



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Αριθμητική Ανάλυση

## Ενότητα 7

### Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

N. M. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,

## Κεφ.5. Αριθμητικός Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων

Δίνεται ένας πίνακας  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και ζητούνται να προσδιορισθούν οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$ ,  $i = 1(1)n$  και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x}^{(i)}$ ,  $i = 1(1)n$  του πίνακα  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

### Θεωρητικός προσδιορισμός των Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων

- Επίλυση της πολυωνυμικής εξίσωσης (εύρεση ιδιοτιμών)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \underbrace{(-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n}_{p(\lambda)} = 0 \quad (1)$$

- Επίλυση του ομογενούς γραμμικού συστήματος (εύρεση ιδιοδιανυσμάτων)

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

## Μηχανή Αναζήτησης: Ιδιοτιμές και Γραφήματα

- Η μηχανή αναζήτησης Google χρησιμοποιεί την ακόλουθη μέθοδο για την αναζήτηση ενός ιστοτόπου. Δημιουργεί τον *πίνακα γεινίασης*  $A$  με στοιχεία, τα οποία είτε είναι 0 ή 1, με  $a_{ij} = 1$  αν ο ιστοτόπος  $i$  συνδέεται με τον ιστοτόπο  $j$ , διαφορετικά  $a_{ij} = 0$ .
- Για παράδειγμα, μια εταιρεία με επτά υπαλλήλους επιθυμεί την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη χρήση των ιστοτόπων. Κάθε υπάλληλος έχει ένα ιστοτόπο και κάποιοι υπάλληλοι έχουν συνδέσμους σε ιστοτόπους συναδέλφων τους. Ο *πίνακας γεινίασης* είναι ο ακόλουθος

|       | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $Y_5$ | $Y_6$ | $Y_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Y_1$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| $Y_2$ | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| $Y_3$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| $Y_4$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $Y_5$ | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $Y_6$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| $Y_7$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     |

όπου με  $Y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 7$  συμβολίζεται ο κάθε υπάλληλος.

|       | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $Y_5$ | $Y_6$ | $Y_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Y_1$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| $Y_2$ | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| $Y_3$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| $Y_4$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $Y_5$ | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $Y_6$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| $Y_7$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     |

- Παρατηρώντας τη γραμμή  $Y_3$  διαπιστώνουμε ότι ο ισότοπος του υπαλλήλου  $Y_3$  συνδέεται με τους ιστοτόπους των συναδέλφων του  $Y_2$ ,  $Y_4$  και  $Y_6$ .
- Για την κατάταξη των ιστοτόπων ανάλογα με την συχνότητα αναφοράς τους απαιτείται ο υπολογισμός της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος.
- Για τον ανωτέρω πίνακα το ιδιοδιάνυσμα αυτό είναι το  $z = [0.4261, 0.4746, 0.2137, 0.3596, 0.4416, 0.4214, 0.2137]^T$ . Αν η  $k$ -ισοστή συνιστώσα είναι η μεγαλύτερη, τότε ο  $k$ -ισοστός ιστοτόπος θεωρείται και ο πλέον σημαντικός, δηλαδή έχει τον υψηλότερο βαθμό.

- Οι υπόλοιποι ισότοποι κατατάσσονται ανάλογα με το μέγεθος της αντίστοιχης συνιστώσας του ιδιοδιάνυσματος. Για το ανωτέρω ιδιοδιάνυσμα έχουμε  $\max_{1 \leq i \leq 7} z_i = 0.4746$ , συνεπώς ο υπάλληλος  $Y_2$  έχει ισότοπο με το μεγαλύτερο βαθμό, ακολουθεί ο ισότοπος του  $Y_5$  και μετά αυτός του  $Y_1$ .
- Παρατηρήστε ότι αν και ο ισότοπος του  $Y_1$  έχει τις περισσότερες αναφορές από τον ισότοπο του  $Y_2$  ή του  $Y_5$  εν τούτοις θεωρείται μικρότερου βαθμού.
- Η μέθοδος της κατάταξης ενός ισότοπου βασίζεται στο βαθμό του ισότοπου, ο οποίος είναι υψηλότερος όσο υπάρχουν ισότοποι με μεγαλύτερο βαθμό που είναι συνδεδεμένοι με αυτόν.
- Η παραδοχή που έχουμε κάνει εδώ είναι ότι το ιδιοδιάνυσμα έχει θετικές συνιστώσες κάτι που συμβαίνει σε μεγάλες κατηγορίες προβλημάτων.

