



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ηλεκτρομαγνητισμός - Οπτική - Σύγχρονη Φυσική

Ενότητα: Σύγχρονη Φυσική

Βαρουτάς Δημήτρης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Κβαντική μηχανική

Πιθανότητα – Σωματιδιακή ερμηνεία

Χρησιμοποιώντας το σωματιδιακό μοντέλο, η πιθανότητα ανά μονάδα όγκου να βρεθεί ένα φωτόνιο σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου σε μια χρονική στιγμή είναι ανάλογη του πλήθους N των φωτονίων ανά μονάδα όγκου τη συγκεκριμένη στιγμή, η οποία είναι ανάλογη της έντασης της ακτινοβολίας:

$$\frac{\text{Πιθανότητα}}{V} \propto \frac{N}{V} \propto I$$

Ενότητα Σ3.1

Πιθανότητα – Σύνοψη

Στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, η πιθανότητα ανά μονάδα όγκου να εντοπισουμε ένα σωματίδιο που σχετίζεται με αυτή την ακτινοβολία είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του αντίστοιχου ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

- Το σωματίδιο είναι το φωτόνιο.

Το πλάτος του κύματος που αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο ονομάζεται **πλάτος πιθανότητας** ή **κυματοσυνάρτηση**.

- Συμβολίζεται με το γράμμα Ψ .

Ενότητα Σ3.1

Κβαντική μηχανική

Η θεωρία της κβαντικής μηχανικής αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1920.

- Από τον Erwin Schrödinger, τον Werner Heisenberg, και άλλους.

Μας επιτρέπει να κατανοήσουμε μια πλειάδα φαινομένων στα οποία εμπλέκονται

- Άτομα, μόρια, πυρήνες, και στερεά.

Η θεωρητική ανάλυση αυτού του κεφαλαίου είναι απόρροια του μοντέλου του κβαντικού σωματιδίου και ενσωματώνει ορισμένα από τα χαρακτηριστικά του μοντέλου των κυμάτων που υπόκεινται σε οριακές συνθήκες.

Εισαγωγή

Πιθανότητα – Κυματική ερμηνεία

Χρησιμοποιώντας το κυματικό μοντέλο, η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι ανάλογη του τετραγώνου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, E .

$$I \propto E^2$$

Εξισώνοντας το πρώτο και το τελευταίο μέλος της σειράς αναλογιών που προαναφέραμε, παίρνουμε:

$$\frac{\text{Πιθανότητα}}{V} \propto E^2$$

Ενότητα Σ3.1

Κυματοσυνάρτηση

Η πλήρης κυματοσυνάρτηση Ψ ενός συστήματος εξαρτάται από τις θέσεις όλων των σωματιδίων του συστήματος και από τον χρόνο.

- Πολλές φορές η συνάρτηση μπορεί να χωριστεί για κάθε σωματίδιο j , οπότε μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\Psi = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_j \dots, t) = \Psi(\vec{r}_j) e^{-i\omega t}$$

όπου:

- είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου j στο σύστημα.
- $\vec{r}_j \cdot \omega = 2\pi f$ είναι η κυκλική συχνότητα της κυματοσυνάρτησης.
-

$$i = \sqrt{-1}$$

Ενότητα Σ3.1

Κυματοσυνάρτηση (συνέχεια)

Συχνά, η κυματοσυνάρτηση έχει μιγαδική τιμή.

Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής $|\psi|^2 = \psi^* \psi$, είναι πάντα θετικός πραγματικός αριθμός.

- Όπου ψ^* είναι ο συζυγής μιγαδικός του ψ .
- Είναι ανάλογος της πιθανότητας ανά μονάδα όγκου να βρεθεί το σωματίδιο σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου κάποια χρονική στιγμή.

Η κυματοσυνάρτηση περιέχει όλα όσα είμασταν σε θέση να γνωρίζουμε σχετικά με το σωματίδιο.

Ενότητα Σ3.1

Ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης για ένα μόνο σωματίδιο

Η ψ δεν είναι μετρήσιμη.

Η $|\psi|^2$ είναι πραγματική και μπορεί να μετρηθεί.

Η $|\psi|^2$ ονομάζεται **πυκνότητα πιθανότητας**.

- Είναι η σχετική πιθανότητα ανά μονάδα όγκου να βρεθεί το σωματίδιο σε κάποιο σημείο του όγκου.

