας P στο $\mathcal{B}$ ως μία συνάρτηση η οποία αντιστοιχίζει μη αρνητικές τιμές για όλα τα γεγονότα E στο $\mathcal{B}$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες

Βασικά αξιώματα της πιθανότητας

1. Η πιθανότητα όλου του δειγματοχώρου *Ω* (δηλαδή του βέβαιου ενδεχόμενου) είναι ίση με ένα.

$$P(\Omega) \equiv 1$$

2. Η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου E περιορίζεται στο διάστημα [0, 1]

$$0 \leq P(E) \leq 1, \qquad E \subseteq \Omega$$

3. Για ***ασυμβίβαστα*** (ή ***αμοιβαίως αποκλειόμενα***) $E_1, E_2, E_3, \ldots$ γεγονότα (δηλαδή, γεγονότα για τα οποία $E_i \cap E_j = \varnothing$ για όλα τα $i \neq j$ όπου $\varnothing$ είναι το κενό σύνολο), έχουμε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Η τριάδα (*Ω*, *B*, *P*) ονομάζεται ***χώρος πιθανότητας***.

Ιδιότητες των πιθανοτήτων

Α. ***Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων***. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα E_1 και E_2 ισχύει

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cdot E_2)$$

όπου $P(E_1 \cup E_2)$ είναι η συνδυασμένη πιθανότητα, δηλαδή, η πιθανότητα να εμφανισθούν τα E_1 και E_2 μαζί (*joint probability*).

Β. Για τα τυχαία ενδεχόμενα E_1, E_2, … E_n για τα οποία

$$E_i \cap E_j = \varnothing \quad \text{για } i \neq j \qquad \text{και} \qquad \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{E}_n = \Omega$$

ισχύει

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= P(\mathrm{E} \cap S) = P[\mathrm{E} \cap (\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{E}_n)] \\ &= P[(\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_1) \cup (\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_2) \cup \ldots \cup (\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_n)] \\ &= P(\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_1) + P(\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_2) + \ldots + P(\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_n) \end{aligned}$$

Τα ενδεχόμενα E_1, E_2, …, E_n λέμε ότι είναι ***αμοιβαία αποκλειόμενα*** ή ***ασυμβίβαστα ανά δύο*** και ***πλήρη***.

Γ. Αν $E \cup E^C = \Omega$ και $E \cap E^C = \varnothing$, τότε το E^c λέγεται ***συμπληρωματικό*** του ενδεχόμενου E, δηλώνει το γεγονός να μη συμβεί το E και ισχύει

$$P\left(E^C\right) = 1 - P(E)$$

Δ. Για δύο ενδεχόμενα E_1 και E_2 με $E_2 \subset E_1$ ισχύουν

$$P(E_2) \le P(E_1) \quad \text{και} \quad P(E_1 - E_2) \le P(E_1) - P(E_2)$$

Ε. Η πιθανότητα του E_1 με την προϋπόθεση ότι πραγματοποιήθηκε το E_2, λέγεται ***δεσμευμένη*** *ή* ***υπό συνθήκη πιθανότητα*** (*conditional probability*), συμβολίζεται με $P(E_1|E_2)$ και ορίζεται ως

$$P(E_1|E_2) = \begin{cases} \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}, & P(E_2) \ne 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δύο ενδεχόμενα E_1 και E_2 λέγονται ***στατιστικά ανεξάρτητα*** όταν

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \quad \text{ή όταν} \quad P(E_1|E_2) = P(E_1)$$

1. ***Ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων***

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2) = P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$$

2.

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_2 | E_1)\, P(E_1)}{P(E_2)}$$

3. Για ένα σύνολο $E_1, E_2, \ldots, E_n$ από αμοιβαία αποκλειόμενα πλήρη ενδεχόμενα ισχύει ***το θεώρημα ολικής πιθανότητας***

