

**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

**1<sup>η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

**1.1** Έστω  $\beta$  η βάση ενός αριθμητικού συστήματος,  $n$  το πλήθος των ψηφίων που μπορούν να αποθηκευθούν στο κλασματικό τμήμα (mantissa) και  $e$  ο εκθέτης (όπου  $m \leq e \leq M$ ) για την παράσταση ενός αριθμού με κινητή υποδιαστολή.

**α)** Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των αριθμών μηχανής είναι:  $1 + 2(\beta - 1)\beta^{n-1}(M - m + 1)$ .

**β)** Αν  $\beta = 2$ ,  $n = 52$  και  $[m, M] = [-1023, 1023]$  τότε να βρεθούν :

**(i)** η μονάδα σφάλματος στρογγύλευσης,

**(ii)** το πλήθος των αριθμών μηχανής

**(iii)** ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος θετικός κανονικοποιημένος αριθμός κινητής υποδιαστολής και

**(iv)** σε ποιά διαστήματα συμβαίνει **υποχείλιση (underflow)** και σε ποιά **υπερχείλιση (overflow)**;

**1.2** Να εκτελεστούν οι ακόλουθοι υπολογισμοί

**α)**  $795.0 - 0.079585$

**β)**  $0.0789 \times 788.0$

**γ)**  $(995.0 - 0.357) + (697.0 - 0.768)$

**δ)**  $(-0.357 - 0.768) + (697.0 + 995.0)$

**(i)** με ακρίβεια, **(ii)** χρησιμοποιώντας αποκοπή τριών σημαντικών ψηφίων και **(iii)** χρησιμοποιώντας στρογγύλευση τριών σημαντικών ψηφίων. Στη συνέχεια, με απλή σύγκριση των αποτελεσμάτων να βρεθεί οποιαδήποτε απώλεια σημαντικών ψηφίων, υποθέτοντας ότι οι δεδομένοι αριθμοί είναι ακριβείς. Να δικαιολογηθούν τα αποτελέσματα των α), β), γ) και δ) με βάση τη θεωρία.

**1.3** Δίνονται οι αριθμοί  $\bar{x}_1 = 75.96$ ,  $\bar{x}_2 = 7.679$ ,  $\bar{x}_3 = 0.7985$  με ακρίβεια τεσσάρων σημαντικών ψηφίων. Να υπολογιστεί

**α)** Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της ποσότητας  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3$ .

**β)** Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της ποσότητας  $\bar{x}_1 / (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$ .

**γ)** Τι συμπεράσματα εξάγετε σχετικά με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα α) και β);

**1.4** Έστω δύο σημεία  $(x_0, y_0)$  και  $(x_1, y_1)$  μιας ευθείας γραμμής. Δίνονται οι ακόλουθοι δύο τύποι για την εύρεση της τετμημένης  $x$  του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα  $x'$  :

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{και} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$$

**α)** Να δειχθεί ότι οι δύο τύποι είναι αλγεβρικά σωστοί.

**β)** Χρησιμοποιώντας τα σημεία  $(x_0, y_0) = (3.96, 0.653)$ ,  $(x_1, y_1) = (2.75, 0.25)$  και

στρογγύλευση τριών σημαντικών ψηφίων, να υπολογιστεί η τετμημένη  $x$  και με τους δύο τύπους. Ποιος από τους δύο ανωτέρω τύπους είναι ο καλύτερος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με βάση τη θεωρία.

**1.5** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 19x + 2$ .

**α)** Να αποδειχθεί ότι η  $f$  έχει μια μοναδική ρίζα  $\xi$  στο  $[0, 1]$ .

**β)** Να εφαρμόσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Εσφαλμένης Θέσης για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής  $x_2$  της ρίζας  $\xi$  της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**γ)** Να μετασχηματίσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$  σε μια αντίστοιχη μορφή σταθερού σημείου, η οποία να συγκλίνει καθολικά. Στη συνέχεια να εκτελέσετε για  $x_0 = 1$  δύο επαναλήψεις της μεθόδου σταθερού σημείου.

Για τους υπολογισμούς σας στα β) και γ) χρησιμοποιήστε ακρίβεια με έξι σημαντικά ψηφία.