



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 6

Αριθμητική Παραγωγή και Ολοκλήρωση

N. M. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Κλειστοί τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης

Έστω

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

με $f(x) \in C[a, b]$, τότε

$$I(f) = F(b) - F(a),$$

όπου $F(x)$ είναι το **αόριστο** ολοκλήρωμα της $f(x)$.

Ο υπολογισμός του $I(f)$ θα γίνει από τον τύπο

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^n a_i f(x_i). \quad (2)$$

Η $f(x)$ προσεγγίζεται με ένα πολυώνυμο παρεμβολής

$$f(x) \simeq p_n(x). \quad (3)$$

Κλειστοί τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης

Υποθέτουμε ότι τα σημεία x_i , $i = 0(1)n$ ισαπέχουν, δηλ.

$$x_i = x_0 + h, \quad i = 0(1)n$$

$$p_n(x) = f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \quad (4)$$

$$x = x_0 + \theta h \Leftrightarrow \theta = \frac{x - x_0}{h}$$

Για $x_0 = a$, $x_n = b$ έχουμε

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \simeq \int_{x_0}^{x_n} p_n(x) dx \quad (5)$$

Κλειστοί τύποι

Έχουμε

για $x = x_0 \Rightarrow \theta = 0$, $x = x_n \Rightarrow \theta = n$ και $dx = h d\theta$.

$$I_n(f) \simeq h \int_0^n \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \right] d\theta. \quad (6)$$

Πολυώνυμο παρεμβολής $p_1(x) \rightarrow$ κανόνας του Τραπεζίου

Για $n = 1$ η (6) παράγει

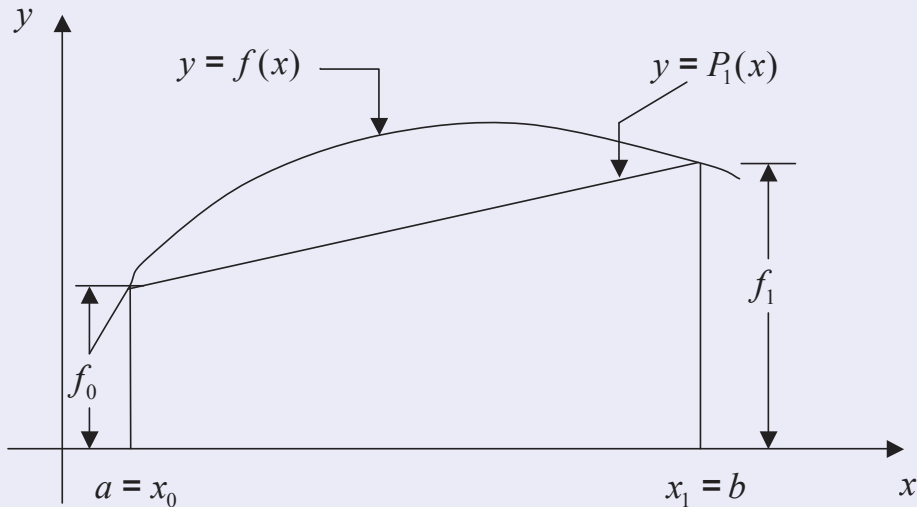
$$I_1(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq h \int_0^1 \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 \right] d\theta = h \left(f_0 \theta + \frac{\theta^2}{2} \Delta f_0 \right) \Big|_0^1.$$

Τελικά

$$I_1(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq \frac{h}{2} (f_0 + f_1), \quad (7)$$

ο οποίος είναι γνωστός ως ο **κανόνας του Τραπεζίου**.

Πολυώνυμο παρεμβολής $p_1(x)$



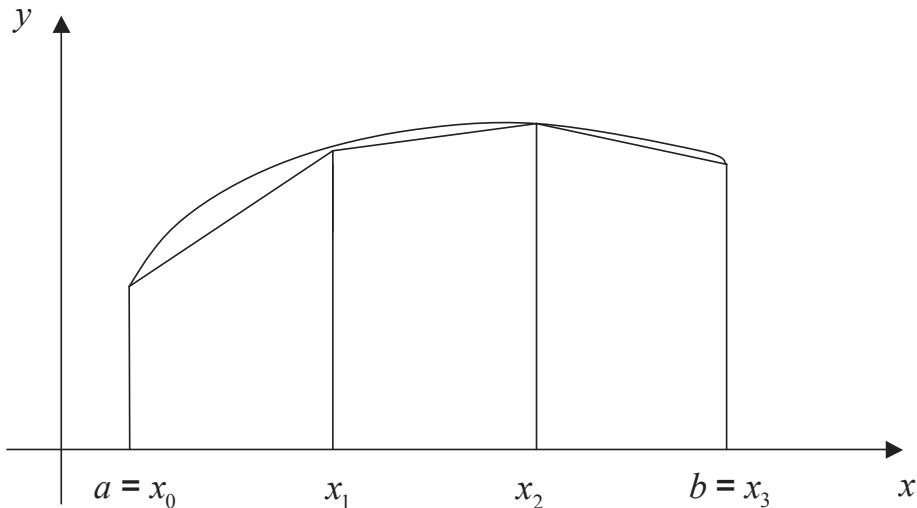
Παράδειγμα

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad h = 1 - 0, \quad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$T_1(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1} \right] = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \simeq 0.693147$$

$$E = I - T_1(f) = 0.693147 - 0.75 = -0.056853.$$



Βελτίωση της προσέγγισης

Το διάστημα $[a, b]$ διαιρείται σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Βελτίωση της προσέγγισης

Τα x_i ορίζονται από τον τύπο

$$x_i = a + ih, \quad i = 0(1)n$$

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \end{aligned}$$

$$I(f) \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2} [f(x_n) + f(x_{n-1})]$$

$$I(f) = T_n(f) \simeq \frac{h}{2} \left[f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right], \quad (8)$$

ο οποίος είναι ο **σύνθετος κανόνας του Τραπεζίου**.

Σύνθετος κανόνας του Τραπεζίου

Στην πράξη ξεκινούμε με $n = 1$ και διπλασιάζουμε το n , δηλ. $n = 2, 4, 8, 16, \dots$, οπότε υπολογίζονται οι ποσότητες T_1, T_2, T_4, T_8 κ.τ.λ.

Αν $|T_{2n} - T_n| < \epsilon$ τότε διακόπτονται οι υπολογισμοί.

