



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Ηλεκτρομαγνητισμός - Οπτική - Σύγχρονη Φυσική

Ενότητα: Στοιχεία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Βαρουτάς Δημήτρης

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

# Νόμος Faraday

Η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή σε ένα βρόχο επάγει (induces) ένα ηλεκτρικό πεδίο γύρω από το βρόχο

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - d\Phi_B / dt$$

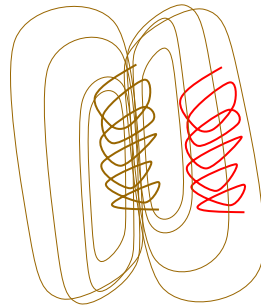
$\Phi_B$  είναι η **μαγνητική ροή** στο βρόχο

M-O Δ.Βαρουτάς

## Αμοιβαία Επαγωγή

Αν το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από **ένα** πηνίο συζευχθεί σε **ένα άλλο** πηνίο τότε το μεταβαλλόμενο ρεύμα στο **ένα** πηνίο θα δημιουργήσει μια ΗΕΔ στο **άλλο**

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= - N_2 A dB / dt \\ &= - N_2 A \mu_0 n_1 dI_1 / dt \\ &= - (N_2 N_1 A \mu_0 / \ell) dI_1 / dt \\ &= - \mathcal{M}_{21} dI_1 / dt \end{aligned}$$



M-O Δ.Βαρουτάς

Ομοίως

$$\mathcal{E}_1 = - \mathcal{M}_{12} dI_2/dt$$

$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} = N_2 N_1 A \mu_0 / \ell$$

M-O Δ.Βαρουτάς

## Αυτεπαγωγή

Ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα σε ένα πηνίο προκαλεί μια μεταβλητή μαγνητική ροή που επάγει μια ΗΕΔ στο ίδιο το πηνίο

$$\begin{aligned} \text{Για ένα σωληνοειδές } \mathcal{E} &= - d\Phi/dt \\ &= - NA dB/dt \\ &= - NA \mu_0 n dI/dt \\ &= - \mu_0 n^2 A \ell dI/dt \\ &= - L dI/dt \end{aligned}$$

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

M-O Δ.Βαρουτάς

# Πηνίο

Το πηνίο είναι ένας σωληνοειδής αγωγός

$$\mathcal{E} = -L dI/dt$$

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

Πρόκειται για ένα νέο στοιχείο ηλεκτρικού κυκλώματος!

M-O Δ.Βαρουτάς

## Circuit Elements

Ιδανική πηγή   $V = V_0$

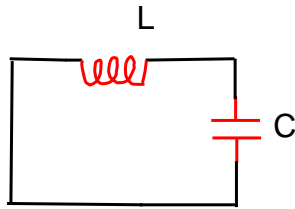
Πυκνωτής   $V = q/C$

Αντίσταση   $V = IR = R dq/dt$

Πηνίο   $V = L dI/dt = L d^2q/dt^2$

M-O Δ.Βαρουτάς

## Κύκλωμα LC



$$L d^2q/dt^2 = -q/C$$

Όπως η εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης (μάζα σε ελατήριο)

$$d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$$

$$d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$$

$$x = A \cos \omega_0 t$$

$$q = Q \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$$

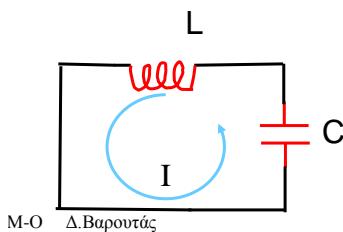
M-O Δ.Βαρουτάς

Αν ξεκινήσουμε φορτίζοντας με φορτίο Q τον πυκνωτή τότε το κύκλωμα θα ταλαντώνει μπρος-πίσω μεταξύ Q και -Q με:

$$q = Q \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$$

$$I = -Q \omega_0 \sin \omega_0 t$$



M-O Δ.Βαρουτάς

$$V_C = q/C = (Q/C) \cos \omega_0 t$$

$$V_L = L dI/dt = -(LQ \omega_0^2 / C) \cos \omega_0 t$$

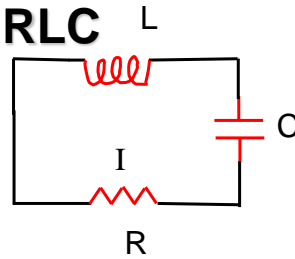
Τα  $V_C$  και  $V_L$  έχουν  $180^\circ$  διαφορά φάσης