## Η μέθοδος των δυνάμεων

- Η μέθοδος αυτή υπολογίζει τη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.
- Έστω ότι ο πίνακας  $A$  έχει τις  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα  $x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Έστω ότι ο  $A$  έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και συνεπώς αποτελούν μια βάση.
- Επιπλέον υποθέτουμε ότι

$$|\lambda_1| > |\lambda_j|, \quad j = 2, 3, \dots, n. \quad (3)$$

- Αν  $y^{(0)} \neq 0$  ένα διάνυσμα του  $\mathbb{C}^n$ , τότε επειδή τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  αποτελούν μία βάση, το  $y^{(0)}$  μπορεί να γραφεί ως εξής

$$y^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{(i)} \quad (4)$$

όπου  $\alpha_i$  είναι βαθμωτά μεγέθη και όχι όλα μηδέν.

## ...Η μέθοδος των δυνάμεων...

- Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζονται από το επαναληπτικό σχήμα

$$y^{(m+1)} = Ay^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

όπου το  $y^{(0)}$  είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα.

- Από την (5) για  $m = 0$  έχουμε

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = A \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ax^{(i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i x^{(i)}$$

- για  $m = 1$  έχουμε

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^2 x^{(i)}.$$

## ...Η μέθοδος των δυνάμεων...

Γενικά

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^m x^{(i)}, \quad (6)$$

η οποία γράφεται

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= \lambda_1^m \left[ \alpha_1 x^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m x^{(i)} \right] \\ &= \lambda_1^m [\alpha_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(m)}], \end{aligned} \quad (7)$$

όπου

$$\varepsilon^{(m)} = \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m x^{(i)}.$$



## Προσδιορισμός της ιδιοτιμής $\lambda_1$

- Επειδή όμως  $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , από την (7) προκύπτει ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m \alpha_1 x^{(1)} \quad (8)$$

υποθέτοντας βέβαια ότι  $\alpha_1 \neq 0$ .

- Αν όπου  $m$  θέσουμε  $m - 1$  στην (8) έχουμε

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m-1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^{m-1} \alpha_1 x^{(1)}. \quad (9)$$

- Διαιρώντας τις αντίστοιχες συνιστώσες των  $y^{(m)}$  και  $y^{(m-1)}$  λαμβάνουμε από τις (8) και (9) ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_j^{(m)}}{y_j^{(m-1)}} = \lambda_1 \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

## Προσδιορισμός του ιδιοδιανύσματος $\mathbf{x}^{(1)}$

Έχοντας υπολογίσει την  $\lambda_1$  από την (8) προκύπτει ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y^{(m)}}{\lambda_1^m} = \alpha_1 \mathbf{x}^{(1)}, \quad (11)$$

δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην  $\lambda_1$  τη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή.

Με άλλα λόγια δημιουργούμε την ακολουθία των διανυσμάτων  $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  μέχρις ότου οι λόγοι των αντίστοιχων συνιστωσών δύο διαδοχικών διανυσμάτων τείνουν προς την ίδια σταθερή τιμή, η οποία είναι μία προσέγγιση της ιδιοτιμής  $\lambda_1$  (βλ.(10)). Το διάνυσμα  $y^{(m)}$  είναι μία μη κανονικοποιημένη προσέγγιση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος.

## Η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου των δυνάμεων

- Εξαρτάται από τις σταθερές  $\alpha_i$  και τους λόγους  $|\lambda_2/\lambda_1|, |\lambda_3/\lambda_1|, \dots, |\lambda_n/\lambda_1|$  (βλ.(7)).  
Έτσι όσο μικρότεροι είναι αυτοί οι λόγοι τόσο ταχύτερη είναι η σύγκλιση της μεθόδου.
- Ιδιαίτερα αν  $|\lambda_2| / |\lambda_1|$  είναι κοντά στη μονάδα, τότε η σύγκλιση της μεθόδου είναι πιθανό να είναι πάρα πολύ αργή.
- Θεωρητικά, αν τύχει και η εκλογή του  $y^{(0)}$  είναι τέτοια ώστε  $\alpha_1 = 0$  και  $|\lambda_2| > |\lambda_j|, j \geq 3$ , τότε η μέθοδος θα συγκλίνει στην  $\lambda_2$  και σε ένα πολλαπλάσιο του  $x^{(2)}$ .
- Στην πράξη όμως δεν έχουμε δυσκολίες αν  $\alpha_1 = 0$ , γιατί τα σφάλματα στρογγύλευσης δημιουργούν μία μικρή ( που με την αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων μεγαλώνει) τιμή του  $\alpha_1$  αρκετά ικανοποιητική, ώστε να έχουμε σύγκλιση τελικά στην  $\lambda_1$ .