Παράδειγμα

Να εφαρμοστεί σε δύο υποδιαστήματα ο σύνθετος κανόνας του Τραπεζίου στο ολοκλήρωμα του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση

Από την (8) και για $n = 2$ έχουμε

$$T_2(f) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + f_2]$$

όπου $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + 1h = 0 + h = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ και $x_2 = 1$. Άρα

$$\begin{aligned} T_2(f) &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1+0} + 2\frac{1}{1+1/2} + \frac{1}{1+1} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[1 + 2\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{17}{24} \simeq 0.70833 \end{aligned}$$

και το αριθμητικό σφάλμα είναι

$$E_2^T = I(f) - T_2(f) \simeq -0.0152,$$

Πολυώνυμο παρεμβολής $p_2(x)$ \rightarrow κανόνας του Simpson

Για $n = 2$ η (6) παράγει

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx,$$

όπου

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = b, \quad h = \frac{b - a}{2}$$

και

$$\begin{aligned} I(f) &\simeq \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx \\ &= h \int_0^2 \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 \right] d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
I(f) &\simeq h \int_0^2 \left[f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_0 \right] d\theta \\
&= h \left[f_0 \theta + \frac{\theta^2}{2} \Delta f_0 + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4} \right) \Delta^2 f_0 \right] \Big|_0^2 \\
&= h \left[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3} \Delta^2 f_0 \right] \\
&= h \left[2f_0 + 2f_1 - 2f_0 + \frac{1}{3}(f_0 - 2f_1 + f_2) \right].
\end{aligned}$$

Τελικά

$$I(f) \simeq \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2], \quad (10)$$

ο οποίος είναι γνωστός ως ο **κανόνας του Simpson**.

Παράδειγμα

Να εφαρμοστεί ο κανόνας του Simpson στο ολοκλήρωμα του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Έχουμε

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = x_0 + h = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$$

και η (10) δίνει

$$S_2(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+0} + 4 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+1} \right] = \frac{25}{36} \simeq 0.69444$$

Άρα

$$\text{αριθμητικό σφάλμα } E_2^S = I(f) - S_2(f) = \log 2 - 0.69444 = 0.693147 - 0.69444 = -0.00130.$$

Σύνθετος κανόνας του Simpson

Αν n είναι άρτιος τότε

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{και} \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0(1)n$$

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

$$I(f) \simeq \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] + \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4] + \cdots + \frac{h}{3}[f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

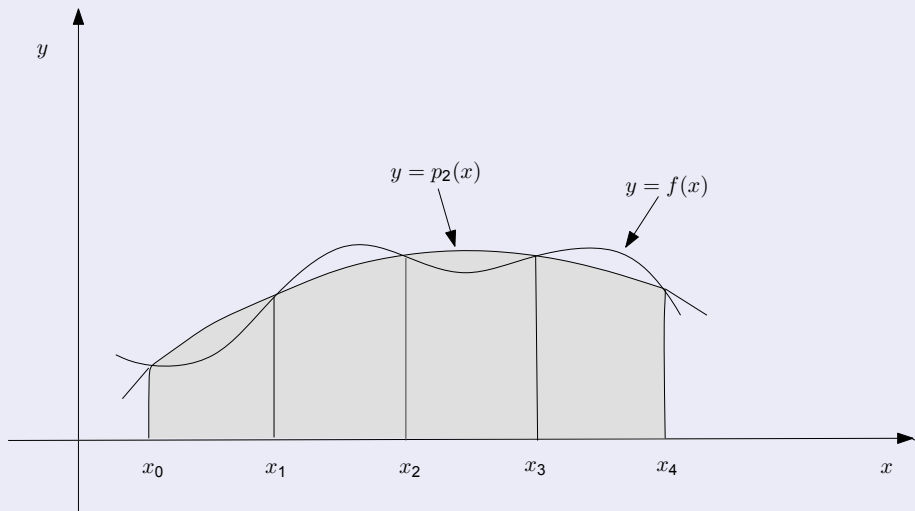
$$I(f) \simeq \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n], \quad (11)$$

ή

$$I(f) \simeq S_n(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 2 \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + f_n], \quad (12)$$

ο οποίος είναι ο σύνθετος κανόνας του Simpson.

Η γεωμετρική ερμηνεία του σύνθετου κανόνα του Simpson



ο οποίος είναι ο **σύνθετος κανόνας του Simpson**.

Πολυώνυμο παρεμβολής $p_3(x) \rightarrow$ Κανόνας των 3/8

Για $n = 3$ από την (6) έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \\ &= h \int_0^3 \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \binom{\theta}{3} \Delta^3 f_0 \right] d\theta \\ &= h \int_0^3 \left[f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{6} \Delta^3 f_0 \right] d\theta \\ &= h \left[f_0 \theta + \frac{\theta^2}{2} \Delta f_0 + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4} \right) \Delta^2 f_0 + \frac{1}{6} \left(\frac{\theta^4}{4} - \theta^3 + \theta^2 \right) \Delta^3 f_0 \right] \Bigg|_0^3 \end{aligned}$$

τελικά

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \simeq \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \quad (13)$$

ο οποίος είναι γνωστός ως ο κανόνας των $\frac{3}{8}$.

Σύνθετος κανόνας των 3/8

Αν $n = 3k$ δηλ. πολλαπλάσιο του 3 τότε ο σύνθετος κανόνας των $\frac{3}{8}$ είναι ο

$$I(f) \simeq \frac{3h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n]. \quad (14)$$

Σφάλμα αποκοπής στην Αριθμητική Ολοκλήρωση

$$E_n(f) = \int_a^b [f(x) - p_n(x)] dx \quad (15)$$

$$E_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) f^{(n+1)}(\xi_1(x)) dx \quad (16)$$

όπου

$$\xi_1 \in [x_0, x_n], \quad x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0(1)n,$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_n = b, \quad x = x_0 + \theta h.$$

Αλλά

$$x - x_i = (\theta - i)h, \quad dx = h d\theta$$

άρα

$$E_n(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n \theta(\theta-1)(\theta-2)\cdots(\theta-n) f^{(n+1)}(\xi_2(\theta)) d\theta. \quad (17)$$

Σφάλμα στον κανόνα Τραπεζίου

Για $n = 1$ η (17) δίνει

$$E_1^T(f) = I(f) - T_1(f) = \frac{h^3}{2!} \int_0^1 \theta(\theta - 1) f^{(2)}(\xi_1(\theta)) d\theta.$$

Λόγω όμως του **Θεωρήματος Μέσης τιμής για Ολοκληρώματα**

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\eta) \int_a^b g(x)dx, \quad (\text{αν } g(x) \geq 0 \text{ ή αν } g(x) \leq 0)$$

άρα

$$E_1^T(f) = \frac{h^3 f^{(2)}(\xi)}{2} \int_0^1 \theta(\theta - 1) d\theta, \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