## Κύκλωμα RLC

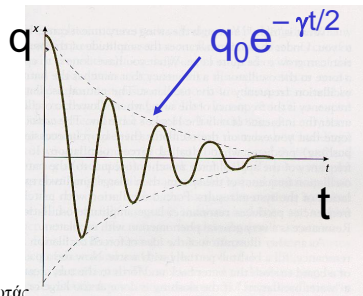
Αν προσθέσουμε αντίσταση τότε έχουμε ένα αποσβενύμενο κύκλωμα

$$0 = q/C + IR + LdI/dt$$

$$= q/C + Rdq/dt + Ld^2q/dt^2$$



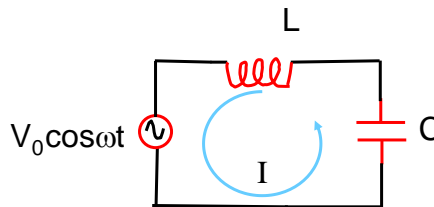
$$d^2q/dt^2 + (R/L)dq/dt + (1/LC)q = 0$$



$$\gamma = R/L$$

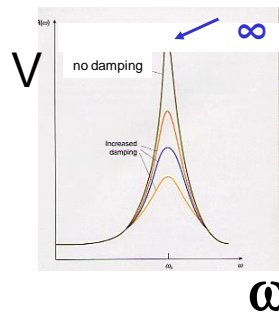
M-O Δ.Βαρουτάς

Αν προσθέσουμε μια πηγή τάσης που οδηγεί το κύκλωμα στην ίδια συχνότητα



Όμοιο με ένα αρμονικό ταλαντωτή όπου η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίδια με την ιδιοσυχνότητα  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$

Το κύκλωμα θα οδηγηθεί σε συντονισμό



M-O Δ.Βαρουτάς

Ίδιες εξισώσεις = Ίδιες λύσεις

Δυο διαφορετικά φυσικά φαινόμενα

Ταλάντωση μάζας στα άκρα  
ενός ελατηρίου

και

Ταλαντούμενο κύκλωμα LC

Καμιά φυσική συσχέτιση μεταξύ τους αλλά ίδια συμπεριφορά λόγω της περιγραφής τους από τις ίδιες εξισώσεις

M-O Δ.Βαρουτάς

## Ενέργεια Πηνίου

$$P = IV = ILdI/dt$$

$$dU/dt = ILdI/dt$$

$$U = LI^2/2 \quad \text{Για πηνίο}$$

Σύγκριση

$$U = Q^2/2C \quad \text{Για πυκνωτή}$$

M-O Δ.Βαρουτάς

## Μαγνητική Ενέργεια

$$U = LI^2/2$$

$$= \mu_0 n^2 A \ell I^2 / 2$$

$$= (\mu_0 n^2 A \ell / 2) (B^2 / \mu_0^2 n^2)$$

$$= (B^2 / 2 \mu_0) (A \ell)$$

Πυκνότητα Ενέργειας

Όγκος

Σωληνοειδές:

$$B = \mu_0 n I$$

$$I = B / \mu_0 n$$

M-O Δ.Βαρουτάς

Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας

$$= B^2 / 2 \mu_0$$

Πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας

$$= \epsilon_0 E^2 / 2$$

Και στις δυο περιπτώσεις η πυκνότητα ενέργειας είναι ανάλογη του τετραγώνου της έντασης του πεδίου

M-O Δ.Βαρουτάς



# Μετασχηματιστής

Ιδανικός μετασχηματιστής

Η ροή και στα δύο πηνία  
είναι πλήρως συζευγμένη

Είτε είναι πλήρως επικαλυπτόμενα

ή

Συνδέονται με μεταλλικό πυρήνα

M-O Δ.Βαρουτάς

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 d\Phi/dt \quad \mathcal{E}_2 = -N_2 d\Phi/dt$$

$$V_1 = N_1 d\Phi/dt \quad V_2 = N_2 d\Phi/dt$$

$$V_1/V_2 = N_1/N_2$$

$$V_2 = V_1 (N_2/N_1)$$

Η τάση είτε αυξάνει είτε μειώνεται  
σύμφωνα με το πηλίκο  $N_2/N_1$

M-O Δ.Βαρουτάς

Ισχύς εισόδου = Ισχύς εξόδου

$$I_1 V_1 = I_2 V_2$$

$$\Rightarrow I_2 / I_1 = V_1 / V_2$$

Σε μετασχητιστή αύξησης το ρεύμα μειώνεται

Σε μετασχητιστή μείωσης το ρεύμα αυξάνεται

M-O Δ.Βαρουτάς

Σχεδόν πλήρης θεωρία

$$\begin{array}{ll} \int_{\text{closed surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Sigma q_{\text{in}} / \epsilon_0 & \int_{\text{closed surface}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \\ \oint_{\text{closed loop}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - d\Phi_B / dt & \oint_{\text{closed loop}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \end{array}$$

