Άσκηση 2

Όχι, αποδεικνύουμε το επαγωγικό βήμα και μετά βρίσκουμε τη κατάλληλη βάση.

Άσκηση 3

Ναι. Αφού η επαγωγική βάση είναι τα 0 και 1, μπορούμε δείξουμε το k από το $k-2$.

Άσκηση 4

Όχι. Δεν λειτουργεί για τα αρνητικά στοιχεία εκτός του -1. Δεν μπορούμε να πάμε στο -2 γιατί δεν εφαρμόζεται ο κανόνας για $i = -1 < 0$.

Άσκηση 5

Ναι λειτουργεί γιατι μέ το πρώτο κανόνα δείχνουμε πως ισχύει για όλα τα $i > 0$. Στη συνέχεια δείχνουμε πως ισχύει για όλα τα $i < 0$ με το δεύτερο κανόνα.

Άσκηση 6

Δε λειτουργεί η δεύτερη επαγωγή γιατί δεν μπορούμε να δείξουμε το $P(-17)$.

Άσκηση 7

Επαγωγικό Βήμα

$$\sum_{t=0}^{n} m^t = \sum_{t=0}^{n-1} m^t + m^n = \frac{m^n - 1}{m-1} + m^n = \frac{m^n - 1 + m^{n+1} - m^n}{n-1} = \frac{m^{n+1}-1}{m-1}$$

Επαγωγική Βάση:

$$m^0 + m = 1 + m = \frac{(m+1)(m-1)}{m-1} = \frac{m^2-1}{m-1}$$

Άσκηση 12

Επαγωγικό Βήμα Έστω T το δένδρο. Επιλέγουμε τη ρίζα. Τα δύο υποδένδρα T_1, T_2 που ορίζονται από τα παιδία της ριζας είναι πλήρη δυαδικά δένδρα με λιγότερους κόμβους από το αρχικό δένδρο. Συνεπώς ισχύει η επαγωγική υπόθεση.

Φύλλα(T_1)=Εσωτ.Κόμβοι(T_1)+1 και Φύλλα(T_2)=Εσωτ.Κόμβοι(T_2)+1 $\Rightarrow$
Φύλλα(T_1)+Φύλλα(T_2)=Εσωτ.Κόμβοι(T_1)+ Εσωτ.Κόμβοι(T_2)+2

Ισχύει πως

$$\text{Φύλλα}(T_1)+\text{Φύλλα}(T_2)=\text{Φύλλα}(T).\ \text{Επίσης}$$

$$\text{Εσωτ.κόμβοι}(T_1)+\ \text{Εσωτ.κόμβοι}(T_2) = \text{Εσωτ.κόμβοι}(T)+1.$$

(αφού πρέπει να μετρήσουμε και τη ρίζα). Συνεπώς

$$\text{Φύλλα}(T)=\text{Εσωτ.Κόμβοι}(T)+2.$$

Επαγωγική Βάση Όταν έχουμε έναν κόμβο, είναι φύλλο συνεπώς ισχύει η πρόταση.

Άσκηση 13

Το λάθος είναι πως το $i-4$ μπορεί να είναι μικρότερο από 4, π.χ., $i=5$.

Άσκηση 14

Επαγωγικό Βήμα Γνωριζουμε πως

$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3} < 2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3} = 2^{n-3}(4+2+1) = 2^{n-3}\cdot 7 < 2^{n-3}\cdot 2^3 = 2^n$$

. **Επαγωγική Βάση:** Το παραπάνω επαγωγικό βήμα δουλεύει για $n \geq 5$. Άρα πρέπει να δείξουμε το ζητούμενο για $n = 2, 3, 4$. Ισχύει πως $a_2 = 2 < 2^2$. Επίσης $a_3 = a_0 + a_1 + a_2 = 6 < 2^3$. Τέλος $a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 10 < 2^4$.

Άσκηση 15

Επαγωγικό Βήμα Έστω ένας κώδικας Gray για το $n-1$. Γνωρίζουμε πως αν διατάξουμε τα στοιχεία με την αντεστραμμένη σειρά, (πρώτο τελευταία) είναι επίσης κώδικας Gray, ως κυκλική ολίσθηση κατά $2^{n-1}-1$ (ένα λιγότερο από το πλήθος των στοιχειων της ακολουθείας). Επαυξάνουμε τις δύο ακολουθείες με ένα στοιχείο: 1 στην πρώτη και 0 στη δεύτερη. Παραθέτουμε τις δύο ακολουθείες (την αυθαιντική και την αντιστραμμένη).

Η καινούρια ακολουθεία είναι κώδικας Gray γιατί: Όσο διατρέχουμε μία ακολουθεία υπάρχει ακριβως μια αλλαγή (αφού το επιπλέον στοιχείο είναι 0 ή 1 αντίστοιχα). Για τη μετάβαση από τη μία ακολοθεία στην άλλη αλλάζει μόνο το επιπλέον στοιχείο αφού λόγω της αντιστροφής τα δύο στοιχεία στη μέση θα ήταν τα ίδια (αν αγνωούσαμε το επιπλέον ψηφίο). Το ίδιο ισχύει και για τα ακριανά στοιχεία.