ή

$$E_1^T(f) = -\frac{h^3 f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{τοπικό σφάλμα αποκοπής} \quad (18)$$

Παρατηρήσεις

- 1 Αν $h = b - a$ δεν είναι "αρκετά μικρό" τότε ο κανόνας του τραpezίου δεν παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα.
- 2 Αν $\max_{a < \xi < b} |f^{(2)}(\xi)| \leq M$ τότε

$$|E_1^T(f)| \leq \frac{h^3 M}{12}. \quad (19)$$

Σφάλμα στον σύνθετο τύπο του Τραπεζίου

$$\begin{aligned} E_n^T(f) &= \int_a^b f(x) dx - T_n(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx - T_n(f) \\ &= \left\{ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \right\} + \left\{ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \right\} + \\ \dots &+ \left\{ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx - \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) \right\} \end{aligned}$$

ή

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi_1) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_2) - \dots - \frac{h^3}{12}f''(\xi_n).$$

Λόγω, όμως, του **Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής**

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12}[nf''(\xi)], \quad \xi \in [a, b].$$

Αλλά $hn = b - a$ συνεπώς

$$E_n^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad \text{ολικό σφάλμα αποκοπής} \quad (20)$$

Ταχύτητα σύγκλισης του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου

Από την (20) έχουμε

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M. \quad (21)$$

- Ο τύπος (21) δηλώνει ότι αν $f(x) \in C^2[a, b]$, τότε ο σύνθετος κανόνας του Τραπεζίου έχει ταχύτητα σύγκλισης $O(h^2)$.
- Επίσης, επειδή η δεύτερη παράγωγος κάθε σταθεράς και κάθε πολυωνύμου πρώτου βαθμού είναι μηδέν, τότε, λόγω της (21), το απόλυτο ολικό σφάλμα αποκοπής είναι μηδέν και ο τύπος του Τραπεζίου για σταθερές και γραμμικά πολυώνυμα θα παράγει ακριβή αποτελέσματα.

Παράδειγμα

Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx,$$

του οποίου η ακριβής τιμή είναι 2.

- Ο ακόλουθος πίνακας εμφανίζει τις τιμές του $T_n(f)$, που είναι οι προσεγγίσεις του $I(f)$ με το σύνθετο κανόνα του Τραπεζίου.
- Να σημειωθεί ότι σε κάθε νέα γραμμή, ο αριθμός των υποδιαστημάτων n διπλασιάζεται και συνεπώς το μέγεθος του υποδιαστήματος υποδιπλασιάζεται.
- Η στήλη "Λόγος" εμφανίζει τον λόγο των διαδοχικών σφαλμάτων, δηλαδή τον παράγοντα με τον οποίο ελαπώνεται το σφάλμα όταν διπλασιάζεται το n .
- Επίσης, ας σημειωθεί ότι ο λόγος του σφάλματος στην τελευταία στήλη προσεγγίζει το λόγο

$$\frac{h^2}{(h/2)^2} = 4.$$

Αυτό είναι αναμενόμενο για μια ακολουθία συγκλίνουσα με ταχύτητα σύγκλισης $O(h^2)$.

Σφάλμα και ταχύτητα σύγκλισης του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου

n	h	$T_n(f)$	$ E_n^T = I(f) - T_n(f) $	Λόγος
1	π	0.0000000	2.0000000	
2	$\pi/2$	1.5707963	0.4292036	4.659792
4	$\pi/4$	1.8961188	0.1038811	4.131681
8	$\pi/8$	1.9742316	0.0257683	4.031337
16	$\pi/16$	1.9935703	0.0064296	4.007741
32	$\pi/32$	1.9983933	0.0016066	4.001929
64	$\pi/64$	1.9995983	0.0004016	4.000482
128	$\pi/128$	1.9998996	0.0001004	4.000120

Σφάλμα στον κανόνα του Simpson

Για $n = 2$ η (17) δίνει

$$E_2^S(f) = I(f) - S_2(f) = \frac{h^4}{3!} \int_0^2 \theta(\theta - 1)(\theta - 2)f^{(3)}(\xi_1(\theta))d\theta. \quad (22)$$

Τώρα όμως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Μέσης τιμής για ολοκληρώματα γιατί η ποσότητα $\theta(\theta - 1)(\theta - 2)$ αλλάζει πρόσημο στο $\theta = 1$. Ακολουθώντας διαφορετική πορεία είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι

$$E_2^S(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (23)$$

Το ολικό σφάλμα αποκοπής του σύνθετου τύπου του Simpson

Το ολικό σφάλμα αποκοπής του σύνθετου κανόνα του Simpson βρίσκεται ακολουθώντας ανάλογη πορεία όπως του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου. Έτσι εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$E_n^S(f) = -\frac{h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (24)$$

- Ο κανόνας του Simpson είναι ακριβής για όλα τα πολυώνυμα βαθμού ≤ 3 .
- Αυτό το αποτέλεσμα δεν ήταν αναμενόμενο, γιατί θα περίμενε κανείς να είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2, αφού το πολυώνυμο παρεμβολής για την εύρεση του κανόνα του Simpson είναι βαθμού 2.
- Επίσης, με την προϋπόθεση ότι $f(x) \in C^4[a, b]$ ο σύνθετος κανόνας του Simpson έχει ταχύτητα σύγκλισης $O(h^4)$.

Παράδειγμα

Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx,$$

του οποίου η ακριβής τιμή είναι 2.

- Ο ακόλουθος πίνακας εμφανίζει τις τιμές του $S_n(f)$, που είναι οι προσεγγίσεις του $I(f)$ με τον σύνθετο κανόνα του Simpson.
- Να σημειωθεί ότι σε κάθε νέα γραμμή, ο αριθμός των υποδιαστημάτων n διπλασιάζεται και συνεπώς το μέγεθος του υποδιαστήματος υποδιπλασιάζεται.

n	h	$S_n(f)$	$ E_n^S = I(f) - S_n(f) $	Λόγος
2	$\pi/2$	2.09439510239	0.09439510239	
4	$\pi/4$	2.00455975498	0.00455975498	20.701792
8	$\pi/8$	2.00026916995	0.00026916995	16.940059
16	$\pi/16$	2.00001659105	0.00001659105	16.223806
32	$\pi/32$	2.00000103337	0.00000103337	16.055292
64	$\pi/64$	2.00000006453	0.00000006453	16.013782
128	$\pi/128$	2.00000000403	0.00000000403	16.003442

