ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

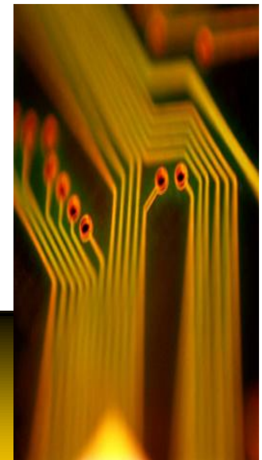
Τηλεπικοινωνιακά Ψηφιακά Δίκτυα

Ενότητα 2: Θεωρία Κίνησης

Βαρουτάς Δημήτρης

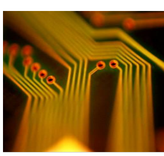
Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών



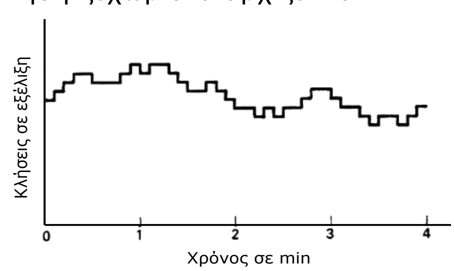
ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΗΣΗΣ

ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΔΙΚΤΥΑ
Θ. ΣΦΗΚΟΠΟΥΛΟΣ



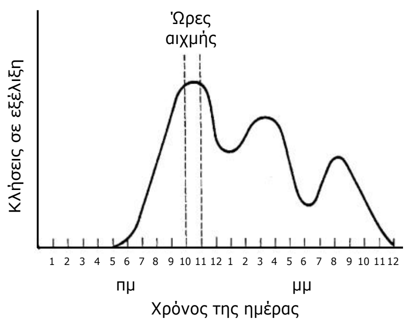
ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΚΙΝΗΣΗΣ - 1

- Ο σχεδιασμός ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος απαιτεί την λήψη μιας απόφασης ως προς το μέγεθός του με σκοπό τη σωστή διακίνηση της **κίνησης**
- Ζευκτικό κύκλωμα: Περιγράφει κάθε οντότητα που μεταφέρει μια κλήση π.χ.
  - Διεθνές κύκλωμα με μήκος χιλιάδων km
  - Μερικά μέτρα καλωδίων μεταξύ μεταγωγέων του ίδιου τηλεφωνικού κέντρου κ.α.
- Ο αριθμός των κλήσεων σε εξέλιξη μεταβάλλεται με έναν τυχαίο τρόπο καθώς κάθε κλήση ξεχωριστά αρχίζει και τελειώνει με τυχαίο τρόπο



ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΚΙΝΗΣΗΣ - 2

- Η τυχαία μεταβολή των κλήσεων σε εξέλιξη εξομαλύνεται παίρνοντας τον τρέχοντα μέσο όρο (running average)
- Κατά τη διάρκεια της νύχτας υπάρχει γενικά μικρότερη δραστηριότητα
- Αύξηση της κίνησης παρατηρείται προς το μέσο του πρωινού (επαγγελματικές δραστηριότητες), το απόγευμα και το βράδυ (κοινωνικές δραστηριότητες). Στα ενδιάμεσα υπάρχει ύφεση
- Το μέγεθος της κίνησης εξαρτάται και από το κέντρο το οποίο μελετάμε (π.χ. σε ένα κέντρο που εξυπηρετεί ένα ολόκληρο προάστιο η βραδινή κίνηση θα είναι μεγαλύτερη
- Ο αριθμός των κλήσεων μπορεί να μεταβάλλεται και με την εποχή του χρόνου (παραθεριστικά ή μη κέντρα)

