ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

2η ΑΣΚΗΣΗ

2.1 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1} = 9 + 5\sqrt{x_n}$, $n = 0,1,2,\ldots$ η οποία συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [9,\ 49]$. Να βρεθεί το θεωρητικό κάτω φράγμα του αριθμού n των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη προσέγγιση του σταθερού σημείου στο $[a,b]=[9,49]$, με $x_0 = 49$ και επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$, έτσι ώστε $\frac{L^n}{1-L}\,|\,x_1 - x_0\,| \le \varepsilon$, όπου $L = \max\limits_{a\le x\le b} |\,g'(x)\,|$.

2.2 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x(1-x)$, η οποία έχει τα σταθερά σημεία $\xi = 0$ και $\xi = 1/2$.

α) Να αιτιολογηθεί γιατί η μέθοδος του σταθερού σημείου δεν θα συγκλίνει στο $\xi = 0$ με x_0 πλησίον του μηδενός;

β) Να αιτιολογηθεί γιατί η μέθοδος του σταθερού σημείου, θα συγκλίνει στο $\xi = 1/2$, με x_0 πλησίον του $1/2$; Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου;

2.3 **α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x+2)^3$, τότε αν υποθέσουμε ότι η μέθοδος **N-R** συγκλίνει στη ρίζα $\xi = -2$ της εξίσωσης $f(x)=0$ τότε να βρεθεί η τάξη σύγκλισής της. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Στη συνέχεια να επιλέξετε και να εφαρμόσετε την πλέον αποτελεσματική μορφή της μεθόδου **N-R (**με τετραγωνική τάξης σύγκλισης) για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = -2$ με $x_0 = -1$.

2.4 Δίνεται το γραμμικό σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Να υπολογιστεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση

α) η ορίζουσα του πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων και

β) η λύση του γραμμικού συστήματος**.**

2.5 Δίνεται το γραμμικό σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array}\right\}$$

α) Να βρεθεί θεωρητικά η βέλτιστη τιμή ω_{opt} της παραμέτρου ω για την SOR μέθοδο.

β) Να ληφθεί ως αρχικό διάνυσμα $\mathrm{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$, $\omega = \omega_{opt}$ και να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την SOR μέθοδο**.**