Αριθμητική επαλήθευση της ταχύτητας σύγκλισης του σύνθετου κανόνα του Simpson

n	h	$S_n(f)$	$ E_n^S = I(f) - S_n(f) $	Λόγος
2	$\pi/2$	2.09439510239	0.09439510239	
4	$\pi/4$	2.00455975498	0.00455975498	20.701792
8	$\pi/8$	2.00026916995	0.00026916995	16.940059
16	$\pi/16$	2.00001659105	0.00001659105	16.223806
32	$\pi/32$	2.00000103337	0.00000103337	16.055292
64	$\pi/64$	2.00000006453	0.00000006453	16.013782
128	$\pi/128$	2.00000000403	0.00000000403	16.003442

- Η στήλη "Λόγος" εμφανίζει τον λόγο των διαδοχικών σφαλμάτων, δηλαδή τον παράγοντα με τον οποίο ελαττώνεται το σφάλμα όταν διπλασιάζεται το n .
- Επίσης, να σημειωθεί ότι ο λόγος του σφάλματος στην τελευταία στήλη προσεγγίζει το λόγο

$$\frac{h^4}{(h/2)^4} = 16.$$

Ταχύτητα σύγκλισης

Για την αριθμητική επαλήθευση της ταχύτητας σύγκλισης ενός σύνθετου κανόνα όταν δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος εργαζόμαστε ως εξής:

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προσεγγίσει την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος $I(f)$ χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου.
- Έστω ότι τα $T_n(f)$, $T_{2n}(f)$ και $T_{4n}(f)$ συμβολίζουν τις προσεγγίσεις που λαμβάνονται εφαρμόζοντας τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και χρησιμοποιώντας αντίστοιχα υποδιαστήματα με h , $h/2$, και $h/4$.
- Δίνεται ο λόγος

$$\frac{T_n(f) - T_{2n}(f)}{T_{2n}(f) - T_{4n}(f)}.$$

Αφού ο σύνθετος κανόνας του τραπεζίου έχει θεωρητικά ταχύτητα σύγκλισης $O(h^2)$, θα πρέπει να αναμένουμε ότι $E_n \simeq 4E_{2n}$ για αρκετά μικρό h , όπου $E_n(f) = I(f) - T_n(f)$. Για τον ανωτέρω λόγο έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{T_n(f) - T_{2n}(f)}{T_{2n}(f) - T_{4n}(f)} &= \frac{T_n(f) - I(f) - (T_{2n}(f) - I(f))}{T_{2n}(f) - I(f) - (T_{4n}(f) - I(f))} \\ &= \frac{-E_n(f) + E_{2n}(f)}{-E_{2n}(f) + E_{4n}(f)} \simeq \frac{-4E_{2n} + E_{2n}}{-E_{2n} + \frac{1}{4}E_{2n}} = 4 \end{aligned}$$

για αρκετά μικρό h .

Παράδειγμα 1

Δίνεται το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx.$$

Να επαληθευτεί αριθμητικά ότι η ταχύτητα σύγκλισης του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου είναι $O(h^2)$.

Αριθμητική επαλήθευση της ταχύτητας σύγκλισης του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου

Ο ακόλουθος πίνακας εμφανίζει τις προσεγγιστικές τιμές του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου στο $I(f)$ για διάφορες τιμές του n .

n	h	$T_n(f)$	$\frac{T_n(f) - T_{2n}(f)}{T_{2n}(f) - T_{4n}(f)}$
1	1	1.207106781186	4.335258
2	1/2	1.133883476483	4.057269
4	1/4	1.116993293318	4.014294
8	1/8	1.112830349496	4.003560
16	1/16	1.111793319381	4.000889
32	1/32	1.111534292393	4.000222
64	1/64	1.111469550038	
128	1/128	1.111453365349	

Παρατηρήστε ότι ο λόγος

$$\frac{T_n(f) - T_{2n}(f)}{T_{2n}(f) - T_{4n}(f)}$$

προσεγγίζει το 4 όσο το h μειώνεται, επαληθεύοντας έτσι αριθμητικά ότι η ταχύτητα σύγκλισης είναι $O(h^2)$.

Παρατήρηση

Από την (24) συμπεραίνεται ότι ο κανόνας του Simpson δεν θα έχει την αναμενόμενη ταχύτητα σύγκλισης αν δεν ισχύει η $f(x) \in C^4[a, b]$.

Παράδειγμα 2

Να χρησιμοποιηθεί ο σύνθετος κανόνας του Simpson για την προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}.$$

Λύση

Η στήλη "Λόγος" στον ακόλουθο πίνακα δείχνει ότι η σύγκλιση δεν είναι η αναμενόμενη 16 αλλά περίπου 2.8, λόγω της ασυνέχειας όλων των παραγώγων της \sqrt{x} στο 0.

n	Σφάλμα	Λόγος
2	$2.860e - 2$	
4	$1.012e - 2$	2.82
8	$3.587e - 3$	2.83
16	$1.268e - 3$	2.83
32	$4.485e - 4$	2.83

Χρήση σφάλματος αποκοπής

- Είναι δυνατόν να επιλεγεί το πλήθος των σημείων σε ένα σύνθετο κανόνα ολοκλήρωσης έτσι ώστε να επιτευχθεί επιθυμητή ακρίβεια στην προσέγγιση της τιμής του ολοκληρώματος.
- Αν απαιτηθεί $|E_n^T(f)| < \epsilon$, τότε το h πρέπει να εκλεγεί έτσι ώστε

$$h < \left[\frac{12\epsilon}{(b-a)M_2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Ανοικτοί τύποι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Οι ανοικτοί τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης δεν συμπεριλαμβάνουν τα άκρα του ορισμένου ολοκληρώματος στα σημεία παρεμβολής. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \simeq \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} p_n(x) dx \quad (25)$$

όπου

$a = x_0 - h$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $b = x_{n+1} = x_n + h$ και $h = \frac{b-a}{n+2}$.