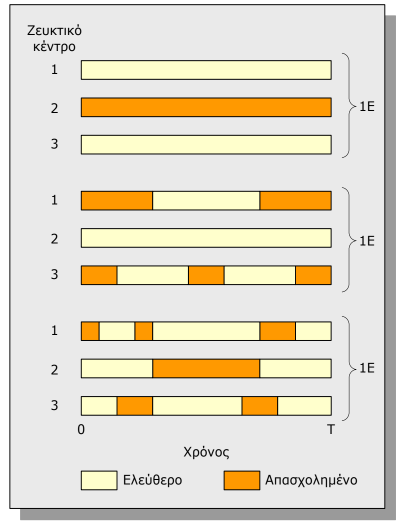


ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΚΙΝΗΣΗΣ - 3

- **Ώρα αιχμής** ή ώρα μέγιστης απασχόλησης: Καλείται η περίοδος μιας ώρας που αντιστοιχεί στην αιχμή του φόρτου κίνησης
- Το πλήθος των αναγκαίων ζευκτικών κυκλωμάτων εξαρτάται από τη μεταφερόμενη κίνηση και πρέπει να είναι επαρκές για να καλύψει τις ανάγκες που προκύπτουν κατά την ώρα αιχμής
- Σε ώρες μη αιχμής το μεγαλύτερο ποσοστό του εξοπλισμού παραμένει αδρανές
- Οι τηλεπικοινωνιακοί οργανισμοί με σκοπό την ανακατανομή της κίνησης και κατ’ επέκταση τη μείωση των δαπανών δίνουν κίνητρα στους πελάτες τους (π.χ. φθηνότερες κλήσεις τις βραδινές ώρες)

ΜΟΝΑΔΑ ΚΙΝΗΣΗΣ - 1

- **Ένταση κίνησης** ή απλά κίνηση: Καθορίζεται από τον μέσο αριθμό κλήσεων που βρίσκονται σε εξέλιξη
- Η μονάδα κίνησης καλείται **erlang** (**E**)
- Σε μία ομάδα ζευκτικών κυκλωμάτων, ο μέσος αριθμός των κλήσεων εν εξελίξει εξαρτάται:
  - από το ρυθμό άφιξης των κλήσεων
  - από τη μέση διάρκειά τους
- **Χρόνος κράτησης:** Διάρκεια μιας κλήσης (Διάρκεια κατάληψης ενός ζευκτικού κυκλώματος).



ΜΟΝΑΔΑ ΚΙΝΗΣΗΣ - 2

- Μία ομάδα ζευκτικών κυκλωμάτων διακινεί κίνηση, η οποία δίνεται από τη σχέση**:**

$$\boldsymbol{A = \frac{C \cdot h}{T}}$$

A = κίνηση σε erlangs
C = μέσος όρος αφίξεων κλήσεων κατά τη διάρκεια T
h = μέση διάρκεια κλήσεων

- Η κίνηση σε erlangs ισούται με το μέσο αριθμό των κλήσεων που φτάνουν κατά τη διάρκεια μίας περιόδου ίσης με τη μέση διάρκεια των κλήσεων (αν T = h τότε A = C)
- Πρέπει $A \leq 1$ για ένα μόνο κύκλωμα, αφού αυτό δεν μπορεί να διακινεί περισσότερες από μία κλήσεις
- Τότε η κίνηση είναι ένα κλάσμα του erlang ίσο με το μέσο ποσοστό του χρόνου για το οποίο το κύκλωμα είναι απασχολημένο.
- Το κλάσμα αυτό καλείται **απασχόληση**
- Η πιθανότητα να βρεθεί το κύκλωμα απασχολημένο, είναι ίση με το κλάσμα της μονάδας του χρόνου για το οποίο είναι απασχολημένο, δηλαδή ίση με την απασχόληση (A) του κυκλώματος