Αν dV είναι ο στοιχειώδης όγκος που περιβάλλει κάποιο σημείο, τότε η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο μέσα σε αυτόν τον όγκο είναι:

$$P(x, y, z) dV = |\psi|^2 dV$$

Ενότητα Σ3.1

Κυματοσυνάρτηση – Γενικά σχόλια (τελική διαφάνεια)

Η πιθανοκρατική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης διατυπώθηκε αρχικά από τον Max Born.

Ο Erwin Schrödinger πρότεινε μια κυματική εξίσωση που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η κυματοσυνάρτηση μεταβάλλεται στον χώρο και στον χρόνο.

- Η κυματική εξίσωση του Schrödinger αποτελεί κεντρικό στοιχείο της θεωρίας της κβαντικής μηχανικής.

Η κυματοσυνάρτηση αφορά το σύστημα.

- Η κυματοσυνάρτηση καθορίζεται τόσο από το σωματίδιο όσο και από την αλληλεπίδραση του σωματιδίου με το περιβάλλον του.
- Επειδή, σε πολλές περιπτώσεις, το σωματίδιο είναι το μόνο μέρος του συστήματος που υφίσταται την εκάστοτε μεταβολή, συχνά συνδέουμε την κυματοσυνάρτηση με το σωματίδιο.
- Σε ορισμένα παραδείγματα είναι σκόπιμο να αναφερόμαστε στην κυματοσυνάρτηση του συστήματος και όχι στην κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου.

Ενότητα Σ3.1

Κυματοσυνάρτηση ελεύθερου σωματιδίου (1)

Η κυματοσυνάρτηση ενός ελεύθερου σωματιδίου, το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x , μπορεί να γραφτεί ως $\psi(x) = Ae^{ikx}$.

Όπου:

- A είναι ένα σταθερό πλάτος.
- $k = 2\pi/\lambda$ είναι ο γωνιακός κυματάρθρωτος του κύματος που αντιστοιχεί στο σωματίδιο.

Ενότητα Σ3.1

Κυματοσυνάρτηση ελεύθερου σωματιδίου (2)

Γενικά, η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο σε έναν όγκο dV είναι $|\psi|^2 dV$.

Για ένα μονοδιάστατο σύστημα, η παραπάνω σχέση γίνεται $|\psi|^2 dx$.

Η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στο αυθαίρετα επιλεγμένο διάστημα $a \leq x \leq b$ είναι:

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 dx$$

Η πιθανότητα P_{ab} είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της $|\psi|^2$.



Ενότητα Σ3.1

Κυματοσυνάρτηση ελεύθερου σωματιδίου (τελική διαφάνεια)

Επειδή το σωματίδιο πρέπει να βρίσκεται κάπου κατά μήκος του άξονα x , το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλες τις τιμές του x πρέπει να είναι ίσο με 1:

$$P_{ab} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

- Κάθε κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί αυτή την εξίσωση ονομάζεται **κανονικοποιημένη**.
- Η κανονικοποίηση δείχνει απλώς ότι το σωματίδιο υπάρχει σε κάποιο σημείο του χώρου.

Ενότητα Σ3.1

Αναμενόμενες τιμές

Από την ψ μπορούμε να εξαγάγουμε μετρήσιμες ποσότητες.

- Υπενθυμίζουμε ότι η ψ δεν είναι μετρήσιμη ποσότητα.

Εφόσον είναι γνωστή η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου, είναι δυνατό να υπολογίσουμε τη μέση θέση στην οποία αναμένουμε να βρίσκεται το σωματίδιο μετά από πολλές μετρήσεις.

Η μέση θέση ονομάζεται αναμενόμενη τιμή του x και ορίζεται από τη σχέση:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx$$

Επιπλέον, μπορούμε να βρούμε την αναμενόμενη τιμή οποιασδήποτε συνάρτησης του x .

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi dx$$

- Η αναμενόμενη τιμή είναι μια ποσότητα ανάλογη της «σταθμισμένης μέσης τιμής».

Ενότητα Σ3.1

Σωματίδιο σε κουτί

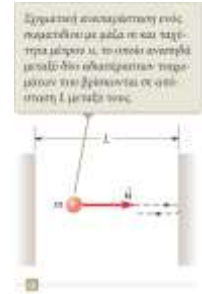
Ένα σωματίδιο είναι περιορισμένο σε μια μονοδιάστατη περιοχή του χώρου.

- Το «κουτί» είναι μονοδιάστατο.

Το σωματίδιο αναπηδά ελαστικά εμπρός-πίσω μεταξύ δύο αδιαπέρατων τοιχωμάτων που βρίσκονται σε απόσταση L .

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου.