Η (25) με αντικατάσταση του $p_n(x)$ γίνεται

$$I(f) \simeq h \int_{-1}^{n+1} \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \right] d\theta. \quad (26)$$

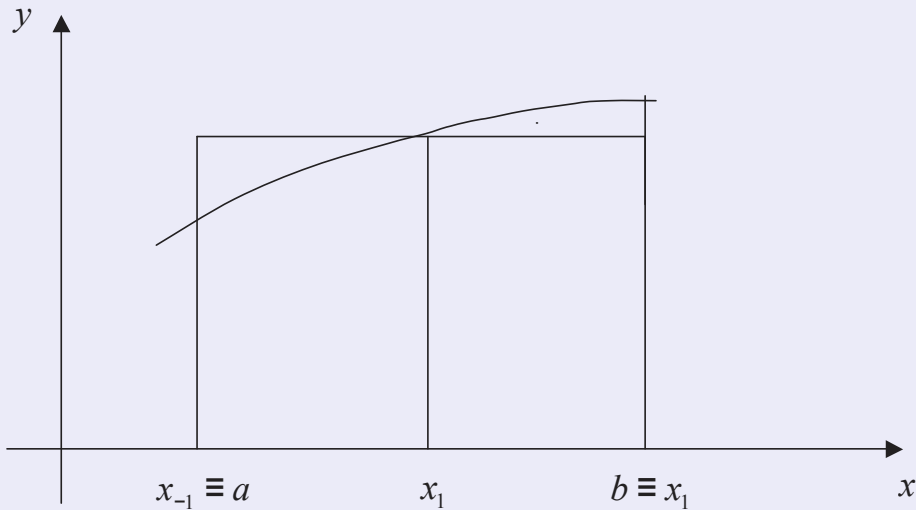
Για διάφορες τιμές του n η (26) παράγει τους ανοικτούς τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Κανόνας του μέσου

Για $n = 0$ η (26) δίνει

$$I(f) = \int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx \simeq h \int_{-1}^1 f_0 d\theta = 2hf_0.$$

Γεωμετρική ερμηνεία του κανόνα του μέσου



Κανόνας του μέσου

Για $x_0 = a$, b , $\frac{a+b}{2}$ ο κανόνας του μέσου δίνει

$$x_0 = a, \quad h = \frac{b-a}{2} \longrightarrow I(f) \simeq (b-a)f(a)$$

$$x_0 = b \longrightarrow I(f) \simeq (b-a)f(b)$$

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \longrightarrow I(f) \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Κανόννας του μέσου

Για $n = 1$ η (26) δίνει

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) dx \\ &\simeq h \int_{-1}^2 \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 \right] d\theta = h \left(f_0 \theta + \frac{\theta^2}{2} \Delta f_0 \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{3h}{2} (f_0 + f_1), \quad \text{σφάλμα } E_1^A(f) = \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \end{aligned} \quad (27)$$

Για $n = 2$ η (26) δίνει

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{x_{-1}}^{x_3} f(x) dx \\ &\simeq h \int_{-1}^3 \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 \right] d\theta \\ &= \frac{4h}{3} (2f_0 - f_1 + 2f_2), \end{aligned} \quad (28)$$

ο οποίος είναι γνωστός ως ο **τύπος του Milne** με **σφάλμα** $E_2^A(f) = \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$.

Ορισμός

Ένας τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει ακρίβεια βαθμού n αν παράγει ακριβή αποτελέσματα για όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq n$ και δεν είναι ακριβής για πολυώνυμο βαθμού $n + 1$.

Οι τύποι των Newton-Cotes

Οι τύποι που μελετήθηκαν ονομάζονται τύποι των Newton-Cotes και είναι δυνατόν να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα

Αν $I_n(f)$ είναι ένας τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης Newton-Cotes (κλειστός ή ανοικτός) με $n + 1$ σημεία παρεμβολής, τότε

- (α) Αν το n είναι άρτιο και $f(x) \in C^{n+2}[a, b]$, τότε υπάρχει μια σταθερά c και ένα $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$I(f) = I_n(f) - c(b-a)^{n+3}f^{(n+2)}(\xi).$$

Ο βαθμός ακριβείας του $I_n(f)$ είναι $n + 1$.

- (β) Αν το n είναι περιτό και $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, τότε υπάρχει μια σταθερά c' και ένα $\xi' \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$I(f) = I_n(f) - c'(b-a)^{n+2}f^{(n+1)}(\xi').$$

Ο βαθμός ακριβείας του $I_n(f)$ είναι n .

Παρατηρήσεις

1. Αμφότεροι οι τύποι για $n = 2$ και $n = 3$ έχουν βαθμό ακριβείας 3. Συνεπώς, οι τύποι των Newton-Cotes με άρτιο n είναι καλύτεροι αφού παράγουν αποτελέσματα με ίδια ακρίβεια αλλά με λιγότερους υπολογισμούς της τιμής μιας συνάρτησης.
2. Για δεδομένο n , έχουμε $c < c'$ και κατά συνέπεια οι κλειστοί τύποι παράγουν γενικά καλύτερα αποτελέσματα από τους ανοικτούς. Οι ανοικτοί τύποι χρησιμοποιούνται κυρίως για την αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Έστω ότι

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \simeq w_0 f_0 + w_1 f_1 + \cdots + w_n f_n \quad (29)$$

όπου $x_i = x_0 + ih$, $i = 0(1)n$.

Οι συντελεστές w_0, w_1, \dots, w_n προσδιορίζονται έτσι ώστε ο ανωτέρω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης να είναι **ακριβής** (δηλαδή τα δύο μέλη του είναι **ίσα**) για όλα τα πολυώνυμα με όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

Αν $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, τότε $E_n(f) = 0$ για κάθε πολυώνυμο βαθμού $\leq m$.

$$E_n(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx - \sum_{i=0}^n w_i f_i \quad (30)$$

...Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

ή

$$\begin{aligned} E_n(f) &= E_n(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m) \\ &= \int_{x_0}^{x_n} (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m) dx - \sum_{i=0}^n w_i(a_0 + a_1x_i + \cdots + a_ix_i^m) \\ &= a_0 \left[\int_{x_0}^{x_n} 1 \cdot dx - \sum_{i=0}^n w_i \cdot 1 \right] + a_1 \left[\int_{x_0}^{x_n} x \cdot dx - \sum_{i=0}^n w_i \cdot x_i \right] + \cdots + \\ &+ a_m \left[\int_{x_0}^{x_n} x^m \cdot dx - \sum_{i=0}^n w_i \cdot x_i^m \right] \\ &= a_0 E_n(1) + a_1 E_n(x) + \cdots + a_m E_n(x^m). \end{aligned} \quad (31)$$

...Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Συνεπώς $E_n(f) = 0$ για κάθε πολυώνυμο βαθμού $\leq m$ αν και μόνο αν

$$E_n(x^k) = 0, \quad k = 0(1)m. \quad (32)$$

Για $n = 0 \rightarrow \int_a^b f(x) dx \simeq w_0 f(x_0)$

Απαιτούμε ο παραπάνω τύπος να είναι ακριβής για $f(x) = 1$, οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} 1 \cdot dx = x_1 - x_0 = h$$

$$B = w_0 f(x_0) = w_0 \cdot 1$$

$x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_1 = x_0 + h$.