ΣΥΜΦΟΡΗΣΗ - 1

- Το κόστος ικανοποίησης της ταυτόχρονης κλήσης όλων των συνδρομητών ενός κέντρου είναι απαγορευτικό, αλλά και η πιθανότητα για να συμβεί κάτι τέτοιο είναι αμελητέα
- **Συμφόρηση:** Είναι η κατάσταση κατά την οποία όλα τα κυκλώματα μιας ζευκτικής ομάδας είναι απασχολημένα και επομένως δεν μπορούν να δεχθούν άλλες κλήσεις
- Τα συστήματα μεταγωγής, ανάλογα με το πώς χειρίζονται τις καταστάσεις συμφόρησης, μπορούν να καταταχθούν στις εξής κατηγορίες:
  - **Συστήματα με ουρά ή καθυστέρηση** (μεταγωγή μηνύματος)**:** οι κλήσεις που φτάνουν κατά τη διάρκεια συμφόρησης, περιμένουν στην ουρά, έως ότου ελευθερωθεί ένα εξερχόμενο ζευκτικό κύκλωμα
  - **Συστήματα με απώλεια κλήσεων:** όλες οι προσπάθειες αποκατάστασης των κλήσεων μέσω μίας ζευκτικής ομάδας κυκλωμάτων που παρουσιάζει συμφόρηση αποτυγχάνουν (μεταγωγή κυκλώματος – τηλεφωνικά κέντρα)

ΣΥΜΦΟΡΗΣΗ - 2

- Σε ένα σύστημα απώλειας κλήσεων ισχύει:

Μεταφερόμενη κίνηση=προσφερόμενη κίνηση–Απολεσθείσα κίνηση

- **Βαθμός εξυπηρέτησης:** Ποσοστό των κλήσεων που χάνονται ή που καθυστερούνται λόγω συμφόρησης (τρόπος μέτρησης εξυπηρέτησης). Σε ένα σύστημα με απώλεια κλήσεων ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\text{Αριθμός των κλήσεων που χάνονται}}{\text{Αριθμός των κλήσεων που προσφέρονται}} = \frac{\text{Απωλεσθείσα κίνηση}}{\text{Προσφερόμενη κίνηση}} =$$

= ποσοστό του χρόνου κατά τη διάρκεια του οποίου υπάρχει συμφόρηση

= πιθανότητα συμφόρησης

= πιθανότητα απώλειας κλήσεως λόγω συμφόρησης

ΣΥΜΦΟΡΗΣΗ - 3

- Αν προσφέρονται A erlangs κίνησης σε μία ομάδα ζευκτικών κυκλωμάτων, που έχουν βαθμό εξυπηρέτησης B, τότε η απώλεια κίνησης είναι AB, και η μεταφερόμενη κίνηση είναι A(1–B) erlangs.
- Όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός εξυπηρέτησης, τόσο χειρότερη είναι η εξυπηρέτηση που προσφέρεται.
- Ο βαθμός εξυπηρέτησης κανονικά καθορίζεται για την κίνηση στην ώρα αιχμής και μπορεί να μεταβάλλεται από π.χ. 0.001 για τα φτηνά ζευκτικά κυκλώματα ενός κέντρου σε 0.01 για τις συνδέσεις μεταξύ κέντρων και σε 0.1 για τους δαπανηρούς διεθνείς δρόμους.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

- Οι εταιρίες τηλεπικοινωνιών χρειάζεται να γνωρίζουν πότε ένα σύστημα υπερφορτώνεται και πρέπει να εγκατασταθεί επιπρόσθετος εξοπλισμός
- Συνεπώς, η κίνηση θα πρέπει να μετράται τακτικά, και να φυλάσσονται οι καταγραφές
- Η μέτρηση της μεταφερόμενης κίνησης ανάγεται σε μία μέτρηση ανά τακτά διαστήματα των κλήσεων που βρίσκονται σε εξέλιξη, κατά τη διάρκεια της ώρας αιχμής, και εξαγωγή του μέσου όρου των αποτελεσμάτων
- Με βάση τα στοιχεία της παρούσας κίνησης γίνεται πρόβλεψη για την μελλοντική κίνηση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - 1

Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο κίνησης βασίζεται στις εξής υποθέσεις:

- Η κίνηση είναι καθαρά τυχαία
  - οι αφίξεις και οι τερματισμοί των κλήσεων είναι ανεξάρτητα τυχαία γεγονότα
  - η εμφάνιση των κλήσεων δεν επηρεάζεται από τις προηγούμενες κλήσεις. (***κίνηση χωρίς μνήμη***)
  - ο αριθμός των πηγών που δημιουργούν τις κλήσεις είναι πολύ μεγάλος
- Η κίνηση χαρακτηρίζεται από στατιστική ισορροπία
  - η παραγωγή κίνησης είναι μία στατική τυχαία διαδικασία, δηλαδή οι πιθανότητες δεν αλλάζουν κατά τη διάρκεια της θεωρούμενης περιόδου
  - ο μέσος αριθμός των κλήσεων που βρίσκονται σε εξέλιξη, παραμένει σταθερός
  - η στατιστική ισορροπία δεν ισχύει αμέσως πριν και αμέσως μετά την ώρα αιχμής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - 2

Η υπόθεση των τυχαίων αφίξεων και τερματισμών των κλήσεων οδηγεί στα εξής αποτελέσματα**:**

- Το πλήθος των αφίξεων των κλήσεων δίνεται από μία κατανομή Poisson, δηλαδή**:**

$$\mathbf{P(x)} = \frac{\mu^{x}}{x\mathbf{!}} e^{-x}$$

  όπου x το πλήθος των αφίξεων κλήσεων μέσα σε χρόνο T και μ ο μέσος αριθμός των αφίξεων κλήσεων μέσα στο χρόνο T
- Τα διαστήματα, T, μεταξύ των αφίξεων των κλήσεων είναι διαστήματα μεταξύ ανεξάρτητων τυχαίων γεγονότων και έχουν μία αρνητική εκθετική κατανομή:

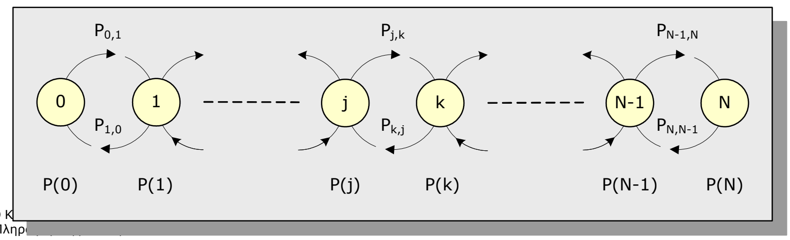
$$\mathbf{P(T \geq t) = e^{-t/\overline{T}}}$$

  όπου $\overline{T}$ είναι το μέσο διάστημα μεταξύ των αφίξεων των κλήσεων
- Εφόσον η άφιξη και ο τερματισμός κάθε κλήσης είναι ανεξάρτητα τυχαία γεγονότα, η διάρκεια κάθε κλήσης, T, είναι επίσης ένα διάστημα μεταξύ δύο τυχαίων γεγονότων, που έχει μία αρνητική εκθετική κατανομή:

$$\mathbf{P(T \geq t) = e^{-t/h}}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - 3

- Για μία ομάδα N ζευκτικών κυκλωμάτων ο αριθμός των εξελισσόμενων κλήσεων είναι πάντα από 0 ως N
- ***Απλή αλυσίδα Markov:*** Η διαδικασία έχει N+1 καταστάσεις, και η συμπεριφορά της εξαρτάται από την πιθανότητα μετάβασης της κάθε κατάστασης στην ακριβώς επόμενη ή στην ακριβώς προηγούμενη
  - **Πιθανότητες κατάστασης P(j):** Είναι η πιθανότητα της κατάστασης j
  - **Πιθανότητες μετάβασης $P_{j,k}$:** Είναι η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση k δεδομένου ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση j
- **Κανονική αλυσίδα Markov:** Οι παραπάνω πιθανότητες δεν αλλάζουν δηλαδή υπάρχει στατιστική ισορροπία



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - 4

- Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα δt ισχύουν:
  - Η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός είναι μικρή
  - Η πιθανότητα να συμβούν δύο ή περισσότερα γεγονότα είναι αμελητέα
- Τα γεγονότα που μπορούν να συμβούν στο διάστημα δt είναι:
  - Μία κλήση φτάνει, με πιθανότητα P(a)
  - Μία κλήση τερματίζεται, με πιθανότητα P(e)
  - Καμία μεταβολή, με πιθανότητα 1 - P(a) - P(e)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - 5

- Μέσος αριθμός των αφίξεων κλήσεων κατά τη χρονική διάρκεια Τ:

C = A·T/h

- Για δt πολύ μικρό, ο μέσος αριθμός των αφίξεων κλήσεων κατά τη διάρκεια του δt ισούται με την πιθανότητα, P(α), μία κλήση να αφιχθεί στο διάστημα αυτό:

Pj,k = P(α) = Aδt/h

- Για δt πολύ μικρό ο μέσος αριθμός των κλήσεων που τερματίζονται στο διάστημα δt ισούται με την πιθανότητα, P(e), μία κλήση να τερματιστεί στο διάστημα αυτό:

Pk,j = P(e) = kδt/h

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - 6

- Πιθανότητες μετάβασης:

P(j→k) = P(j) P(α) = P(j) Aδt/h
P(k→j) = P(k) P(e) = P(k) kδt/h

- Η παραδοχή της στατιστικής ισορροπίας επιβάλλει ότι:

P(j→k) = P(k→j) ⇔ P(k)=P(j)A/k

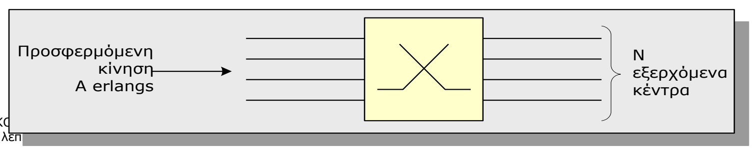
- Γενικά: $$P(x) = \frac{A^x}{x!} P(0)$$

- Όμως: $$1 = \sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{A^x}{x!} P(0) = e^A P(0) \Rightarrow P(0) = e^{-A}$$

- Άρα τελικά: $$\boxed{P(x) = \frac{A^x}{x!} e^{-A}}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΑ ΚΛΗΣΕΩΝ - 1

- Ο Erlang προσδιόρισε το βαθμό εξυπηρέτησης ενός συστήματος με απώλεια κλήσεων. Η λύση εξαρτάται από τις παρακάτω υποθέσεις **:**
  - **Η κίνηση είναι καθαρά τυχαία**
  - **Υπάρχει στατιστική ισορροπία**
  - **Υπάρχει πλήρης διαθεσιμότητα:** Κάθε κλήση που φθάνει έχει την δυνατότητα να συνδεθεί με οποιοδήποτε ελεύθερο εξερχόμενο κύκλωμα (επαρκής αριθμός των εξόδων ενός μεταγωγέα)
  - **Οι κλήσεις που συναντούν συμφόρηση χάνονται**
    - κάθε κλήση που συναντά συμφόρηση απορρίπτεται αμέσως από το σύστημα
    - ο χρήστης πρέπει να ξανακαλέσει αργότερα



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΑ ΚΛΗΣΕΩΝ - 2

- Η κίνηση που προσφέρεται την ώρα αιχμής, είναι ελαφρώς μεγαλύτερη
- Η συνολικά προσφερόμενη κίνηση είναι το άθροισμα όλων των επιτυχών και ανεπιτυχών κλήσεων
- Αν υπάρχουν x κλήσεις σε εξέλιξη, τότε:

$$P(x)=\frac{A^{x}}{x!}P(0)$$

- Δεν μπορεί να υπάρχει αρνητικός αριθμός κλήσεων ούτε περισσότερες κλήσεις από N δηλ. $0 \le x \le N$

$$\sum_{x=0}^{N} P(x) = 1 = \sum_{x=0}^{N} \frac{A^{x}}{x!} P(0) \Rightarrow P(0) = \frac{1}{\sum_{x=0}^{N} \frac{A^{x}}{x!}}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΑ ΚΛΗΣΕΩΝ - 3