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

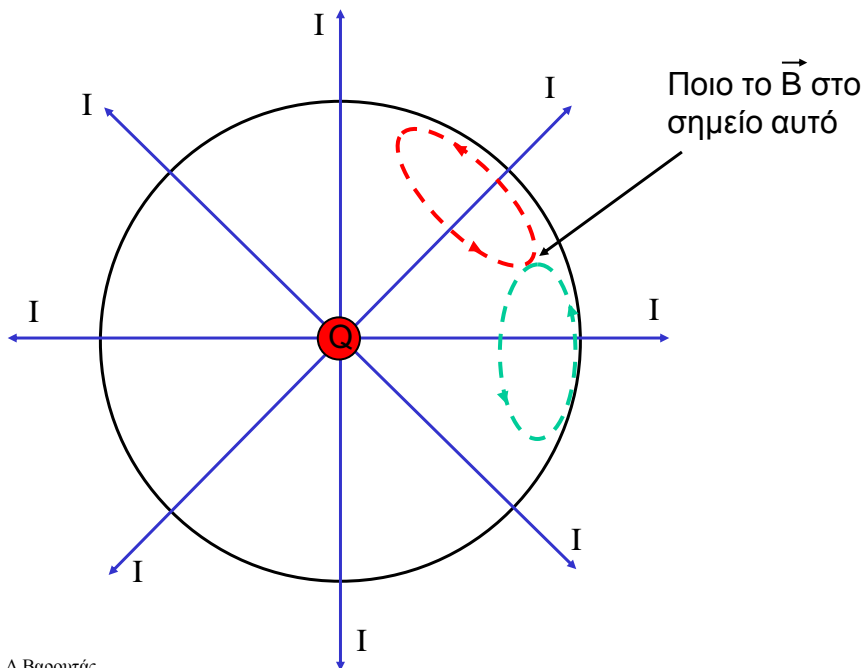
M-O Δ.Βαρουτάς

## Ανεπαρκής και αντιφατική

Θεωρήστε ότι ένα φορτίο μειώνεται  
στέλνοντας ομοιόμορφα ρεύμα σε  
όλες τις κατευθύνσεις

Πχ. ένα ραδιενεργό στοιχείο που  
μειώνεται λόγω εκπομπής ηλεκτρονίων

M-O Δ.Βαρουτάς



Το πρόβλημα είναι στο νόμο του Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 j A$$

Προφανώς πρέπει να υπάρχει κάποιος όρος που να ακυρώνει το  $\mu_0 \mathbf{I}$ .

$$\text{Πχ.} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 d\Phi_E/dt$$

Επιπλέον του ρεύματος, μια μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή δημιουργεί μαγνητικό πεδίο

M-O Δ.Βαρουτάς

Πως διορθώνεται το πρόβλημα?

$$\mu_0 \varepsilon_0 d\Phi_E/dt = \mu_0 \varepsilon_0 A dE/dt$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 A (1/4 \pi \varepsilon_0 r^2) dQ/dt$$

$$= - \mu_0 A (1/4 \pi r^2) I$$

$$= - \mu_0 A j = - \mu_0 I_{\text{through loop}}$$

M-O Δ.Βαρουτάς

## Πλήρες σύνολο εξισ. Maxwell

$$\int_{\text{closed surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Sigma q_{\text{in}} / \epsilon_0$$

$$\oint_{\text{closed loop}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - d\Phi_B / dt$$

$$\int_{\text{closed surface}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\text{closed loop}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E / dt$$

M-O Δ.Βαρουτάς

### Μια αλυσίδα γεγονότων

→ Αλλαγή ρεύματος προκαλεί αλλαγή του B

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \underline{\mu_0 I} + \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E / dt$$

→ Αλλαγή του B προκαλεί αλλαγή του E

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - d\Phi_B / dt \quad \text{Αυτο-συντηρούμενο}$$

→ Αλλαγή του E προκαλεί αλλαγή του B

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \underline{\mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E / dt}$$