Απαιτώντας $A = B$ λαμβάνουμε

$$w_0 = h$$

συνεπώς

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq hf(x_0), \quad \text{που είναι ο κανόνας του ορθογωνίου.} \quad (33)$$

$$\text{Για } n = 1 \longrightarrow I(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq w_0 f_0 + w_1 f_1$$

Είναι

$$x_0 = a, x_1 = b = x_0 + h$$

Απαιτούμε ο παραπάνω τύπος να είναι ακριβής για $f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

- Για $f(x) = 1$ έχουμε

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} 1 \cdot dx = x_1 - x_0 = h$$

$$B = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = w_0 + w_1.$$

Απαιτώντας $A = B$ προκύπτει

$$w_0 + w_1 = h. \tag{34}$$

- Για $f(x) = x$ έχουμε

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2}$$

ή

$$A = \frac{h(x_0 + x_1)}{2}$$

και

$$B = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = w_0 x_0 + w_1 x_1.$$

Απαιτώντας $A = B$ προκύπτει

$$w_0 x_0 + w_1 x_1 = \frac{h(x_0 + x_1)}{2}. \quad (35)$$

Λύνοντας το σύστημα (34) και(35) βρίσκουμε

$$w_0 = w_1 = \frac{h}{2}.$$

Άρα

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] \quad (36)$$

ο οποίος είναι ο **κανόνας του τραπεζίου** και είναι **ακριβής** για πολυώνυμα πρώτου βαθμού.

Τοπικό σφάλμα

Προκειμένου να βρούμε το σφάλμα έχουμε

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + Af^{(2)}(\xi), \quad (37)$$

όπου A σταθερά που θα προσδιοριστεί και $\xi \in (x_0, x_1)$. Το τοπικό σφάλμα έχει την έκφραση $Af^{(2)}(\xi)$ καθώς ο τύπος (36) είναι ακριβής για πρώτου βαθμού πολυώνυμα. Η σταθερά A θα προσδιοριστεί από την απαίτηση ο τύπος να ισχύει για $f(x) = x^2$, δηλαδή

$$\int_{x_0}^{x_1} x^2 dx = \frac{h}{2}(x_0^2 + x_1^2) + 2A$$

ή

$$\frac{x_1^3 - x_0^3}{3} = \frac{h}{2}(x_0^2 + x_1^2) + 2A$$

ή

$$\frac{h(x_1^2 + x_0x_1x_0^2)}{3} - \frac{h(x_0^2 + x_1^2)}{2} = 2A$$

ή

$$A = -\frac{h^3}{12} \quad (38)$$

όπως αναμενόταν (βλ. τοπικό σφάλμα αποκοπής του Τραπεζίου)

Ολοκλήρωση κατά Romberg

Ξεκινώντας με τον κανόνα του Τραπεζίου για $h_1 = b - a$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi), \quad (39)$$

όπου $a < \xi < b$, $h = \frac{(b-a)}{m}$, $x_i = a + ih$, $i = 0(1)m$,
τον εφαρμόζουμε διαδοχικά για

$$h_1 = h, \quad h_2 = \frac{h_1}{2}, \quad h_3 = \frac{h_2}{2}, \quad h_4 = \frac{h_3}{2}, \dots, \quad h_k = \frac{h_{k-1}}{2}$$

ή γενικά για

$$h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}, \quad k = 1(1)n$$

...Ολοκλήρωση κατά Romberg

Τα αποτελέσματα των διαδοχικών εφαρμογών του σύνθετου τύπου του Τραπεζίου για

$$h_k, \quad k = 1(1)n \text{ συμβολίζονται με } \underbrace{T(f, h)}_{R_{11}}, \quad \underbrace{T\left(f, \frac{h}{2}\right)}_{R_{21}}, \quad \underbrace{T\left(f, \frac{h}{4}\right)}_{R_{31}}, \quad \dots, \quad \underbrace{T\left(f, \frac{h}{2^{n-1}}\right)}_{R_{n1}}$$

Οι προσεγγίσεις R_{k1} , $k = 1, 2, \dots$ συγκλίνουν πολύ αργά. Για το λόγο αυτό επιταχύνονται με τη μέθοδο του Richardson.

Είναι δυνατόν να δείκτει ότι ο σύνθετος κανόνας του Τραπεζίου μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$I = \int_a^b f(x) dx = R_{k-1,1} + c_1 h_{k-1}^2 + c_2 h_{k-1}^4 + \dots + c_m h_{k-1}^{2m} + O(h_{k-1}^{2m+2}). \quad (40)$$

Θέτοντας στον ανωτέρω τύπο όπου $k - 1$ το k έχουμε

$$I = R_{k,1} + c_1 h_k^2 + c_2 h_k^4 + \dots + c_m h_k^{2m} + O(h_k^{2m+2}) \quad (41)$$

ή θέτοντας όπου h_k το $\frac{h_{k-1}}{2}$ στον τελευταίο τύπο λαμβάνουμε

$$I = R_{k,1} + \frac{c_1 h_{k-1}^2}{4} + \frac{c_2 h_{k-1}^4}{16} + \dots + \frac{c_m}{2^{2m}} h_{k-1}^{2m} + O(h_{k-1}^{2m+2}). \quad (42)$$

...Ολοκλήρωση κατά Romberg

Απαλείφοντας τον όρο h_{k-1}^2 από τον πρώτο και τον τελευταίο τύπο προκύπτει

$$I = \frac{4R_{k1} - R_{k-1,1}}{3} + c_2' h_{k-1}^4 + c_3' h_{k-1}^6 + \cdots + c_m' h_{k-1}^{2m} + O(h_{k-1}^{2m+2}). \quad (43)$$

ή

$$I = \frac{4R_{k1} - R_{k-1,1}}{3} + O(h_k^4) \quad \text{(σύνθετος τύπος του Simpson)}. \quad (44)$$

Από τον παραπάνω τύπο ορίζουμε τις ποσότητες:

$$R_{k2} = \frac{4R_{k1} - R_{k-1,1}}{3}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (45)$$

Για τις ποσότητες αυτές έχουμε (βλ. (43))

$$I = R_{k2} + c_2'' h_k^4 + c_3'' h_k^6 + \cdots + c_{2m}'' h_k^{2m} + O(h_k^{2m+2}) \quad (46)$$

και για $k = k - 1$

$$I = R_{k-1,1} + c_2'' h_{k-1}^4 + c_3'' h_{k-1}^6 + \cdots + c_{2m}'' h_{k-1}^{2m} + O(h_{k-1}^{2m+2}). \quad (47)$$

Θέτοντας όπου h_k το $\frac{h_{k-1}}{2}$ στην (46) λαμβάνουμε:

$$I = R_{k,2} + c_2'' \frac{h_{k-1}^4}{16} + c_3'' \frac{h_{k-1}^6}{64} + \cdots + c_m'' \frac{h_{k-1}^{2m}}{2^{2m}} + O(h_{k-1}^{2m+2}). \quad (48)$$