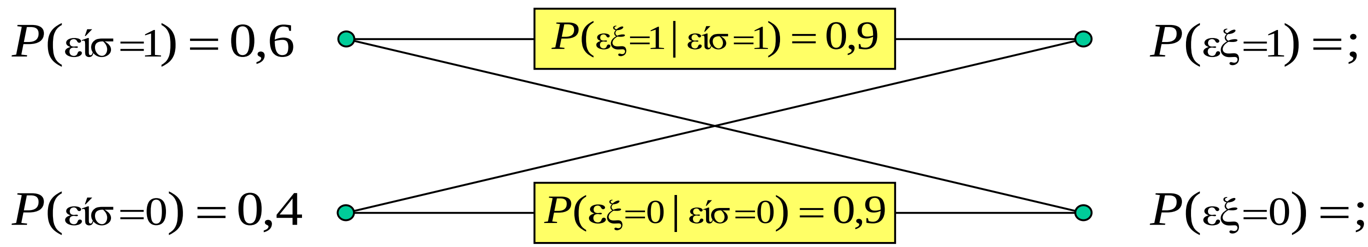
$$P(A) = \sum_{k=1}^{m} P(A | E_k) P(E_k)$$

Τα γεγονότα $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ αποτελούν μία ***διαμέριση*** του δειγματοχώρου Ω.

και ***ο κανόνας του Bayes***

$$P(E_k | A) = \frac{P(A | E_k) P(E_k)}{\sum_{k=1}^{m} P(A | E_k) P(E_k)}$$

Μία πηγή πληροφορίας παράγει τα σύμβολα 1 και 0 με πιθανότητες 0,6 και 0,4 αντίστοιχα. Η έξοδος της πηγής μεταδίδεται μέσα από κανάλι που έχει πιθανότητα σφάλματος (μετατρέπει ένα 1 σε 0 ή ένα 0 σε 1) ίση με 0,1.



Η πιθανότητες $P(\text{είσ}=1)$ και $P(\text{είσ}=0)$ συνήθως αναφέρονται ως ***a priori probabilities***.

Επίσης οι πιθανότητες $P(\text{εξ}=1\,|\,\text{είσ}=1)$ και $P(\text{εξ}=0\,|\,\text{είσ}=0)$ τυπικά είναι γνωστές πριν την πραγματοποίηση του πειράματος.

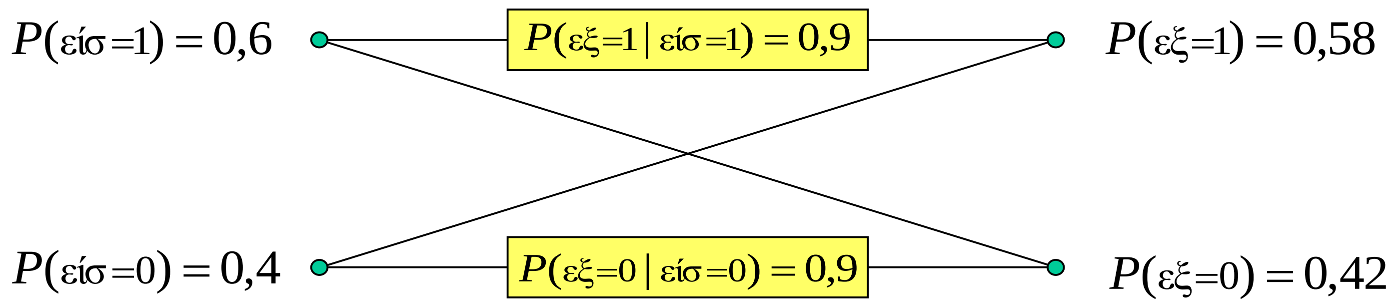
$$P(A)=\sum_{n=1}^{N}P(A\,|\,B_n)\,P(B_n)$$

Η πιθανότητα η έξοδος του καναλιού να είναι 1 δίνεται

$$\begin{aligned}P(\text{εξ}=1)&=P(\text{εξ}=1\,|\,\text{είσ}=1)P(\text{είσ}=1)+P(\text{εξ}=1\,|\,\text{είσ}=0)P(\text{είσ}=0)\\&=0{,}9\times0{,}6+0{,}1\times0{,}4=0{,}58\end{aligned}$$

Η πιθανότητα η έξοδος του καναλιού να είναι 0 δίνεται

$$\begin{aligned}P(\text{εξ}=0)&=P(\text{εξ}=0\,|\,\text{είσ}=1)P(\text{είσ}=1)+P(\text{εξ}=0\,|\,\text{είσ}=0)P(\text{είσ}=0)\\&=0{,}1\times0{,}6+0{,}9\times0{,}4=0{,}42\end{aligned}$$