## Παρατήρηση

- Για  $|\lambda_1| > 1$  τότε από την (8) έχουμε ότι  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_j^{(m)} = \pm\infty, j = 1, 2, \dots, n,$   
ενώ για  $|\lambda_1| < 1,$   $\lim_{m \rightarrow \infty} y_j^{(m)} = 0.$
- Έτσι εκτός αν  $|\lambda_1| \simeq 1$  θα πρέπει να εκτελούμε πράξεις με απόλυτα πάρα πολύ μεγάλους ή πάρα πολύ μικρούς αριθμούς, πράγμα που σημαίνει αύξηση των σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς.
- Το πρόβλημα αυτό αποφεύγεται με μία τροποποίηση της μεθόδου των δυνάμεων.

## Τροποποίηση της μεθόδου των δυνάμεων

Συνίσταται από τα ακόλουθα τρία διαδοχικά βήματα σε κάθε επανάληψη όπου ουσιαστικά κανονικοποιείται το  $y^{(m)}$

$$\begin{aligned}y_{j_m}^{(m)} &= \max_j |y_j^{(m)}| = \|y^{(m)}\|_{\infty}, \\z^{(m)} &= \frac{1}{y_{j_m}^{(m)}} y^{(m)} \\y^{(m+1)} &= Az^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{12}$$

Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, η αντίστοιχη έκφραση της  $y^{(m)}$  θα δίνεται από τη σχέση

$$y^{(m)} = \frac{1}{y_{j_0}^{(0)} y_{j_1}^{(1)} \cdots y_{j_{m-1}}^{(m-1)}} \lambda_1^m \left[ \alpha_1 x^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m x^{(i)} \right].\tag{13}$$

## ...Τροποποίηση της μεθόδου των δυνάμεων

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} z^{(m-1)} &= \frac{1}{y_{jm-1}^{(m-1)}} y^{(m-1)} \\ &= \frac{1}{y_{jm-1}^{(m-1)}} \left[ \frac{1}{y_{j_0}^{(0)} y_{j_1}^{(1)} \cdots y_{j_{m-2}}^{(m-2)}} \lambda_1^{m-1} \left( \alpha_1 x^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{m-1} x^{(i)} \right) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Από τις (13) και (14) έχουμε

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{jm-1}^{(m)}}{z_{jm-1}^{(m-1)}} = \lambda_1$$

αλλά  $z_{jm-1}^{(m-1)} = 1$  (το  $z^{(m-1)}$  είναι κανονικοποιημένο) και η ανωτέρω σχέση γράφεται

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_{jm-1}^{(m)} = \lambda_1. \quad (15)$$

## ...Τροποποίηση της μεθόδου των δυνάμεων

- Η ακολουθία λοιπόν που δημιουργείται από τις συνιστώσες  $j_{m-1}$  του διανύσματος  $y^{(m)}$  τείνει στη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή. Υπενθυμίζεται ότι η συνιστώσα  $j_{m-1}$  του διανύσματος  $y^{(m)}$  είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη κατά μέτρο απόλυτη τιμή συνιστώσα του προηγούμενου διανύσματος  $y^{(m-1)}$ .
- Για την εύρεση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος  $x^{(1)}$  παρατηρούμε ότι, αν ο δείκτης  $j_m$  από μία ορισμένη τιμή του  $m$  και μετά παραμένει σταθερός, τότε είναι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z^{(m)} = cx^{(1)} \quad (16)$$

όπου  $c$  σταθερά τέτοια ώστε η μεγαλύτερη κατά μέτρο συνιστώσα του  $cx^{(1)}$  να είναι μονάδα.

- Άρα η ακολουθία των διανυσμάτων  $z^{(m)}$  συγκλίνει προς το κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην  $\lambda_1$ .

## Ταχύτητα Σύγκλισης της τροποποιημένης μεθόδου των δυνάμεων

- Η ταχύτητα σύγκλισης της ακολουθίας  $\left\{ y_{j_{m-1}}^{(m)} \right\}_{m=1}^{\infty}$  προς την  $\lambda_1$  προσδιορίζεται, όπως αναφέρθηκε, από τους λόγους  $|\lambda_j/\lambda_1|^m$  για  $j = 2, 3, \dots, n$  και ιδιαίτερα από τον λόγο  $|\lambda_2/\lambda_1|^m$ . Με άλλα λόγια η τάξη σύγκλισης είναι  $O((\lambda_2/\lambda_1)^m)$ .
- Επομένως για μεγάλα  $m$  έχουμε

$$\left| y_{j_{m-1}}^{(m)} - \lambda_1 \right| \simeq k \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^m,$$

όπου  $k$  σταθερά, πράγμα που σημαίνει ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left| y_{j_m}^{(m+1)} - \lambda_1 \right|}{\left| y_{j_{m-1}}^{(m)} - \lambda_1 \right|} \simeq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$$

ή

$$\varepsilon^{(m+1)} \simeq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| \varepsilon^{(m)},$$

όπου  $\varepsilon^{(m)} = \left| y_{j_{m-1}}^{(m)} - \lambda_1 \right|$ , δηλαδή η ταχύτητα σύγκλισης είναι γραμμική.



## Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ 10 & -2 & -9 \end{bmatrix}$ .

με ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -12$ ,  $\lambda_2 = -3$  και  $\lambda_3 = 3$ . Να εκτελεστούν τρεις επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων για τον υπολογισμό της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής και του αντιστοίχου ιδιοδιανύσματος του πίνακα  $A$ . Λάβετε σαν αρχικό διάνυσμα το  $y^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ .

## Λύση

Για  $m = 0$  η (12) δίνει διαδοχικά

$$y_{j_0}^{(0)} = \|y^{(0)}\|_{\infty} = \max\{|1|, |0|, |0|\} = 1, \text{ άρα } j_0 = 1$$

$$z^{(0)} = \frac{1}{y_1^{(0)}} y^{(0)} = \frac{1}{1} [1, 0, 0]^T$$

συνεπώς

$$y^{(1)} = Az^{(0)} = [-2, -10, 10]^T.$$

Η πρώτη προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής  $\lambda$  είναι

$$\lambda_1 = y_{j_0}^{(1)} = y_1^{(1)} = -2.$$

## ...Λύση

Για  $m = 1$  η (12) δίνει

$$y_{j_1}^{(1)} = \|y^{(1)}\|_\infty = \max\{|-2|, |-10|, |10|\} = 10, \text{ άρα } j_1 = 2$$

και

$$z^{(1)} = \frac{1}{y_2^{(1)}} y^{(1)} = [1/5, 1, -1]^T.$$

Επιπλέον

$$y^{(2)} = Az^{(1)} = [-27/5, -9, 9]^T$$

και η δεύτερη προσέγγιση της  $\lambda$  είναι

$$\lambda_2 = y_2^{(2)} = -9$$

## ...Λύση

Για  $m = 2$  η (12) δίνει

$$y_2^{(2)} = \|y^{(2)}\|_\infty = \max\{|-27/5|, |-9|, |9|\} = 9, \text{ άρα } j_2 = 2$$

και

$$z^{(2)} = \frac{1}{y_2^{(2)}} y^{(2)} = [3/5, 1, -1]^T.$$

Οπότε

$$y^{(3)} = Az^{(2)} = [-31/5, -13, 13]^T$$

και η τρίτη προσέγγιση της  $\lambda$  είναι

$$\lambda_3 = y_2^{(3)} = -13.$$

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το

$$z^{(3)} = \frac{1}{y_2^{(3)}} y^{(3)} = [31/65, 1, -1]^T.$$

## Ο αλγόριθμος της μεθόδου των δυνάμεων

Σαν αρχικό διάνυσμα  $y^{(0)}$  λαμβάνουμε συνήθως το  $y^{(0)} = [1, 1, \dots, 1]^T$ .

1 Διάβασε τη διάσταση  $n$  του πίνακα  $A$ , τα στοιχεία  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , το αρχικό διάνυσμα  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , την ανεκτικότητα  $\varepsilon$  και το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων  $M$ .

2 Να τεθεί

$$m = 0$$

$$\lambda_0 = 0$$

3 Να βρεθεί ένας ακέραιος  $p$  τέτοιος ώστε

$$|y_p| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$$

4 Για  $i = 1, 2, \dots, n$  να υπολογιστεί

$$z_i = \frac{1}{y_p} y_i$$

## ...Ο αλγόριθμος της μεθόδου των δυνάμεων

5 Όσο ισχύει  $m \leq M$  να εκτελούνται τα βήματα 5.1-5.7

5.1 Για  $i = 1, 2, \dots, n$  να τεθεί

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j$$

5.2 Να τεθεί

$$\lambda_1 = y_p$$

5.3 Αν  $y_p = 0$  τότε τύπωσε "Ο  $A$  έχει ιδιοτιμή 0, επέλεξε νέο αρχικό διάνυσμα και άρχισε πάλι τη διαδικασία". Τέλος.

5.4 Να βρεθεί ένας ακέραιος  $p$  τέτοιος ώστε

$$|y_p| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$$

5.5 Για  $i = 1, 2, \dots, n$  να υπολογισθεί

$$z_i = \frac{1}{y_p} y_i$$

...Ο αλγόριθμος της μεθόδου των δυνάμεων

5.6 Αν

$$|\lambda_0 - \lambda_1| < \varepsilon$$

τότε τύπωσε  $(\lambda_1, z)$ . Τέλος.