...Ολοκλήρωση κατά Romberg

Απαλείφοντας τον όρο h_{k-1}^4 από τις (47) και (48) λαμβάνουμε

$$I = \frac{16R_{k2} - R_{k-1,2}}{15} + O(h_k^6), \quad (49)$$

οπότε ορίζονται κατ' ανάλογο τρόπο οι ποσότητες

$$R_{k3} = \frac{16R_{k2} - R_{k-1,2}}{15}, \quad k = 3, 4, \dots, n. \quad (50)$$

Γενικά, λοιπόν έχουμε

$$R_{ij} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, i \quad (51)$$

...Ολοκλήρωση κατά Romberg

Γενικά, λοιπόν έχουμε

$$R_{ij} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, i \quad (52)$$

οπότε σχηματίζεται ο πίνακας

$$\begin{array}{ccccccc} R_{11} & & & & & & \\ & R_{21} & R_{22} & & & & \\ & & R_{31} & R_{32} \setminus & R_{33} \setminus & & \\ & & & & & & \\ & R_{41} & R_{42} - & - & R_{43} - & - & R_{44} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ R_{n1} & R_{n2} & & R_{n3} & & R_{n4} & \cdots & R_{nn} \end{array}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί προσεγγιστική τιμή για το $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ με τη μέθοδο Romberg.

Λύση

$$R_{ij} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, i$$

Εφαρμόζοντας τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου υπολογίζονται οι ποσότητες

$$R_{11} = 0.75, \quad R_{21} = 0.7083, \quad R_{31} = 0.6970$$

οπότε

0.75

$$\frac{4 \times 0.7083 - 0.75}{4 - 1} = 0.6944$$

0.7083

$$\frac{4 \times 0.6970 - 0.7083}{4 - 1} = 0.6932$$

0.7083

$$\frac{16 \times 0.6932 - 0.6944}{15} = 0.6970$$

Ολοκλήρωση του Gauss

Να βρεθεί τύπος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης της μορφής

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^n w_j f(x_j), \quad (53)$$

ο οποίος να είναι ακριβής για πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού με την υπόθεση ότι οι κόμβοι δεν ισαπέχουν και ότι θα επιλεγούν κατάλληλα έτσι ώστε ο τύπος

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^n w_j f(x_j)$$

να είναι ακριβής για πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

$$\text{Για } n = 1 \longrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx \simeq w_1 f(x_1)$$

και ο τύπος έχει τους δύο αγνώστους w_1 και x_1 . Για τον προσδιορισμό τους απαιτείται ο τύπος (53) να είναι ακριβής για τα

$$f(x) = 1 \text{ και } f(x) = x.$$

Για $f(x) = 1$ έχουμε

$$\int_{-1}^1 1 dx = w_1 \cdot 1, \text{ άρα } w_1 = 2.$$

Για $f(x) = x$ έχουμε

$$\int_{-1}^1 x dx = w_1 x_1 \quad \text{ή} \quad 0 = w_1 x_1 \quad \text{άρα} \quad x_1 = 0$$

οπότε

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq 2f(0) \quad \text{τύπος του μέσου}$$

$$\text{Για } n = 2 \longrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx \simeq w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

και ο τύπος έχει τώρα τους τέσσερις αγνώστους w_1 , w_2 , x_1 και x_2 . Για τον προσδιορισμό τους απαιτείται ο τύπος να είναι ακριβής για τα $f(x) = 1, x, x^2, x^3$. Έτσι προκύπτει το σύστημα

$$w_1 + w_2 = 2$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0.$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$w_1 = w_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

άρα

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

ο τύπος αυτός είναι ακριβής, λόγω της κατασκευής του, για πολυώνυμα βαθμού ≤ 3 .

Παρατήρηση

Ο τύπος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (54)$$

ο οποίος, λόγω της κατασκευής του, είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού ≤ 3 .
Για $f(x) = x^4$ ο τύπος (54) δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα.

Παράδειγμα

Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος (54) για την προσέγγιση του

$$\int_{-1}^1 e^x dx.$$

Λύση Ο τύπος (54) για το ανωτέρω ολοκλήρωμα δίνει

$$I \simeq e^{-\sqrt{3}/3} + e^{\sqrt{3}/3} \simeq 2.3426961,$$

ενώ η ακριβής τιμή του είναι

$$I = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1} \simeq 2.3504024.$$

Παρατηρήστε ότι το σφάλμα είναι $\simeq 0.00771$, το οποίο είναι πολύ μικρό για μόνο δύο σημεία (x_1, x_2) .

Η περίπτωση $n > 2$

Ο τύπος (53) έχει τους $2n$ αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, \dots, w_n$. Για τον προσδιορισμό τους απαιτείται ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης να είναι ακριβής για τα $2n$ μονώνυμα $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$.

Αυτό σημαίνει ότι $I(f) = I_n(f)$ για όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq 2n - 1$, το οποίο καταλήγει στο ακόλουθο σύστημα $2n$ μη γραμμικών εξισώσεων με $2n$ αγνώστους

$$\begin{array}{rcccccccc} 2 & = & w_1 & + & w_2 & + & \dots & + & w_n \\ 0 & = & w_1 x_1 & + & w_2 x_2 & + & \dots & + & w_n x_n \\ \frac{2}{3} & = & w_1 x_1^2 & + & w_2 x_2^2 & + & \dots & + & w_n x_n^2 \\ 0 & = & w_1 x_1^3 & + & w_2 x_2^3 & + & \dots & + & w_n x_n^3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \frac{2}{2n-1} & = & w_1 x_1^{2n-2} & + & w_2 x_2^{2n-2} & + & \dots & + & w_n x_n^{2n-2} \\ 0 & = & w_1 x_1^{2n-1} & + & w_2 x_2^{2n-1} & + & \dots & + & w_n x_n^{2n-1} \end{array}$$

Η περίπτωση $n > 2$

Η επίλυση του ανωτέρω συστήματος είναι αρκετά δύσκολη. Ευτυχώς όμως η λύση του υπάρχει και υπολογίζεται από τις βιβλιοθήκες μαθηματικού λογισμικού (*IMSL, NAG*).

Οι τύποι του Gauss

- Οι τύποι που παράγονται από την (53) όπως περιγράφηκε ανωτέρω καλούνται τύποι του Gauss.
- Στην περίπτωση που επιθυμείται η προσέγγιση ενός ορισμένου ολοκληρώματος στο διάστημα $[a, b]$ αντί του $[-1, 1]$, τότε αυτό μπορεί να επιτευχθεί πολύ εύκολα με αλλαγή μεταβλητής. Ας υποθέσουμε ότι

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

τότε εισάγοντας τη μεταβλητή

$$x = \frac{a + b + t(b - a)}{2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο ακόλουθο

$$I(f) = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right) dt$$

όπου τώρα μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Gauss

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^n w_j f(x_j).$$

Παράδειγμα

Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Gauss για την προσέγγιση του $I = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$.