- **Πρώτη κατανομή Erlang:**

$$P(x)=\frac{A^x/x!}{\sum_{k=0}^{N} A^k/k!}$$

- **Πιθανότητα συμφόρησης:**

$$\mathbf{P(N)=B=E_{1,N}(A)=\frac{A^N/N!}{\sum_{k=0}^{N} A^k/k!}}$$

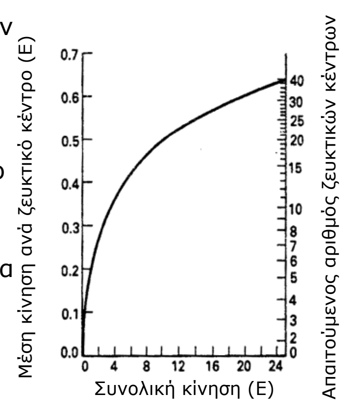
- Η $E_{1,N}(A)$ δίνεται με επαναληπτική εφαρμογή της απλής σχέσης ($E_{1,0} = 1$):

$$E_{1,N}(A)=\frac{AE_{1,N-1}(A)}{N+AE_{1,N-1}(A)}$$

- Υπάρχουν επίσης πίνακες που δίνουν τις τιμές της $E_{1,N}(A)$

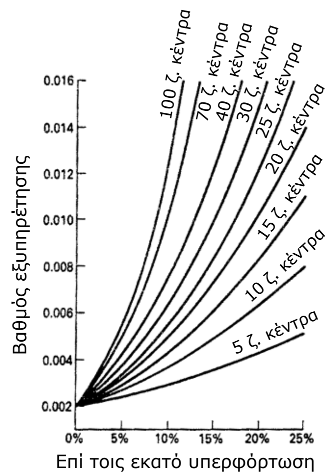
ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ - 1

- Αύξηση της κίνησης, A, αντιστοιχεί σε μία ανάλογη αύξηση των απαιτούμενων κυκλωμάτων, N, προκειμένου ο βαθμός εξυπηρέτησης B να παραμείνει σταθερός
- Αν ο βαθμός απασχόλησης των κυκλωμάτων παραμένει αμετάβλητος, τότε η πιθανότητα να βρεθούν όλα τα κυκλώματα απασχολημένα είναι μικρότερη, όσο μεγαλύτερη είναι η ομάδα κυκλωμάτων
- Για ένα δεδομένο βαθμό εξυπηρέτησης, μία μεγάλη ομάδα κυκλωμάτων έχει υψηλότερο βαθμό απασχόλησης σε σύγκριση με μία μικρή ομάδα και χαρακτηρίζεται ως αποδοτικότερη
- Είναι προτιμότερο η κίνηση να γίνεται σε μία μόνο μεγάλη ομάδα κυκλωμάτων, παρά να διακινείται από περισσότερες μικρές ομάδες



ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ - 2

- Στις μεγάλες ομάδες ο βαθμός εξυπηρέτησης χειροτερεύει περισσότερο με την υπερφόρτωση της κίνησης (λόγω υψηλής αποδοτικότητας)
- Σαν λύση, οι περισσότεροι τηλεπικοινωνιακοί οργανισμοί υιοθετούν ένα διπλό κριτήριο – δυο βαθμούς εξυπηρέτησης
  - υπό κανονικό φορτίο κίνησης
  - για δεδομένη ποσοστιαία υπερφόρτωση (μεγαλύτερος)
- Ο αριθμός των κυκλωμάτων που παρέχονται, προσδιορίζεται με βάση το κριτήριο που απαιτεί τον μεγαλύτερο αριθμό