5.7 Να τεθεί

$$m = m + 1$$

$$\lambda_0 = \lambda_1$$

6 Τύπωσε “Όχι σύγκλιση μετά από  $M$  επαναλήψεις”. Τέλος.

## Υπολογισμός της μικρότερης κατά μέτρο ιδιοτιμής

Αν

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \dots \leq |\lambda_1|$$

τότε ο υπολογισμός της μικρότερης κατά μέτρο ιδιοτιμής  $\lambda_n$  γίνεται ως εξής :

Επειδή  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$  και  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$  και  $\frac{1}{|\lambda_n|} > \frac{1}{|\lambda_i|}$

εφαρμόζεται η μέθοδος των δυνάμεων

$$\mathbf{y}^{(m+1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}^{(m)}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$$

ή

$$\mathbf{Ay}^{(m+1)} = \mathbf{y}^{(m)}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$$

δηλ. η επίλυση των γραμμικών συστημάτων

$$\mathbf{Ay}^{(1)} = \mathbf{y}^{(0)}, \quad \mathbf{Ay}^{(2)} = \mathbf{y}^{(1)}, \quad \mathbf{Ay}^{(3)} = \mathbf{y}^{(2)}, \dots$$



## Τεχνικές επιτάχυνσης της μεθόδου των δυνάμεων

### Επιτάχυνση της σύγκλισης - Η μέθοδος του Aitken

Αν η σύγκλιση μιας επαναληπτικής μεθόδου είναι γραμμική, τότε μπορεί να επιταχυνθεί με τη χρήση της μεθόδου του Aitken, η οποία έχει τον ακόλουθο τύπο

$$x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (17)$$

όπου  $\Delta$  είναι ο τελεστής των προς τα εμπρός διαφορών και ορίζεται σαν  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$  με  $\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$ .

Επομένως είναι δυνατόν να τροποποιηθεί ο αλγόριθμος της μεθόδου των δυνάμεων έτσι ώστε να παράγεται η ακολουθία

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - \frac{(\Delta \lambda_1)^2}{\Delta^2 \lambda_1}. \quad (18)$$

## Η μέθοδος των ηηλίκων του Rayleigh

Αν ο πίνακας  $A$  είναι πραγματικός και συμμετρικός, τότε είναι δυνατόν να επιταχυνθεί η σύγκλιση προς τη μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή με τη χρήση της μεθόδου των ηηλίκων του Rayleigh.

**Ορισμός.** Για κάθε διάνυσμα  $x \neq 0$  η ποσότητα

$$\frac{(x, Ax)}{(x, x)}$$

καλείται ηηλίκo του Rayleigh που αντιστοιχεί στο  $x$ .

Ένα βασικό αποτέλεσμα που δείχνει τη σπουδαιότητα των πηλίκων του Rayleigh είναι το ακόλουθο

### Θεώρημα

Αν ο  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι συμμετρικός και  $x \neq 0$  είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα, τότε

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{(x, Ax)}{(x, x)} = \frac{(x^{(1)}, Ax^{(1)})}{(x^{(1)}, x^{(1)})}$$

και

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{(x, Ax)}{(x, x)} = \frac{(x^{(n)}, Ax^{(n)})}{(x^{(n)}, x^{(n)})} \quad (19)$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_n$  είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη ιδιοτιμή, αντίστοιχα και  $x^{(1)}, x^{(n)}$  ιδιοδιανύσματα του  $A$  που αντιστοιχούν στις  $\lambda_1$  και  $\lambda_n$ .

- Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός της  $\lambda_1$  είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Το ενδιαφέρον μας είναι η χρήση των πηλίκων του Rayleigh για την επιτάχυνση της σύγκλισης της μεθόδου των δυνάμεων.
- Έστω το βασικό επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου των δυνάμεων

$$y^{(m+1)} = Ay^{(m)}$$

τότε χρησιμοποιώντας την (6), προκύπτει

$$(y^{(m)}, y^{(m+1)}) = (y^{(m)}, Ay^{(m)}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i^{2m+1} \quad (20)$$

καθόσον τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  είναι ορθογώνια, αφού ο  $A$  είναι συμμετρικός, δηλαδή

$$(x^{(i)}, x^{(j)}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

- Επίσης

$$(y^{(m)}, y^{(m)}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i^{2m}. \quad (21)$$

- Από τις (20) και (21) έχουμε

$$\frac{(y^{(m)}, Ay^{(m)})}{(y^{(m)}, y^{(m)})} = \lambda_1 + O((\lambda_i/\lambda_1)^{2m}) \quad (22)$$

η οποία συγκρινόμενη με την (7) δείχνει ότι το πηλίκο του Rayleigh που αντιστοιχεί στο  $y^{(m)}$  γενικά θα συγκλίνει ταχύτερα ( $O(\lambda_i/\lambda_1)^{2m}$ ) από τη μέθοδο των δυνάμεων ( $O(\lambda_i/\lambda_1)^m$ ).

