ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3η ΑΣΚΗΣΗ

Υλοποίηση του αλγορίθμου της μεθόδου ESOR - Εφαρμογές

Δίνεται το ακόλουθο *τριδιαγώνιο* $n \times n$ γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & 0 & \\ & a_3 & b_3 & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

3.1 Να δοθούν οι τύποι της επαναληπτικής μεθόδου **ESOR** υπό μορφή συνιστωσών για την αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος (1), λαμβάνοντας υπόψη την *ειδική δομή* του πίνακα.

3.2 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C (ή C++) τη μέθοδο **ESOR** (που έχετε ήδη αναπτύξει στο 3.1) για την επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος για $\tau^{\Pi} = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.9$ και $\omega^{\Pi} = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.9$. Λάβετε ως αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x^{(0)}} = \mathbf{d}$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = \mathbf{\frac{1}{2}10^{-6}}$.

Το πρόγραμμά σας πρέπει να δίνει στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

(i) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα,

(ii) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο τριδιαγωνιο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια μιας συνάρτησης (function)),

⋆ **(iii)** να δημιουργεί γραφική παράσταση του πλήθους $itcount$ των επαναλήψεων της μεθόδου **ESOR** συναρτήσει των ανωτέρω τιμών των παραμέτρων τ^{Π} και ω^{Π}.

⋆ **3.3** Από τη θεωρία σύγκλισης της μεθόδου ESOR είναι γνωστό ότι οι βέλτιστες τιμές ${\tau_o}^{\Theta}, {\omega_o}^{\Theta}$ των παραμέτρων τ και ω, αντίστοιχα δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

- αν $\underline{\mu}^2 > 1 - \sqrt{1 - \overline{\mu}^2}$ τότε $\quad {\omega_o}^{\Theta} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \overline{\mu}^2}}, \quad {\tau_o}^{\Theta} = \dfrac{2 - \omega_o \underline{\mu}^2}{\sqrt{1 - \underline{\mu}^2}}$
- αν $\underline{\mu} = 0$ τότε $\quad {\tau_o}^{\Theta} = {\omega_o}^{\Theta} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \overline{\mu}^2}}$

όπου

$$\underline{\mu} = \min_{1 \le i \le n} |\mu_i| \quad \text{και} \quad \overline{\mu} = \max_{1 \le i \le n} |\mu_i|$$

και $\mu_i, i = 1, 2, \ldots, n$ οι ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα $\mathcal{B}$ της μεθόδου του Jacobi.

Υλοποίηση - Πειραματική μελέτη

1. Για την πειραματική επαλήθευση της ορθότητας του αλγορίθμου σας για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (1) θεωρήστε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι γνωστό (ως προσχεδιασμένη λύση), υπολογίστε το $\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ και στη συνέχεια επιλύστε το γραμμικό σύστημα. Για παράδειγμα, αν $\mathbf{x} = (1, 1, \cdots, 1)^T$, τότε $d_i = a_i + b_i + c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ (όπου $a_1 = c_n = 0$).

2. Για την πειραματική μελέτη σύγκλισης της ανωτέρω επαναληπτικής μεθόδου αφού θεωρήσετε ότι $\tau^{\Pi} = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.9,\ \ \omega^{\Pi} = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.9$ και $(a_i = -\alpha,\ i = 2, 3, \ldots, n),\ \ (b_i = 4,\ i = 1, 2, \ldots, n),\ \ (c_i = -\alpha,\ i = 1(1)n-1))$, όπου $\alpha = 0.1,\ 0.5,\ 1$ και $n = 10^2,\ n = 10^3$. Στη συνέχεια για ένα στιγμιότυπο των δεδομένων εισόδου

α) να δοθεί η γραφική παράσταση του πλήθους $itcount$ των επαναλήψεων της μεθόδου **ESOR** συναρτήσει των ανωτέρω τιμών των παραμέτρων τ^{Π} και ω^{Π} και στη συνέχεια να υπολογιστούν

β) οι πειραματικές βέλτιστες τιμές ${\tau_o}^{\Pi}$ και ${\omega_o}^{\Pi}$ των αντιστοίχων παραμέτρων τ^{Π} και ω^{Π} με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων,

γ) το πλήθος των επαναλήψεων ($itcount^{\Pi}$) (για $\tau = {\tau_o}^{\Pi}$ και $\omega = {\omega_o}^{\Pi}$).

⋆ **3.** Οι ποσότητες $\underline{\mu}$ και $\overline{\mu}$ στο ερώτημα ⋆ 3.3 να υπολογιστούν με την **υλοποίηση** σε γλώσσα C (ή C++) της μεθόδου των δυνάμεων. Στη συνέχεια να υπολογίζονται

α) οι θεωρητικές βέλτιστες τιμές ${\tau_o}^{\Theta}$ και ${\omega_o}^{\Theta}$ των αντιστοίχων παραμέτρων τ και ω με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων και

γ) το πλήθος των επαναλήψεων ($itcount^{\Theta}$) (για $\tau = {\tau_o}^{\Theta}$ και $\omega = {\omega_o}^{\Theta}$).

4. Να γίνει κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας (βλ. όπως παρακάτω πίνακα) και να σχολιάσετε τα συμπεράσματά σας σε σχέση με τη θεωρία.

Πίνακας Αποτελεσμάτων **(Εφαρμογή 3)**

Επίλυση του $\mathrm{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ (μέθοδος ESOR)									
Διάσταση του A n	**Παράμετρος** α	**Ιδιοτιμές του** B $\underline{\mu}$	$\overline{\mu}$	**Πειραματικές βέλτιστες τιμές** ${\tau_o}^{\Pi}$	${\omega_o}^{\Pi}$	**Πλήθος επαναλήψεων** $itcount^{\Pi}$	⋆ **Θεωρητικές βέλτιστες τιμές** ${\tau_o}^{\Theta}$	${\omega_o}^{\Theta}$	⋆ **Πλήθος επαναλήψεων** $itcount^{\Theta}$
$n = 10^2$	0.1								
	0.5								
	1								
$n = 10^3$	0.1								
	0.5								
	1								

(Ενδεικτικές) Εφαρμογές

Επίλυση ενός ***τριδιαγώνιου*** γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

Εφαρμογή 1 $n = 5$,

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -11 \\ 3 \\ -15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γρ. συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{d} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$.

Εφαρμογή 2 $n = 10, \quad \alpha = 0.1,$

$$\begin{bmatrix} 4 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 4 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 4 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 4 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 4 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 4 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 4 & -0.1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 4 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 4 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & -0.1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9 \\ 3.8 \\ 3.8 \\ 3.8 \\ 3.8 \\ 3.8 \\ 3.8 \\ 3.8 \\ 3.87 \\ 3.9 \end{bmatrix}$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{d} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$.

Εφαρμογή 3 (*Γενίκευση της εφαρμογής 2*) Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι $n \times n$ *τριδιαγώνιος*, όπου $n = 10^2$ (ή $n = 10^3$) με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} 4, & \text{αν} \quad i = j \\ -\alpha, & \text{αν} \quad |i - j| = 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{d} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$.