- Αν το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου είναι σταθερό, τότε η κινητική ενέργεια και η ορμή του είναι σταθερές.
- Στην κλασική φυσική, οι τιμές της ορμής και της ενέργειας του σωματιδίου δεν υπόκεινται σε κάποιον περιορισμό.



Ενότητα Σ3.2

Δυναμική ενέργεια συστήματος σωματιδίου-κουτιού

Σύμφωνα με την κβαντομηχανική προσέγγιση, πρέπει να βρεθεί η κατάλληλη κυματοσυνάρτηση, η οποία να συμφωνεί με τις συνθήκες της συγκεκριμένης περίπτωσης.

Όσο το σωματίδιο βρίσκεται μέσα στο κουτί, η δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν εξαρτάται από τη θέση του σωματιδίου.

- Μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή της ενέργειας να είναι ίση με μηδέν.

Αν το σωματίδιο βρίσκεται έξω από το πηγάδι, η ενέργεια του συστήματος είναι άπειρη.

- Έτσι εξασφαλίζεται ότι η κυματοσυνάρτηση είναι μηδέν έξω από το κουτί.



Ενότητα Σ3.2

Κυματοσυνάρτηση σωματιδίου σε κουτί – Οριακές συνθήκες

Εφόσον οι τοίχοι είναι αδιαπέραστοι, η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο έξω από το κουτί είναι μηδέν.

- $\psi(x) = 0$ για $x < 0$ και $x > L$.

Επίσης, η κυματοσυνάρτηση πρέπει να έχει τιμή μηδέν στα τοιχώματα.

- Η συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής.
- $\psi(0) = 0$ και $\psi(L) = 0$.

Οι μόνες αποδεκτές κυματοσυναρτήσεις είναι αυτές που ικανοποιούν τις παραπάνω οριακές συνθήκες.

Ενότητα Σ3.2

Κυματοσυνάρτηση σωματιδίου σε κουτί – Μαθηματική μορφή

Η κυματοσυνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως ημιτονοειδής συνάρτηση πραγματικών αριθμών:

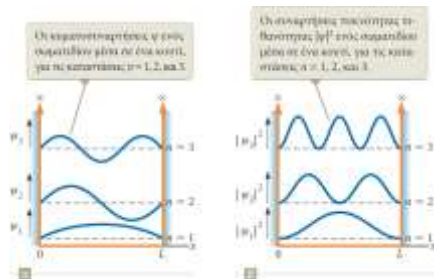
$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες και χρησιμοποιώντας το μήκος κύματος de Broglie έχουμε:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ενότητα Σ3.2

Γραφικές αναπαραστάσεις ενός σωματιδίου σε κουτί



Ενότητα Σ3.2

Κυματοσυνάρτηση σωματιδίου σε κουτί (συνέχεια)

Μόνο ορισμένα μήκη κύματος επιτρέπονται για το σωματίδιο.

Η $|\psi|^2$ είναι μηδέν στα όρια.

Η $|\psi|^2$ είναι μηδέν και σε άλλα σημεία, ανάλογα με την τιμή του n .

Κάθε φορά που ο κβαντικός αριθμός αυξάνεται κατά μία μονάδα, ο αριθμός των σημείων όπου μηδενίζεται η κυματοσυνάρτηση αυξάνεται κατά ένα.

Ενότητα Σ3.2

Ορμή σωματιδίου σε κουτί

Υπενθυμίζουμε ότι τα μήκη κύματος περιορίζονται σε συγκεκριμένες τιμές.

$$\lambda = 2L/n$$

Επομένως, και οι τιμές της ορμής είναι περιορισμένες.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L}$$

Ενότητα Σ3.2

Ενέργεια συστήματος σωματιδίου-κουτιού

Θεωρήσαμε ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν όταν το σωματίδιο βρίσκεται μέσα στο κουτί.

Άρα, η ενέργεια του συστήματος είναι απλώς η κινητική ενέργεια του σωματιδίου και οι επιτρεπτές τιμές της δίνονται από τη σχέση:

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Η ενέργεια του σωματιδίου είναι κβαντισμένη.

Ενότητα Σ3.2

Διάγραμμα ενεργειακών σταθμών – Σωματίδιο σε κουτί

Η κατάσταση που αντιστοιχεί στην ελάχιστη επιτρεπτή ενέργεια ονομάζεται **θεμελιώδης κατάσταση**.

Οι καταστάσεις που αντιστοιχούν στις ενέργειες $E_n = n^2 E_1$ ονομάζονται **διεγερμένες καταστάσεις**.