- Για την κανονικοποίηση του ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιείται η ευκλείδεια norm, έτσι

$$z^{(m)} = \frac{1}{\|y^{(m)}\|_2} y^{(m)} = \frac{1}{(y^{(m)}, y^{(m)})^{1/2}} y^{(m)}. \quad (23)$$

- Επίσης, στην τροποποιημένη μέθοδο των δυνάμεων έχουμε

$$y^{(m+1)} = Az^{(m)} \quad (24)$$

οπότε το πρώτο μέλος της (22), λόγω των (23) και (24), γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} \frac{(y^{(m)}, Ay^{(m)})}{(y^{(m)}, y^{(m)})} &= \left( \frac{y^{(m)}}{(y^{(m)}, y^{(m)})^{1/2}}, \frac{Ay^{(m)}}{(y^{(m)}, y^{(m)})^{1/2}} \right) \\ &= (z^{(m)}, Az^{(m)}) = (z^{(m)}, y^{(m+1)}). \end{aligned} \quad (25)$$

Λόγω των (22) και (25) έχουμε τελικά ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z^{(m)}, y^{(m+1)}) = \lambda_1. \quad (26)$$

## Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις της μεθόδου των πηλίκων Rayleigh για τον υπολογισμό της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής του πίνακα  $A$ . Λάβετε ως αρχικό διάνυσμα το  $[1, 1, 1]^T$ .

## Λύση

1η επανάληψη  $y^{(0)} = [1, 1, 1]^T$  και έστω  $\lambda_0 = 0$ . Λόγω της (23) έχουμε

$$\|y^{(0)}\|_2 = \sqrt{(y^{(0)}, y^{(0)})} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

και

$$z^{(0)} = \frac{1}{\|y^{(0)}\|_2} y^{(0)} = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T.$$

Επίσης, από την (24)

$$y^{(1)} = Az^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

οπότε η (26) δίνει

$$\begin{aligned} \lambda_1 = (z^{(0)}, y^{(1)}) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$|\lambda_0 - \lambda_1| = \left| 0 - \frac{4}{3} \right| = 1.33.$$



## 2η επανάληψη

$$\|y^{(1)}\|_2 = \sqrt{\frac{4}{3} + 0 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{\|y^{(1)}\|_2} y^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{8}} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}} \right]^T = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T$$

$$y^{(2)} = Az^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda_2 = (z^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} + 0 \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$|\lambda_2 - \lambda_1| = |1.5 - 1.33| = 0.17.$$

## Ο αλγόριθμος της μεθόδου των πηλίκων του Rayleigh

1 Διάβασε την τάξη  $n$  του πίνακα  $A$ , τα στοιχεία  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , το αρχικό διάνυσμα  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , την ανεκτικότητα  $\varepsilon$  και το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων  $M$ .

2 Να τεθεί

$$k = 0$$

$$\lambda_0 = 0$$

3 Για  $i = 1, 2, \dots, n$  να υπολογιστεί η ποσότης (υλοποίηση της (23))

$$z_i = y_i / \|y\|_2$$

4 Όσο ισχύει  $k \leq M$  να εκτελούνται τα βήματα 4.1 - 4.6

4.1 Για  $i = 1, 2, \dots, n$  να υπολογισθεί ( $y = Az$ )

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j$$

4.2 Για  $i = 1, 2, \dots, n$  να υπολογισθεί  $\left( \lambda = (z, y) = \frac{(y, Az)}{(y, y)} \right)$

$$\lambda = \sum_{i=1}^n z_i y_i$$

4.3 Αν  $\|y\|_2 = 0$  τότε τύπωσε “Ο  $A$  έχει ιδιοτιμή  $0$ , επέλεξε νέο αρχικό διάνυσμα και άρχισε πάλι τη διαδικασία”. Τέλος.

4.4 Για  $i = 1, 2, \dots, n$  να υπολογισθεί η ποσότητα

$$z_i = y_i / \|y\|_2$$

4.5 Αν

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

τότε τύπωσε  $(\lambda, z)$ . Τέλος.

4.6 Να τεθεί

$$k = k + 1$$

$$\lambda_0 = \lambda$$

5 Τύπωσε “Όχι σύγκλιση μετά από  $M$  επαναλήψεις”. Τέλος.