$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,B)\,P(B)}{P(A)}$$

Η πιθανότητα η είσοδος του καναλιού να είναι 1 είναι υπό την προϋπόθεση ότι η έξοδος είναι 1 δίνεται

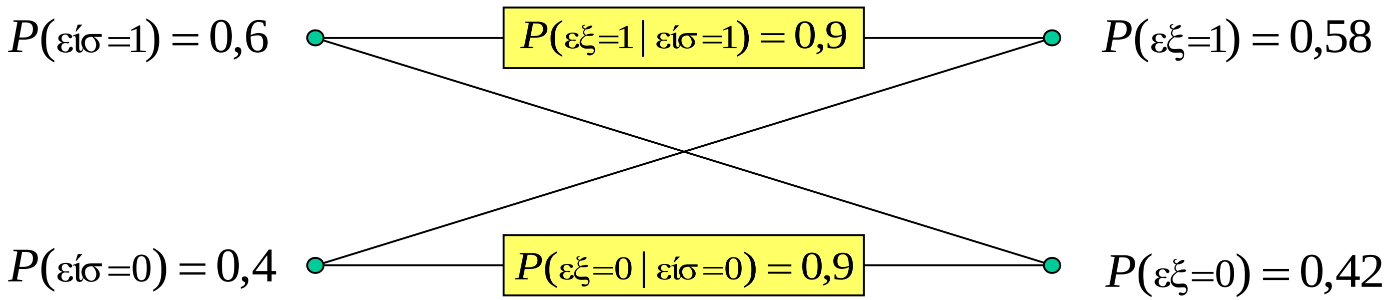
$$P(\text{είσ}=1\,|\,\text{εξ}=1)=\frac{P(\text{εξ}=1\,|\,\text{είσ}=1)P(\text{είσ}=1)}{P(\text{εξ}=1)}=\frac{0{,}9\times 0{,}6}{0{,}58}\approx 0{,}931$$

$$P(\text{είσ}=0\,|\,\text{εξ}=0)=\frac{P(\text{εξ}=0\,|\,\text{είσ}=0)P(\text{είσ}=0)}{P(\text{εξ}=0)}=\frac{0{,}9\times 0{,}4}{0{,}42}\approx 0{,}857$$

$$P(\text{είσ}=1\,|\,\text{εξ}=0)=\frac{P(\text{εξ}=0\,|\,\text{είσ}=1)P(\text{είσ}=1)}{P(\text{εξ}=0)}=\frac{0{,}1\times 0{,}6}{0{,}42}\approx 0{,}143$$

$$P(\text{είσ}=0\,|\,\text{εξ}=1)=\frac{P(\text{εξ}=1\,|\,\text{είσ}=0)P(\text{είσ}=0)}{P(\text{εξ}=0)}=\frac{0{,}1\times 0{,}4}{0{,}58}\approx 0{,}069$$

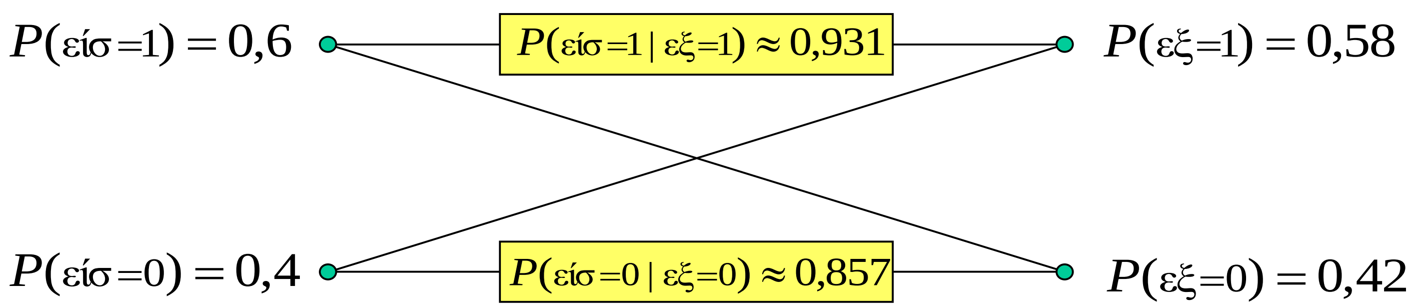
Η πιθανότητες $P(\text{είσ}=k\,|\,\text{εξ}=n)$, όπου k = 1, 2 και n = 1, 2, συνήθως αναφέρονται ως ***a posteriori probabilities*** αφού γίνονται γνωστές μετά την πραγματοποίηση πειραμάτων.