Η κατάσταση που αντιστοιχεί σε τιμή ενέργειας $E = 0$ δεν είναι επιτρεπτή.

Το σωματίδιο δεν μπορεί ποτέ να βρεθεί σε κατάσταση ηρεμίας.



Ενότητα Σ3.2

Οριακές συνθήκες – Γενικά

Οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται για τον προσδιορισμό των επιτρεπτών καταστάσεων του συστήματος.

Στο μοντέλο του σωματιδίου που υπόκειται σε οριακές συνθήκες, η αλληλεπίδραση ενός κβαντικού σωματιδίου με το περιβάλλον του υπόκειται σε μία ή και περισσότερες οριακές συνθήκες και, αν η αλληλεπίδραση αυτή περιορίζει το σωματίδιο σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου, τότε το αποτέλεσμα είναι η κβάντωση της ενέργειας του συστήματος.

Γενικά, οι οριακές συνθήκες των κβαντικών συναρτήσεων σχετίζονται με τις συντεταγμένες που περιγράφουν το πρόβλημα.

Ενότητα Σ3.2

Erwin Schrödinger

1887–1961

Αυστριακός φυσικός

Ευρύτερα γνωστός ως ένας από τους δημιουργούς της κβαντικής μηχανικής.

Αποδείχθηκε ότι η προσέγγισή του ήταν μαθηματικά ισοδύναμη με αυτή του Heisenberg.

Επίσης έγραψε σημαντικές δημοσιεύσεις στους τομείς:

- της στατιστικής μηχανικής,
- της έγχρωμης όρασης,
- της γενικής σχετικότητας.



Ενότητα Σ3.3

Η εξίσωση του Schrödinger

Η εξίσωση του Schrödinger, όπως εφαρμόζεται στην περίπτωση ενός σωματιδίου μάζας m , του οποίου η κίνηση περιορίζεται στον άξονα x και αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του μέσω μιας συνάρτησης δυναμικής ενέργειας $U(x)$, είναι:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger**.

Τόσο στην περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου όσο και σε εκείνη του σωματιδίου στο κουτί, ο πρώτος όρος της εξίσωσης Schrödinger ανάγεται στην κινητική ενέργεια του σωματιδίου πολλαπλασιασμένη με την κυματοσυνάρτηση.

Οι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger που ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα πρέπει να είναι συνεχείς στα όρια των διαστημάτων.

Ενότητα Σ3.3

Η εξίσωση του Schrödinger (τελική διαφάνεια)

Από τη στιγμή που έχουμε μια προκαταρκτική λύση για την εξίσωση του Schrödinger, μπορούμε να επιβάλουμε τις παρακάτω συνθήκες προκειμένου να βρούμε την ακριβή λύση και τις επιτρεπτές ενέργειες:

$H\psi(x)$ πρέπει να είναι κανονικοποιησιμη.

$H\psi(x)$ πρέπει να τείνει στο 0 καθώς $x \rightarrow \pm\infty$ και να παραμένει πεπερασμένη καθώς $x \rightarrow 0$.

$H\psi(x)$ πρέπει να είναι συνεχής ως προς x και να είναι παντού μονότιμη.

- Οι λύσεις που ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα πρέπει να είναι συνεχείς στα όρια των διαστημάτων.

$H d\psi/dx$ πρέπει να είναι πεπερασμένη, συνεχής, και μονότιμη παντού για πεπερασμένες τιμές της δυναμικής ενέργειας U .

Ενότητα Σ3.3

Λύσεις της εξίσωσης Schrödinger

Η επίλυση της εξίσωσης Schrödinger μπορεί να αποδειχθεί πολύ δύσκολο έργο.

Η εξίσωση του Schrödinger ερμηνεύει με εξαιρετική επιτυχία τη συμπεριφορά των ατομικών και των πυρηνικών συστημάτων.

- Η κλασική φυσική αδυνατεί να εξηγήσει αυτή τη συμπεριφορά.

Όταν η κβαντική φυσική εφαρμόζεται σε μακροσκοπικά συστήματα, τα αποτελέσματά της συμφωνούν με αυτά της κλασικής φυσικής.

Ενότητα Σ3.3

Πηγάδια δυναμικού

Ένα πηγάδι δυναμικού είναι γράφημα της ενέργειας.

Το πηγάδι είναι η περιοχή του γραφήματος δυναμικής ενέργειας όπου η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα επάνω.