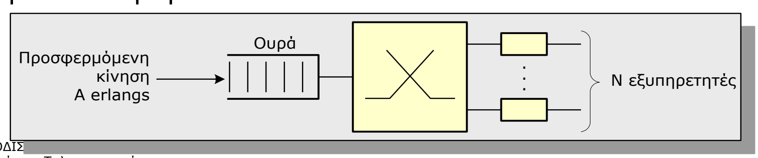


ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΩΛΕΙΑΣ ΣΕ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Για μια σύνδεση με δύο ζεύξεις, βαθμών εξυπηρέτησης B_1 και B_2 αντίστοιχα, ισχύουν:
  - **Κίνηση που προσφέρεται στη δεύτερη ζεύξη:** $A(1 - B_1)$
  - **Κίνηση που καταλήγει στον προορισμό της:** $A(1 - B_1)(1 - B_2) = A(1 + B_1B_2 - B_1 - B_2)$
  - **Συνολικός βαθμός** εξυπηρέτησης: $B = B_1 + B_2 - B_1B_2$
  - Στην πράξη B_1, $B_2 << 1$, οπότε το B_1B_2 είναι αμελητέο και επομένως $B = B_1 + B_2$
- Γενικά, για μία σύνδεση n ζεύξεων ισχύει: $B = \sum_{k=1}^{n} B_k$
- Η παραπάνω σχέση είναι προσεγγιστική για τους εξής λόγους:
  - οι βαθμοί εξυπηρέτησης καθορίζονται για τις ώρες αιχμής, και οι ώρες αυτές μπορεί να μην συμπίπτουν σε όλες τις ζεύξεις
  - Συνήθως η συνολική απώλεια είναι μόνον ελαφρώς μεγαλύτερη από εκείνη της ζεύξης που βρίσκεται στην ώρα αιχμής
  - Οι προβλέψεις που γίνονται για την εγκατάσταση νέου εξοπλισμού είναι λανθασμένες και ο βαθμός εξυπηρέτησης υπερβαίνει την καθορισμένη τιμή του πριν το τέλος της περιόδου πρόβλεψης

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΟΥΡΑ - 1
2η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ERLANG

- ***Εξυπηρετητές*** *(servers)*: Είναι τα κυκλώματα στα συστήματα ουράς
- Σύστημα M/ M/ N:
  - Η κίνηση είναι καθαρά τυχαία
  - Υπάρχει στατιστική ισορροπία
  - Υπάρχει πλήρης διαθεσιμότητα
  - Οι κλήσεις που αντιμετωπίζουν συμφόρηση εισάγονται σε μία ουρά και αποθηκεύονται εκεί μέχρις ότου ελευθερωθεί ένας εξυπηρετητής
- Η 2η υπόθεση προϋποθέτει ότι $A \leq N$. Στην αντίθετη περίπτωση το μήκος της ουράς διαρκώς αυξάνεται προς το άπειρο (κατάργηση στατιστικής ισορροπίας)
- **Δεύτερη κατανομή του Erlang:** Είναι η πιθανότητα να συναντήσουμε καθυστέρηση σε ένα σύστημα M / M / N στο οποίο προσφέρεται κίνηση A



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΟΥΡΑ - 2
2η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ERLANG

- Όταν ο συνολικός αριθμός των κλήσεων που υπάρχουν στο σύστημα $x < N$, τότε εξυπηρετούνται x κλήσεις και δε συμβαίνει καμία καθυστέρηση
- Όταν $x > N$, τότε υπάρχουν N κλήσεις που εξυπηρετούνται και $x - N$ κλήσεις στην ουρά (όλοι οι εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι)
- Αν $x \leq N$ τότε δεν υπάρχει ουρά, και όπως και στα συστήματα με απώλεια κλήσεων χωρίς συμφόρηση ισχύει:

$$P(x) = \frac{A^x}{x!} P(0), \quad 0 \leq x \leq N$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΟΥΡΑ - 3
2η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ERLANG

- **Αν x > N.** Λόγω της στατιστικής ισορροπίας:

N κλήσεις μπορούν να τερματιστούν στο δt

Μια άφιξη στο δt

$$P(x-1 \to x) = P(x \to x-1) \Rightarrow P(x)N\frac{\delta t}{h} = P(x-1)A\frac{\delta t}{h} \Rightarrow P(x) = \frac{A}{N}P(x-1)$$

- Χρησιμοποιώντας την σχέση για x≤N έχουμε: $P(N)=\frac{A^N}{N!}P(0)$
- Με την βοήθεια των παραπάνω καταλήγουμε στην γενική σχέση:

$$P(x)=\frac{A^x}{N^{x-N}\cdot N!}P(0)=\frac{N^N}{N!}\left(\frac{A}{N}\right)^x P(0)$$