Παράδειγμα Κώδικας Gray για $n-1=2$: $10, 11, 01, 00$. Αντιστροφή (ολίσθηση 3) $00, 01, 11, 10$. Προσθήκη 1 στον πρώτο κώδικα.

$$(10, 11, 01, 00) \rightarrow (\mathbf{1}10, \mathbf{1}11, \mathbf{1}01, \mathbf{1}00).$$

Προσθήκη 0 στο δεύτερο κώδικα.

$$(00, 01, 11, 10) \rightarrow (\mathbf{0}00, \mathbf{0}01, \mathbf{0}11, \mathbf{0}10).$$

Παράθεση κωδίκων

$$\mathbf{1}10, \mathbf{1}11, \mathbf{1}01, \mathbf{1}00, \mathbf{0}00, \mathbf{0}01, \mathbf{0}11, \mathbf{0}10.$$

Επαγωγική Βάση
Προφανώς ισχύει για $n = 1$: $0, 1$

Άσκηση 16

(α)

Επαγωγικό Βήμα Έστω πως υπάρχει ένα σύνολο S με περισσότερα από 2^{n-1} στοιχεία. Διαλέγουμε μια τυχαία θέση, π.χ. την πρώτη. Έστω πως εμφανίζεται περισσότερες φορές το 1 σε αυτή τη θέση. Επιλέγουμε τα στοιχεία που έχουν σε αυτή τη θέση. Αυτά σε πλήθος είναι περισσότερα από 2^{n-2}. Γνωρίζουμε επίσης πως αναμεταξύ τους διαφέρουν ακριβώς σε μια θέση, που σίγουρα δεν είναι η πρώτη αφού όλα εχουν 1 σε αυτή. Αφαιρούμε από κάθε στοιχείο τη πρώτη θέση και έτσι λαμβάνουμε περισσότερα από 2^{n-2} στοιχεία μήκους $n-1$ για τα οποία ισχύει πως διαφέρουν ακριβώς σε μια θέση. Άτοπο από την επαγωγική υπόθεση.

Επαγωγική Βάση Προφανώς για $n = 1$ ισχύει αφού υπάρχει μόνο ένα στοιχείο.

(β)

Θα δείξουμε μια πιο ισχυρή προταση. Πως υπάρχουν δύο σύνολα που πληρούν την ιδιότητα αυτή και μάλιστα είναι συμπληρωματικά,δηλαδη δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, και αφού έχουν 2^{n-1} στοιχεία το κάθε ένα η ένωσή τους μας δίνει όλες τις δυνατές ακολουθείες.

Επαγωγικό Βήμα Παίρνουμε τα δύο αυτά σύνολα που προκύπτουν από την επαγωγική υπόθεση για $n-1$. Προσαυξάνουμε το πρώτο σύνολο με 0 ενώ το δεύτερο με 1. Προφανώς κάθε δύο σύνολα που προήλθαν από το ίδιο σύνολο διαφέρουν και πάλι τουλάχιστον κατά δύο θέσεις. Τα στοιχεία που προήλθαν από διαφορετικά σύνολα επίσης διαφέρουν τουλάχιστον κατά δύο θέσεις αφού διαφέρουν ως προς τη καινούρια θέση και ώς προς μια τουλάχιστον άλλη (αφού διαφορετικά τα αρχικά σύνολα θα είχαν ένα στοιχείο κοινό ενώ εξ υποθέσεως είναι συμπληρωματικά.

Τώρα όμως πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη δυο τέτοιων συνόλων (αλλιώς δεν ισχύει η επαγωγή), Αυτο που θα κανουμε θα πάρουμε πάλι τα δύο σύνολα που μας εξασφαλίζει η επαγωγική υπόθεση και θα αλλάξουμε τη τιμή του στοιχείου με το οποίο τα αυξάνουμε (δηλαδη το σύνολο που αυξανόταν με μια θέση τιμής 0, τώρα θα αυξάνεται με μια θέση τιμής 1 και το αλλο σύνολο από 1 σε 0.) Για τον ίδιο ακριβώς λόγο και αυτό το σύνολο πληρεί αυτή την ιδιότητα. Επιπλέον είναι συμπληρωματικό μετ ο προηγούμενο.

Παράδειγμα Δύο σύνολα για για $n-1 = 2$: $10, 01$ $11, 00$.

Προσθήκη 0 στο πρώτο σύνολο

$$(10, 01) \to (\mathbf{0}10, \mathbf{0}01).$$

Προσθήκη 1 στο δεύτερο σύνολο

$$(11,00) \to (\mathbf{1}11, \mathbf{1}00).$$

Ένωση συνόλου

$$\mathbf{0}10, \mathbf{0}01, \mathbf{1}11, \mathbf{1}00$$

Προσθήκη 1 στο πρώτο σύνολο

$$(10,01) \to (\mathbf{1}10, \mathbf{1}01).$$

Προσθήκη 0 στο δεύτερο σύνολο

$$(11,00) \to (\mathbf{0}11, \mathbf{0}00).$$

Ένωση συμπληρωματικού συνόλου

$$\mathbf{1}10, \mathbf{1}01, \mathbf{0}11, \mathbf{0}00$$

Επαγωγική Βάση Για $n = 1$ προφανώς και ισχύει 0 και 1.