Ένα σωματίδιο κινείται μόνο οριζόντια, σε μια σταθερή κατακόρυφη θέση του γραφήματος δυναμικής ενέργειας, κάτι που δείχνει ότι η ενέργεια του συστήματος του σωματιδίου και του περιβάλλοντός του διατηρείται.

Μερικές φορές λέμε ότι το σωματίδιο στο κουτί βρίσκεται μέσα σε ένα ορθογώνιο πηγάδι δυναμικού.

- Λόγω του σχήματος του γραφήματος δυναμικής ενέργειας.

Ενότητα Σ3.3

Εφαρμογή της εξίσωσης του Schrödinger σε ένα σωματίδιο σε κουτί

Στην περιοχή $0 < x < L$, όπου $U = 0$, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση του Schrödinger ως εξής:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi \quad \text{όπου} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Η πιο γενική λύση της εξίσωσης είναι $\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$.

- Οι A και B είναι σταθερές που καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες και τις συνθήκες κανονικοποίησης.

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες παίρνουμε $B = 0$ και $kL = n\pi$ όπου το n είναι ακέραιος αριθμός.

Ενότητα Σ3.3

Εφαρμογή της εξίσωσης Schrödinger σε ένα σωματίδιο σε κουτί (συνέχεια)

Λύνοντας ως προς τις επιτρεπτές ενέργειες παίρνουμε:

$$E_n = \left(\frac{\hbar^2}{8mL^2} \right) n^2$$

Οι επιτρεπτές κυματοσυνάρτησεις δίνονται από τη σχέση:

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

- Η οποία συμπίπτει με τις κυματοσυνάρτησεις που χρησιμοποιήσαμε στην αρχική μελέτη του σωματιδίου μέσα σε κουτί.

Ενότητα Σ3.3

Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους

Στην εικόνα παρουσιάζεται ένα πεπερασμένο ορθογώνιο πηγάδι δυναμικού.

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν όταν το σωματίδιο βρίσκεται στην περιοχή $0 < x < L$.

- Δηλαδή, στην περιοχή II.

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος έχει πεπερασμένη τιμή όταν το σωματίδιο βρίσκεται έξω από αυτή την περιοχή.

- Δηλαδή, στις περιοχές I και III.



Ενότητα Σ3.4

Ερμηνεία σύμφωνα με την κλασική μηχανική και την κβαντική μηχανική

Σύμφωνα με την κλασική μηχανική

- Αν η συνολική ενέργεια E του συστήματος είναι μικρότερη της U , τότε το σωματίδιο είναι μόνιμα εγκλωβισμένο στο πηγάδι δυναμικού.
- Αν το σωματίδιο βρισκόταν έξω από το πηγάδι, η κινητική του ενέργεια θα ήταν αρνητική.
 - Κάτι που είναι αδύνατο.

Σύμφωνα με την κβαντική μηχανική

- Ακόμα και στην περίπτωση που $E < U$, υπάρχει μια πεπερασμένη πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο εκτός του πηγαδιού.
- Η αρχή της αβεβαιότητας επιτρέπει στο σωματίδιο να βρεθεί έξω από το πηγάδι, αρκεί αυτή η φαινομενική παραβίαση της αρχής διατήρησης της ενέργειας να μην πραγματοποιείται με μετρήσιμο τρόπο.

Ενότητα Σ3.4

Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους – Περιοχή II

$U = 0$

Οι επιτρεπτές κυματοσυναρτήσεις είναι ημιτονοειδείς.

Ωστόσο, δεν απαιτείται πλέον από τις οριακές συνθήκες η ψ να είναι μηδέν στα άκρα του πηγαδιού, όπως ίσχυε στο πηγάδι δυναμικού άπειρου βάθους.

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\psi_{II}(x) = F \sin kx + G \cos kx$$

- Όπου τα F και G είναι σταθερές.

Ενότητα Σ3.4

Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους – Περιοχές I και III

Στις περιοχές αυτές, η εξίσωση του Schrödinger μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2} \psi$$

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\psi = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x}$$

- Όπου τα A και B είναι σταθερές.

Ενότητα Σ3.4

Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους – Περιοχές I και III (συνέχεια)

Στην περιοχή I, $B = 0$.

- Αυτό είναι απαραίτητο ώστε η ψ να μη γίνεται άπειρη για μεγάλες αρνητικές τιμές του x .

Στην περιοχή III, $A = 0$.

- Αυτό είναι απαραίτητο ώστε η ψ να μη γίνεται άπειρη για μεγάλες θετικές τιμές του x .

Οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης γίνονται:

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} \text{ για } x < 0 \text{ και } \Psi_{III} = Be^{-\kappa x} \text{ για } x > L$$

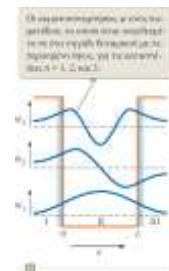
Ενότητα Σ3.4

Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους – Γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων της ψ

Στην εικόνα παρουσιάζονται τα γραφήματα της κυματοσυναρτήρησης για διάφορες ενεργειακές καταστάσεις.

Σύμφωνα με την κλασική φυσική, το σωματίδιο δεν μπορεί να βρίσκεται έξω από το πηγάδι δυναμικού.

Σύμφωνα με την κβαντική μηχανική, η κυματοσυναρτηση εκτός του πηγαδιού μειώνεται εκθετικά και τείνει στο μηδέν.

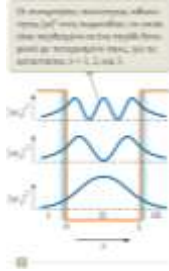


Ενότητα Σ3.4

Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους – Γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων της ψ^2

Στην εικόνα παρουσιάζονται τα γραφήματα της πυκνότητας πιθανότητας για τις τρεις πρώτες ενεργειακές καταστάσεις.

Οι κυματοσυναρτήσεις είναι συνεχείς στα όρια.



Ενότητα Σ3.4

Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους – Υπολογισμός των σταθερών

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές των εξισώσεων χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες και τη συνθήκη κανονικοποίησης.

Οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\psi_I = \psi_{II} \quad \text{και} \quad \frac{d\psi_I}{dx} = \frac{d\psi_{II}}{dx} \quad \text{στο } x = 0$$

$$\psi_{II} = \psi_{III} \quad \text{και} \quad \frac{d\psi_{II}}{dx} = \frac{d\psi_{III}}{dx} \quad \text{στο } x = L$$

Ενότητα Σ3.4

Εφαρμογή – Νανοτεχνολογία

Νανοτεχνολογία είναι ο κλάδος που ασχολείται με τη σχεδίαση διατάξεων, οι οποίες έχουν μέγεθος από 1 nm έως 100 nm.

Η νανοτεχνολογία χρησιμοποιεί την ιδέα του εγκλωβισμού σωματιδίων σε πηγάδια δυναμικού.

Ένας τομέας της νανοτεχνολογίας με ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον είναι η **κβαντική κουκίδα**.

Η κβαντική κουκίδα είναι μια μικρή περιοχή, η οποία δημιουργείται μέσα σε έναν κρύσταλλο πυριτίου και λειτουργεί ως πηγάδι δυναμικού.

- Η αποθήκευση πληροφοριών σε δυαδική μορφή με τη χρήση κβαντικών κουκιδών είναι ένας κλάδος με έντονη ερευνητική δραστηριότητα.

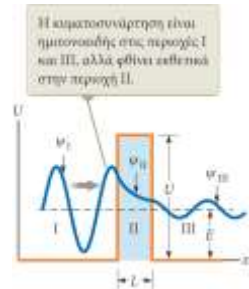
Ενότητα Σ3.4

Το φαινόμενο της σήραγγας (1)

Η δυναμική ενέργεια έχει σταθερή τιμή U σε μια περιοχή μήκους L και είναι ίση με μηδέν σε όλες τις άλλες περιοχές.

Μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας που έχει αυτό το σχήμα ονομάζεται **ορθογώνιο φράγμα δυναμικού**.

Το U ονομάζεται **ύψος φράγματος**.



Ενότητα Σ3.5

Το φαινόμενο της σήραγγας (2)

Σύμφωνα με την κλασική φυσική, το σωματίδιο θα ανακλαστεί από το φράγμα.

- Το σωματίδιο δεν μπορεί να βρεθεί στις περιοχές II και III.

Σύμφωνα με την κβαντική μηχανική, το σωματίδιο μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε περιοχή.

- Η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε μια απαγορευμένη περιοχή (σύμφωνα με την κλασική φυσική) είναι μικρή, αλλά όχι μηδενική.
- Σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας, το σωματίδιο θα μπορούσε να βρίσκεται μέσα στο φράγμα, εφόσον το χρονικό διάστημα κατά το οποίο βρίσκεται εκεί είναι σύντομο και δεν παραβιάζει την αρχή.
- Αν το φράγμα είναι σχετικά στενό, τότε μέσα σε αυτό το σύντομο χρονικό διάστημα το σωματίδιο μπορεί να διαπεράσει το φράγμα.