## Μετατόπιση της αρχής των αξόνων

### Πρόταση

Οι πίνακες  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{A} - \mathbf{qI}$  έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα και αν  $\lambda_i$  είναι ιδιοτιμή του  $\mathbf{A}$  τότε η αντίστοιχη ιδιοτιμή του  $\mathbf{A} - \mathbf{qI}$  είναι η  $\lambda_i - \mathbf{q}$ .

### Απόδειξη

Αν  $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} = \lambda_i\mathbf{x}^{(i)}$  τότε

$$(\mathbf{A} - \mathbf{qI})\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{qI}\mathbf{x}^{(i)} = (\lambda_i - \mathbf{q})\mathbf{x}^{(i)}$$

Αφαιρώντας λοιπόν την ποσότητα  $\mathbf{q}$  από τα διαγώνια στοιχεία του  $\mathbf{A}$  έχει σαν αποτέλεσμα την αφαίρεση της  $\mathbf{q}$  από τις ιδιοτιμές.

### ...Μετατόπιση της αρχής των αξόνων

Υποθέτουμε ότι ο  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και ικανοποιούν τη σχέση

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n| \quad (27)$$

Αν αφαιρέσουμε την ποσότητα  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}$  με  $\mathbf{q} \in (|\lambda_n|, |\lambda_1|)$  από τα διαγώνια στοιχεία του  $\mathbf{A}$ , τότε ανεξάρτητα από την τιμή της  $\mathbf{q}$ , η μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή του  $\mathbf{A} - \mathbf{qI}$  θα είναι πάντα η  $\lambda_1 - \mathbf{q}$  ή η  $\lambda_n - \mathbf{q}$ .

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την  $\lambda_1$ . Οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{A} - \mathbf{qI}$  είναι οι  $\mu_i = \lambda_i - \mathbf{q}$ .

# Μετατόπιση της αρχής των αξόνων

## Ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου των δυνάμεων

Με τη χρήση του πίνακα  $\mathbf{A} - \mathbf{q}\mathbf{I}$  αντί του  $\mathbf{A}$ , εξαρτάται από την ποσότητα

$$\max_{i \neq 1} \left| \frac{\lambda_i - \mathbf{q}}{\lambda_1 - \mathbf{q}} \right| \quad (28)$$

- Όσο μικρότερη είναι η ανωτέρω ποσότητα, τόσο ταχύτερη η σύγκλιση της μεθόδου. Αρκεί δηλαδή να εκλέξουμε το  $\mathbf{q}$  τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα

$$\max_{i \neq 1} |\lambda_i - \mathbf{q}| \quad (29)$$

- Αποδεικνύεται ότι η ανωτέρω ποσότητα γίνεται ελάχιστη αν

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n).$$

- Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα σύγκλισης στην  $\lambda_n - \mathbf{q}$  επιταχύνεται αν επιλέξουμε

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{n-1})$$

## Παρατήρηση

Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τόσο την  $\lambda_1$  όσο και την  $\lambda_n$ , ωστόσο όμως χρειαζόμαστε κάποιες εκτιμήσεις των ιδιοτιμών  $\lambda_2$  και  $\lambda_n$  (ή των  $\lambda_1$  και  $\lambda_{n-1}$ ) πράγμα που απαιτεί επιπλέον υπολογισμούς στην πράξη και είναι ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου.

## Η αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Έχει το πλεονέκτημα να υπολογίζει μια οποιαδήποτε ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και να έχει γρήγορη ταχύτητα σύγκλισης.

## Λήμμα

Οι πίνακες  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{A}^{-1}$  έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα και αν  $\lambda_i$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathbf{A}$  τότε η αντίστοιχη ιδιοτιμή του  $\mathbf{A}^{-1}$  είναι η  $1/\lambda_i$ .

## Απόδειξη

Αν  $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} = \lambda_i\mathbf{x}^{(i)}$  τότε πολ/ζοντας από αριστερά με  $\mathbf{A}^{-1}$  έχουμε

$$\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}^{(i)}.$$



## Η αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Ας υποθέσουμε ότι ο  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Επίσης αν γνωρίζουμε κάποια ποσότητα  $q \in \mathbb{R}$  η οποία βρίσκεται πλησιέστερα στην απλή ιδιοτιμή  $\lambda_k$  του  $\mathbf{A}$  από οποιαδήποτε άλλη ιδιοτιμή του, τότε θα ισχύει

$$|\lambda_k - q| < |\lambda_i - q|, \quad i = 1(1)n, \quad i \neq k \quad (30)$$

Δηλαδή η ιδιοτιμή  $\lambda_k - q$  είναι η μικρότερη κατά απόλυτο τιμή ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{A} - q\mathbf{I}$ . Συνεπώς, αν αντί του  $\mathbf{A}$  χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα  $(\mathbf{A} - q\mathbf{I})^{-1}$  στο βασικό επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου των δυνάμεων, τότε είναι δυνατόν να υπολογισθεί η ποσότητα  $\frac{1}{\lambda_k - q}$  και από αυτήν η  $\lambda_k$ .