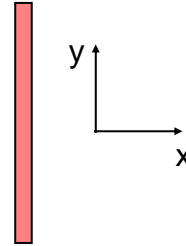
M-O Δ.Βαρουτάς

# Οδεύονται Η/Μ πεδία

Θεωρήστε έναν αγωγό

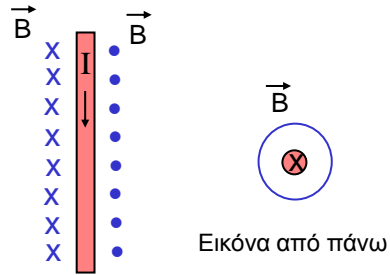
$t = 0$  ρεύμα στη  $-y$  δνση

Παράγει μαγνητική ροή



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

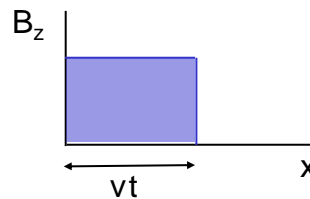
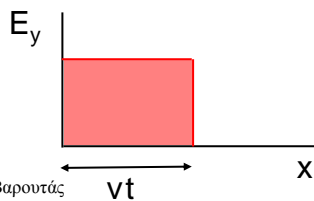
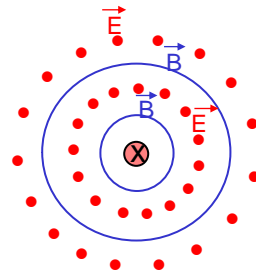
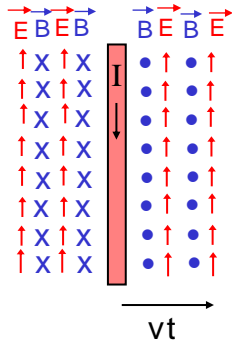
$$B = \mu_0 I / 2\pi r$$



M-O Δ.Βαρουτάς

Μετά από λίγο

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_B / dt$$



M-O Δ.Βαρουτάς

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_B/dt$$

$$-E_y \ell = -B_z \ell v$$

$$E_y = B_z v$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E/dt$$

$$B_z \ell = \mu_0 \epsilon_0 E_y \ell v$$

$$B_z = \mu_0 \epsilon_0 E_y v$$

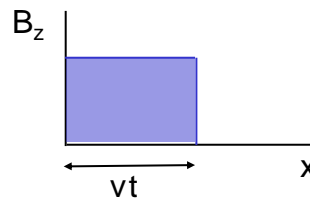
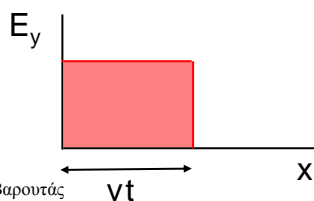
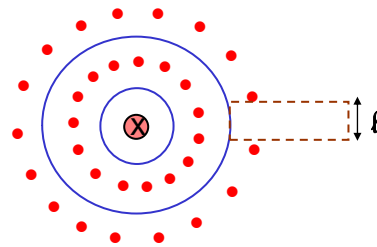
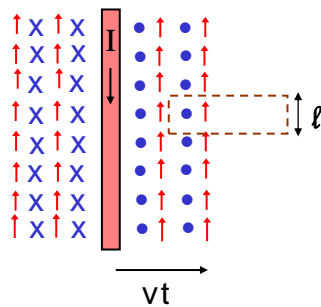
$$\Rightarrow E_y = \mu_0 \epsilon_0 v^2 E_y$$

$$\Rightarrow v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} = c$$

M-O Δ.Βαρουτάς

Ταχύτητα φωτός

Μετά από λίγο



M-O Δ.Βαρουτάς

## Διάδοση Η/Μ κυμάτων

- $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  κάθετα μεταξύ τους
- Η ταχύτητα διάδοσης είναι κάθετη στα πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$
- $E = vB$
- $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = c$

M-O Δ.Βαρουτάς

Τι θα γίνει αν «κλείσουμε το ρεύμα στη χρονική στιγμή  $t = T$  ?

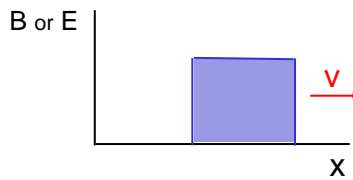
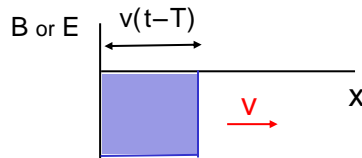
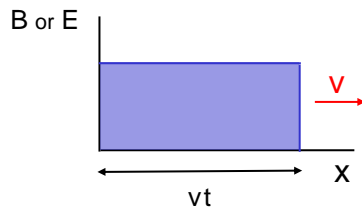
Προσθέστε αλγεβρικά ένα ρεύμα στη διεύθυνση +y

Αυτό δημιουργεί ένα ρεύμα στη αντίθετη κατεύθυνση

Υπέρθωση των δύο κυμάτων

H/M-O Δ.Βαρουτάς





M-O Δ.Βαρουτάς

### Κυματική εξίσωση Η/Μ κυμάτων

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Αν το ρεύμα είναι αρμονικό (ημιτονοειδές)  
τότε και τα  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  μεταβάλλονται αρμονικά

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$

$\vec{E}$  και  $\vec{B}$  συμφασικά

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t)$$

x η δ/νση διάδοσης

H/M-O Δ.Βαρουτάς

Τέλος

Νόμος Faraday - Αυτεπαγωγή

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Βαρουτάς Δημήτρης. «Ηλεκρομαγνητισμός - Οπτική - Σύγχρονη Φυσική. Στοιχεία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI121/>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