Η πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης είναι

$$P_e = P(\text{εξ}{=}1 \mid \text{είσ}{=}0)P(\text{είσ}{=}0) + P(\text{εξ}{=}0 \mid \text{είσ}{=}1)P(\text{είσ}{=}1)$$
$$= 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}1$$

Ή αν χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα έχουμε

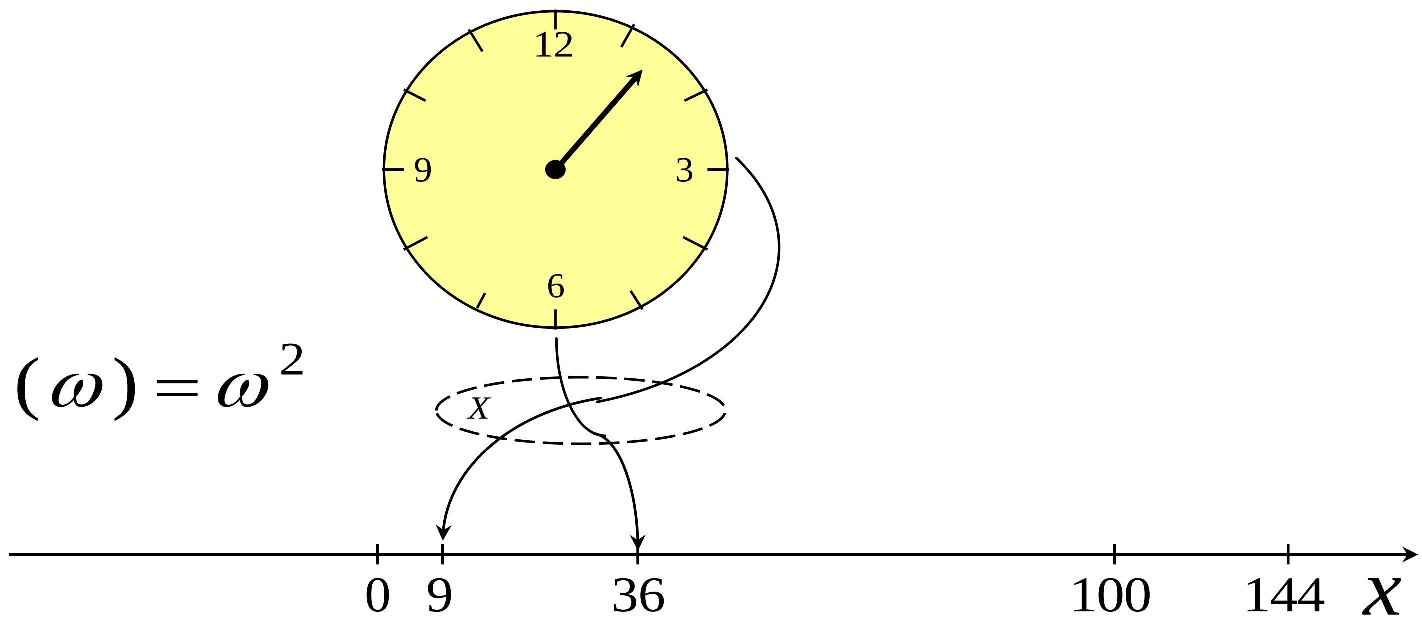


$$P_e = P(\text{είσ}{=}0 \mid \text{εξ}{=}1)P(\text{εξ}{=}1) + P(\text{είσ}{=}1 \mid \text{εξ}{=}0)P(\text{εξ}{=}0)$$
$$= (1 - 0{,}931) \times 0{,}58 + (1 - 0{,}857) \times 0{,}42 = 0{,}069 \times 0{,}58 + 0{,}143 \times 0{,}42 = 0{,}1$$

Η έννοια της Τυχαίας Μεταβλητής

Η απεικόνιση των εκβάσεων ενός πειράματος τύχης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών οδηγεί στην ***τυχαία μεταβλητή***.

$$X = X(\omega) = \omega^2$$



Τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ορίζουν μια ***τυχαία μεταβλητή*** (*random variable*).

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Επεξεργασία στοχαστικών σημάτων. Βασικά στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI23.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.