## Ο επαναληπτικός τύπος της αντίστροφης μεθόδου των δυνάμεων

Πράγματι, αν εφαρμοστεί η ε.μ.

$$(\mathbf{A} - q\mathbf{I})\mathbf{y}^{(m+1)} = \mathbf{y}^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

όπου  $\mathbf{y}^{(0)} \neq \mathbf{0}$  αυθαίρετο διάνυσμα είναι δυνατόν να υπολογισθεί η απόλυτα μεγαλύτερη ιδιοτιμή του  $(\mathbf{A} - q\mathbf{I})^{-1}$  δηλαδή η  $1/(\lambda_k - q)$  και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

## Ταχύτητα σύγκλισης

Εξαρτάται από την ποσότητα

$$\max_{i \neq k} \left| \frac{\lambda_k - \mathbf{q}}{\lambda_i - \mathbf{q}} \right| \quad (32)$$

αφού

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(m)} &= (\mathbf{A} - \mathbf{qI})^{-1} \mathbf{y}^{(m-1)} = (\mathbf{A} - \mathbf{qI})^{-m} \mathbf{y}^{(0)} \\ &= \frac{\alpha_1}{(\lambda_1 - \mathbf{q})^m} \mathbf{x}^{(1)} + \frac{\alpha_2}{(\lambda_2 - \mathbf{q})^m} \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(\lambda_n - \mathbf{q})^m} \mathbf{x}^{(n)} \\ &= \frac{1}{(\lambda_k - \mathbf{q})^m} \left[ \alpha_1 \left( \frac{\lambda_k - \mathbf{q}}{\lambda_1 - \mathbf{q}} \right)^m \mathbf{x}^{(1)} + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \alpha_n \left( \frac{\lambda_k - \mathbf{q}}{\lambda_n - \mathbf{q}} \right)^m \mathbf{x}^{(n)} \right] \end{aligned}$$

## Παρατηρήσεις

- Η επιλογή της  $\mathbf{q}$  καθορίζει και την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου.
- Όσο πλησιέστερα η  $\mathbf{q}$  είναι στην ιδιοτιμή  $\lambda_k$  τόσο ταχύτερη θα είναι και η σύγκλιση της μεθόδου. Επειδή η  $\mathbf{q}$  μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, μπορούμε να βρούμε μια προσέγγιση σε οποιαδήποτε ιδιοτιμή του  $\mathbf{A}$ . Ο προσδιορισμός των  $\mathbf{y}^{(m)}$  γίνεται από την επίλυση των συστημάτων

$$(\mathbf{A} - \mathbf{q}\mathbf{l})\mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{y}^{(m-1)}, \quad \mathbf{m} = 1, 2, \dots \quad (33)$$

- Στην πράξη τα διανύσματα κανονικοποιούνται, με άλλα λόγια, εφαρμόζεται η παραλλαγή της μεθόδου των δυνάμεων. Τα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν έχουν τον ίδιο πίνακα και διαφορετικά δεύτερα μέλη.
- Χρήση μιας άμεσης μεθόδου για την επίλυση τους.
- Σχηματισμός της LU διάσπασης του  $\mathbf{A} - \mathbf{q}\mathbf{l}$  μόνο μία φορά. Αν λοιπόν χρησιμοποιήσουμε κανονικοποιημένα διανύσματα και την LU μέθοδο τότε το βασικό επαναληπτικό σχήμα θα είναι το παρακάτω:

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{z}^{(m)}$$

$$\mathbf{Uy}^{(m+1)} = \mathbf{z} \quad (34)$$

όπου

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} - \mathbf{q}\mathbf{l}$$

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών 2015, Νικόλαος Μισουρλής, "Αριθμητική Ανάλυση. Ενότητα 7- Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων" Έκδοση:1.01 . Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:<http://opencourses.uoa.gr/courses/DI12/> .

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 (1) ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

(1) <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Σημείωμα Χρήσης Έργων τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση του ακόλουθου έργου:

" Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση : Μια αλγοριθμική προσέγγιση, αυτο-έκδοση, Αθήνα, 2009", Νικόλαος Μισυρλής.