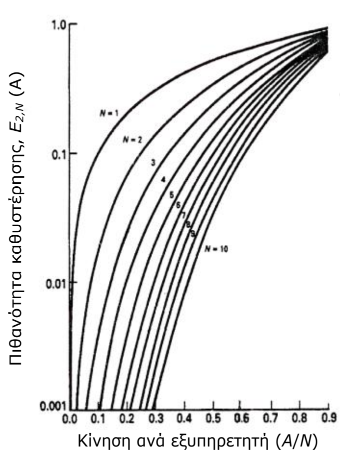
- Χωρίς όριο στο μήκος της ουράς το x μπορεί να πάρει τιμές μεταξύ 0 και ∞ οπότε:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x)=1$$

- Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$P(0)=\left[\frac{NA^N}{N!(N-A)}+\sum_{x=0}^{N-1}\frac{A^x}{x!}\right]^{-1}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΟΥΡΑ - 4
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ



- Για x ≥ N παρουσιάζεται καθυστέρηση
- Η πιθανότητα να υπάρχουν στο σύστημα τουλάχιστον z κλήσεις (όπου z ≥ N) είναι:

$$P(x \geq z)=\sum_{x=z}^{\infty}P(x)=\frac{N^N}{N!}P(0)\sum_{x=z}^{\infty}\left(\frac{A}{N}\right)^x=\frac{N^N}{N!}P(0)\left(\frac{A}{N}\right)^z\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{N}\right)^k$$

- Άρα

$$P(x \geq z)=\frac{N^N}{N!}\left(\frac{A}{N}\right)^z P(0)\left[1-\frac{A}{N}\right]^{-1}=\frac{N^N}{N!}\left(\frac{A}{N}\right)^z\frac{N}{N-A}P(0)$$

- Η πιθανότητα καθυστέρησης, P(x>N) (**τύπος καθυστέρησης του Erlang**) είναι:

$$P_D=\frac{A^N}{N!}\frac{N}{N-A}P(0)=E_{2,N}(A)$$

- Η πιθανότητα καθυστέρησης αυξάνεται τείνοντας στο 1.0 όσο το A τείνει στο N.
- Για A > N, το μήκος της ουράς μεγαλώνει απρόβλεπτα

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΟΥΡΑ - 5

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΟΥΡΑΣ

- Ένα πραγματικό σύστημα δεν μπορεί να έχει άπειρη ουρά
- Αν η ουρά έχει τη δυνατότητα να κρατήσει μόνο μέχρι Q κλήσεις, τότε $x \leq Q + N$
- Οι προηγούμενες εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{1}{\mathbf{P}(0)} = \sum_{\mathbf{x}=0}^{\mathbf{N}-1} \frac{\mathbf{A}^{\mathbf{x}}}{\mathbf{x}!} + \frac{\mathbf{N}^{\mathbf{N}}}{\mathbf{N}!}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{x}=0}^{\mathbf{N}-1} \frac{\mathbf{A}^{\mathbf{x}}}{\mathbf{x}!} + \frac{\mathbf{A}^{\mathbf{N}}}{\mathbf{N}!} \frac{1-(\mathbf{A}/\mathbf{N})^{\mathbf{Q}+1}}{1-\mathbf{A}/\mathbf{N}}$$

- Αν η πιθανότητα απώλειας είναι μικρή, τότε το σφάλμα από τις προηγούμενες εξισώσεις είναι αμελητέο
- Η πιθανότητα απώλειας μπορεί να εκτιμηθεί, εάν πρώτα θεωρηθεί ότι η ουρά είναι άπειρη και μετά υπολογισθεί το $P(x \geq Q + N)$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x} \geq \mathbf{Q}+\mathbf{N}) = \frac{\mathbf{N}^{\mathbf{N}}}{\mathbf{N}!}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{Q}+\mathbf{N}} \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N}-\mathbf{A}} \mathbf{P}(0) = \left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{Q}} \mathbf{P}_{\mathbf{D}}$$

Τέλος

Θεωρία Κίνησης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Βαρουτάς Δημήτρης, Σφηκόπουλος Θωμάς. «Τηλεπικοινωνιακά Ψηφιακά Δίκτυα. Θεωρία Κίνησης». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI122/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.