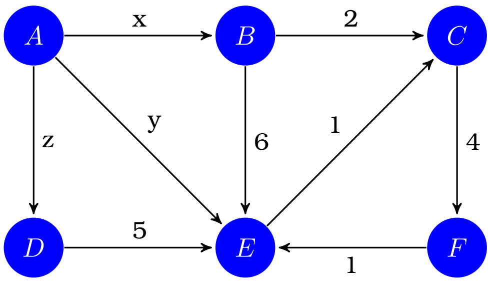
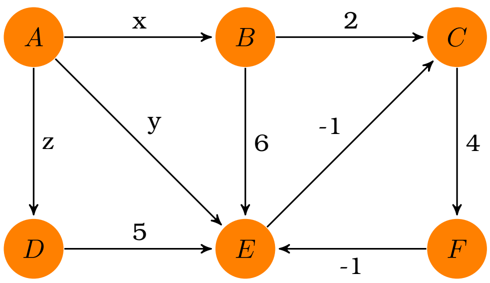
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα: 4ο Σύνολο Ασκήσεων

1. Δίνεται το γράφημα:

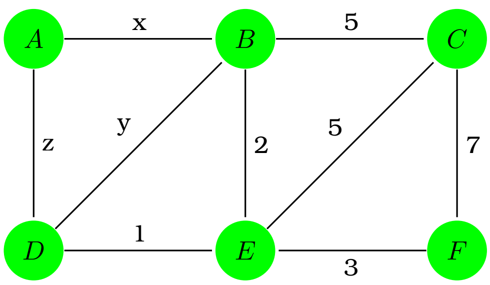


όπου x, y, z το τελευταίο, προτελευταίο και αντιπροτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας αντίστοιχα. Να εκτελεστεί ο αλγόριθμος του $Dijkstra$ λαμβάνοντας σαν αφετηριακό κόμβο τον A. Πιο συγκεκριμένα, να κατασκευαστεί ένας πίνακας, ο οποίος να εμφανίζει τις τρέχουσες τιμές των αποστάσεων καθώς και των προκατόχων (όπως Πίνακας 6.1 σελ. 110 των Σημειώσεων). Στη συνέχεια να κατασκευαστούν τα γραφήματα των ενδιάμεσων καταστάσεων.

2. Στο παρακάτω γράφημα να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του $Bellman$ κατασκευάζοντας ανάλογο πίνακα και γραφήματα όπως στο ερώτημα 1.



3. Δίνεται το γράφημα, όπου x, y, z το τελευταίο, προτελευταίο και αντιπροτελευταίο ψηφίο του αριθμού Μητρώου σας αντίστοιχα.



α. Να εκτελεστεί ο αλγόριθμος του $Prim$. Να χρησιμοποιηθεί η αλφαβητική σειρά σε περίπτωση που υπάρχει η δυνατότητα επιλογής. Να κατασκευασθεί ο πίνακας και τα γραφήματα ενδιάμεσων καταστάσεων.

β. Να κανετε το ίδιο, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, για τον αλγόριθμο του $Kruskal$.

4. Για το γράφημα της άσκησης 1 με αφετηριακό κόμβο τον A, α. Υπολογίστε τις τιμές d και π που προκύπτουν από την εκτέλεση της οριζόντιας διερεύνησης.

β. Υπολογίστε τον χρόνο εντοπισμού και περάτωσης κάθε κόμβου που προκύπτουν από την εκτέλεση της καθοδικής διερεύνησης.

γ. Προσδιορίστε τη δομή παρενθέσεων της καθοδικής διερεύνησης.

δ. Προσδιορίστε τη διάταξη των κόμβων που προκύπτει από την εκτέλεση της διαδικασίας Τοπολογική Ταξινόμηση.

Στα ανωτέρω ερωτήματα να χρησιμοποιηθεί η αλφαβητική σειρά των κόμβων σε περίπτωση που υπάρχει δυνατότητα επιλογής.

5. Άσκηση 16-2 σελ. 405 του συγγράμματος (βλ. κατωτέρω).

16-2 Χρονοπρογραμματισμός με στόχο την ελαχιστοποίηση του μέσου χρόνου ολοκλήρωσης

Υποθέστε ότι σας δίδεται ένα σύνολο εργασιών $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, όπου η κάθε εργασία a_i απαιτεί p_i μονάδες υπολογιστικού χρόνου για να ολοκληρωθεί από τη στιγμή που θα ξεκινήσει. Για την εκτέλεση αυτών των εργασιών έχετε στη διάθεσή σας έναν υπολογιστή ο οποίος μπορεί να εκτελεί ανά πάσα στιγμή μόνο μία εργασία. Έστω c_i ο ***χρόνος ολοκλήρωσης*** της εργασίας a_i, δηλαδή η χρονική στιγμή κατά την οποία ολοκληρώνεται η εκτέλεσή της. Το ζητούμενο στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να ελαχιστοποιηθεί ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης, δηλαδή η ποσότητα $(1/n)\sum_{i=1}^{n} c_i$. Ας υποθέσουμε παραδείγματος χάριν ότι υπάρχουν δύο εργασίες, a_1 και a_2, με $p_1 = 3$ και $p_2 = 5$, και ότι εκτελείται πρώτα η a_2 και ακολουθεί η a_1. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $c_2 = 5$, $c_1 = 8$, οπότε ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης είναι $(5+8)/2 = 6{,}5$.

α′. Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος να προγραμματίζει τις εργασίες έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης. Η κάθε εργασία θα πρέπει να εκτελείται απρόσκοπτα, δηλαδή από τη στιγμή που θα ξεκινήσει η εργασία a_i θα πρέπει να εκτελεστεί αδιαλείπτως επί p_i μονάδες χρόνου. Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμός σας ελαχιστοποιεί τον μέσο χρόνο ολοκλήρωσης, και προσδιορίστε τον χρόνο εκτέλεσής του.

β′. Υποθέστε στη συνέχεια ότι οι εργασίες δεν είναι όλες άμεσα διαθέσιμες προς εκτέλεση. Δηλαδή, η κάθε εργασία έχει έναν αντίστοιχο ***χρόνο απελευθέρωσης*** r_i πριν από τον οποίο δεν είναι διαθέσιμη. Υποθέστε επίσης ότι επιτρέπεται η ***αναστολή*** των εργασιών, δηλαδή ότι οποιαδήποτε εργασία μπορεί να διακοπεί προσωρινά και να συνεχιστεί αργότερα. Παραδείγματος χάριν, μια εργασία a_i με χρόνο εκτέλεσης $p_i = 6$ μπορεί να ξεκινήσει να εκτελείται τη χρονική στιγμή 1 και να ανασταλεί τη χρονική στιγμή 4. Εν συνεχεία, μπορεί να επαναληφθεί τη χρονική στιγμή 10, να ανασταλεί εκ νέου τη χρονική στιγμή 11 και τέλος να επαναληφθεί τη χρονική στιγμή 13 και να ολοκληρωθεί τη χρονική στιγμή 15. Με τον τρόπο αυτό, η εργασία a_i έχει εκτελεστεί συνολικά επί 6 μονάδες χρόνου, αλλά ο χρόνος εκτέλεσής της έχει διαιρεθεί σε τρία τμήματα. Λέμε ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης της a_i είναι 15. Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος να προγραμματίζει τις εργασίες έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης για αυτήν τη νέα εκδοχή του προβλήματος. Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμός σας ελαχιστοποιεί τον μέσο χρόνο ολοκλήρωσης, και προσδιορίστε τον χρόνο εκτέλεσής του.