Ενότητα Σ3.5

Το φαινόμενο της σήραγγας (τελική διαφάνεια)

Η καμπύλη της Εικόνας Σ3.8 παριστάνει μια πλήρη λύση της εξίσωσης του Schrödinger.

Η μετακίνηση του σωματιδίου στην άλλη άκρη του φράγματος ονομάζεται **φαινόμενο σήραγγας** ή **διέλευση φράγματος**.

Η πιθανότητα να συμβεί το φαινόμενο σήραγγας περιγράφεται με τον **συντελεστή διέλευσης T** και τον **συντελεστή ανάκλασης R**.

Ενότητα Σ3.5

Συντελεστές διέλευσης και ανάκλασης

Ο **συντελεστής διέλευσης** αντιστοιχεί στην πιθανότητα του σωματιδίου να διαπεράσει το φράγμα.

Ο **συντελεστής ανάκλασης** αντιστοιχεί στην πιθανότητα ανάκλασης του σωματιδίου από το φράγμα.

$$T + R = 1$$

- Το προσπίπτον σωματίδιο πρέπει είτε να διέλθει είτε να ανακλαστεί.
- $T \approx e^{-2Cl}$ και μπορεί να έχει μη μηδενική τιμή.

Το φαινόμενο σήραγγας έχει παρατηρηθεί και επιβεβαιώνει τις αρχές της κβαντικής μηχανικής.

Ενότητα Σ3.5

Εφαρμογές του φαινομένου σήραγγας

Διάσπαση άλφα

- Προκειμένου ένα σωματίδιο άλφα να διαφύγει από τον πυρήνα του ατόμου, πρέπει να διαπεράσει ένα φράγμα δυναμικού, του οποίου το ύψος είναι πολύ μεγαλύτερο της ενέργειας του συστήματος πυρήνα-σωματιδίου άλφα.

Πυρηνική σύντηξη

- Τα πρωτόνια μπορούν να διαπεράσουν το φράγμα που δημιουργείται από την αμοιβαία ηλεκτροστατική άπωση τους.

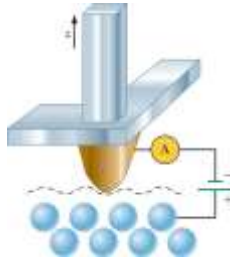
Ενότητα Σ3.6

Περισσότερες εφαρμογές του φαινομένου σήραγγας – Σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας

Ένας ηλεκτρικά αγώγιμος ακροδέκτης, που φέρει μια πολύ αιχμηρή ακίδα, πλησιάζει την υπό εξέταση επιφάνεια.

Ο κενός χώρος ανάμεσα στην ακίδα και την επιφάνεια αντιπροσωπεύει το «φράγμα» δυναμικού.

Η ακίδα και η επιφάνεια αποτελούν τα δύο τοιχώματα του «πηγαδιού δυναμικού».



Ενότητα Σ3.6

Σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας (συνέχεια)

Το σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας επιτρέπει τη λήψη εικόνας επιφανειών υψηλής ευκρίνειας με ανάλυση (ή ισοδύναμα, διακριτική ικανότητα) συγκρίσιμη με το μέγεθος μόλις ενός ατόμου.

Στην εικόνα δεξιά, παρουσιάζεται η επιφάνεια ενός δοκιμίου γραφίτη, όπως φαίνεται με ένα σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας.



Ενότητα Σ3.6

Σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας (τελική διαφάνεια)

Το σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας είναι πολύ ευαίσθητο στις μεταβολές της απόστασης μεταξύ της ακίδας και της επιφάνειας.

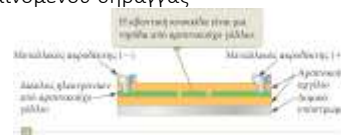
- Αυτό είναι το πλάτος του φράγματος.

Το σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας έχει έναν σοβαρό περιορισμό.

- Η λειτουργία του εξαρτάται από την ηλεκτρική αγωγιμότητα του δοκιμίου και της ακίδας.
- Οι επιφάνειες των περισσότερων υλικών δεν είναι ηλεκτρικά αγώγιμες.
- Το μικροσκόπιο ατομικής δύναμης ξεπερνά αυτόν τον περιορισμό.

Ενότητα Σ3.6

Περισσότερες εφαρμογές του φαινομένου σήραγγας – Διατάξεις συντονισμένου φαινομένου σήραγγας

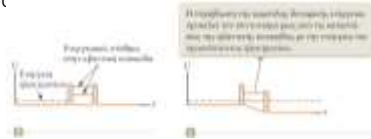


Η νησίδα αρσενικούχου γάλλιο στο κέντρο είναι η κβαντική κοιλίδα .

Βρίσκεται ανάμεσα στα δύο φράγματα που σχηματίζουν οι λεπτές προεκτάσεις του αρσενικούχου αγρίλιου.

Ενότητα Σ3.6

Διατάξεις συντονισμένου φαινομένου σήραγγας (συντονισμός)

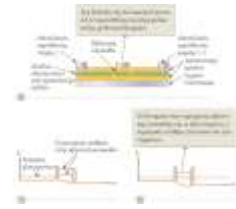


Στην Εικ. β παρουσιάζονται τα φράγματα δυναμικού και οι ενεργειακές στάθμες της κβαντικής κουκκίδας. Όταν το ηλεκτρόνιο με την ενέργεια που φαίνεται στην εικόνα συναντά το πρώτο φράγμα, δεν βρίσκει αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες διαθέσιμες στη δεξιά πλευρά του φράγματος, κάτι που μειώνει σημαντικά την πιθανότητα διέλευσης. Η εφαρμογή τάσης έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του δυναμικού με την απόσταση (καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά της διάταξης). Η παραμόρφωση του φράγματος δυναμικού έχει ως αποτέλεσμα να εμφανιστεί μια ενεργειακή στάθμη στην κβαντική κουκκίδα, η οποία έχει ίδια ενέργεια με αυτή των προσπυπτόνων ηλεκτρονίων. Σε αυτόν τον «συντονισμό» των ενεργειών οφείλει το όνομα της η διάταξη.

Ενότητα Σ3.6

Τρανζίστορ συντονισμένου φαινομένου σήραγγας

Σε αυτή τη διάταξη συντονισμένου φαινομένου σήραγγας, έχει προστεθεί ένα ηλεκτρόδιο πύλης επάνω από την κβαντική κουκκίδα. Αυτό το ηλεκτρόδιο μετατρέπει τη διάταξη σε τρανζίστορ συντονισμένου φαινομένου σήραγγας. Δεν συμβαίνει συντονισμός. Η εφαρμογή μιας μικρής τάσης στο ηλεκτρόδιο πύλης επαναφέρει τον συντονισμό.



Ενότητα Σ3.6

Απλός αρμονικός ταλαντωτής (1)

Σύμφωνα με την κλασική φυσική, ένα σωματίδιο το οποίο δέχεται μια γραμμική δύναμη επαναφοράς $F = -kx$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$. Η ενέργεια E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, συμπεριλαμβανομένης της $E = 0$.

Ενότητα Σ3.7

Απλός αρμονικός ταλαντωτής (2)

Μπορούμε να μελετήσουμε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή από τη σκοπιά της κβαντομηχανικής. Η εξίσωση του Schrödinger γι' αυτό το πρόβλημα είναι: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi$. Η λύση αυτής της εξίσωσης δίνει την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης: $\psi = Be^{-\frac{1}{2}(\mu\omega/2\hbar)x^2}$.

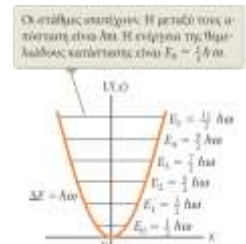
Ενότητα Σ3.7

Απλός αρμονικός ταλαντωτής (3)

Όλες οι υπόλοιπες λύσεις που περιγράφουν τις διεγερμένες καταστάσεις περιλαμβάνουν τον εκθετικό παράγοντα e^{-Cx^2} . Οι ενεργειακές στάθμες του αρμονικού ταλαντωτή είναι κβαντισμένες. Η ενέργεια μιας κατάστασης με κβαντικό αριθμό n είναι $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$

Διάγραμμα ενεργειακών σταθμών – Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Οι αποστάσεις μεταξύ των γειτονικών σταθμών είναι ίσες και δίνονται από τη σχέση $\Delta E = \hbar\omega$. Οι ενεργειακές στάθμες ισαπέχουν. Η κατάσταση $n = 0$ αντιστοιχεί στη θεμελιώδη κατάσταση. Η ενέργεια της είναι $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Συμφωνεί με τις αρχικές εξισώσεις του Planck.



Ενότητα Σ3.7

Τέλος

Κβαντική μηχανική

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Βαρουτάς Δημήτρης. «Ηλεκτρομαγνητισμός - Οπτική - Σύγχρονη Φυσική. Σύγχρονη Φυσική». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI121/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