Λύση

Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον ακόλουθο πίνακα, όπου n είναι το πλήθος των σημείων. Η στήλη "Λόγος" δείχνει ότι το σφάλμα συμπεριφέρεται ως εξής

$$I - I_n \simeq ch^3 \quad (55)$$

για κάποιο c . Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά του πίνακα, ο οποίος δίνει τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του κανόνα του Simpson, η πειραματική ταχύτητα σύγκλισης είναι μόνο $h^{3/2}$ η οποία είναι πολύ αργή σε σχέση με την (55).

n	h	$I - I_n$	Λόγος
2	$\frac{1}{2}$	-7.22E-3	-
4	$\frac{1}{4}$	-1.16E-3	6.2
8	$\frac{1}{8}$	-1.69E-4	6.9
16	$\frac{1}{16}$	-2.30E-5	7.4
32	$\frac{1}{32}$	-3.00E-6	7.6
64	$\frac{1}{64}$	-3.84E-7	7.8

Πίνακας: Εφαρμογή του τύπου του Gauss στο $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

Παρατήρηση

Οι τύποι του Gauss δεν είναι εύκολο να εφαρμοστούν όπως είναι οι κανόνες του Τραπεζίου και του Simpson. Ωστόσο, η αύξηση στην ταχύτητα σύγκλισης είναι τόσο γρήγορη ώστε η χρήση τους καθίσταται αναμφισβήτητη.

Αριθμητική Ανάλυση

Κεφάλαιο 10. Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Ενότητα 6

Διδάσκων: Ν. Μισυρλής

ΕΚΠΑ

29 Νοεμβρίου 2015

Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y) \quad (56)$$

όπου $y = y(x)$ μία άγνωστη συνάρτηση του x , που ικανοποιεί την συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \quad (57)$$

με x_0, y_0 δεδομένα και f μία γνωστή συνάρτηση των x και y .

Υπαρξη και μονοσήμαντο λύσης

Είναι γνωστό από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ότι αν η $f(x, y)$ είναι συνεχής στον τόπο S με

$$S \equiv \{(x, y) | x_0 \leq x \leq x_n, \quad -\infty < y < +\infty\} \quad (58)$$

και ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz στην λωρίδα S με σταθερά $L (> 0)$, δηλαδή

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad (59)$$

τότε το πρόβλημα των αρχικών τιμών (56)-(57) έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $x \in [x_0, x_n]$.

Ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων

- Εύρεση της προσεγγιστικής τιμής της y σε ένα τυχόν σημείο $x \neq x_0$.
- Εκλέγουμε αυθαίρετα ένα φυσικό αριθμό n και συμβολίζουμε με x_n την τιμή του x για την οποία μας ζητείται η τιμή της y .
- Διαιρούμε το διάστημα $[x_0, x_n]$ σε n ίσα υποδιαστήματα με τα σημεία x_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Είναι φανερό ότι τα σημεία x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ ορίζονται από τις σχέσεις

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{x_n - x_0}{n},$$

με $i = 0, 1, \dots, n$ όπου h είναι το βήμα ολοκλήρωσης.

- Ακολούθως εφαρμόζοντας μία από τις αριθμητικές μεθόδους που θα αναπτύξουμε στα επόμενα βρίσκουμε την y_1 που είναι μία προσεγγιστική τιμή της ακριβούς τιμής $y(x_1)$ μετά, χρησιμοποιώντας την y_1 , βρίσκουμε την y_2 κ.ο.κ. και τέλος την y_n την οποία και δεχόμαστε σαν την αριθμητική λύση του προβλήματος στο σημείο $x = x_n$.
- Στην πράξη λαμβάνουμε $n = 1$ και βρίσκουμε την $y_n (\equiv y_1)$. Μετά λαμβάνουμε $n = 2$ και βρίσκουμε την $y_n (\equiv y_2)$, $n = 4, 8$ κ.ο.κ. μέχρις ότου δύο διαδοχικές τιμές για την y_n συμφωνούν σε ένα προκαθορισμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων οπότε την τελευταία τιμή y_n δεχόμαστε σαν την αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης στο σημείο $x = x_n$.

Η μέθοδος του Euler

Η μέθοδος του Euler είναι μία μέθοδος του απλού βήματος όπου η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $y(x)$ σε ένα άγνωστο σημείο του διαστήματος $[x_i, x_{i+1}]$ προσεγγίζεται με την τιμή της ίδιας της παραγώγου στο σημείο x_i . Έτσι διατηρώντας δύο όρους στο ανάπτυγμα του Taylor έχουμε

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i + \theta_i h), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (60)$$

όπου $0 < \theta_i < 1$.

Αν τώρα προσεγγίσουμε την $y'(x_i + \theta_i h)$ με την $y'(x)$ και χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα y_i, y'_i για τις προσεγγιστικές τιμές των $y(x_i)$ και $y'(x_i)$, αντίστοιχα, τότε η (60) γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (61)$$

Αλλά

$$y'_i = f(x_i, y_i) \quad (62)$$

άρα η (61) δίνει τελικά

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (63)$$

Η σχέση (63), αν γνωρίζουμε την $y(x_i)$, γίνεται

$$y^*(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

όπου ο * συμβολίζει την προσεγγιστική τιμή, οπότε το σφάλμα είναι

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= y^*(x_{i+1}) - y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) - y(x_i) - hy'(x_i + \theta_i h) \\ &= hy'(x_i) - hy'(x_i + \theta_i^* h) - \frac{h^2}{2!} y''(x_i + \theta_i^* h) \end{aligned}$$

ή

$$p_{i+1} = -\frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta_i^* h), \quad 0 < \theta_i^* < 1, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Το ανωτέρω σφάλμα καλείται *τοπικό σφάλμα αποκοπής* και όπως παρατηρούμε είναι ανάλογο του $O(h^2)$ (δεύτερης τάξης ως προς h).

Παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα των αρχικών τιμών

$$y' = -y + x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1.$$

Αν $n = 10$, να υπολογιστεί η $y(1.0)$ με τη μέθοδο του Euler.

Λύση

Έχουμε $f(x, y) = -y + x + 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_n = 1.0$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{1.0 - 0}{10} = 0.1 \quad \text{και} \quad x_i = x_0 + ih = 0.1i$$

οπότε η μέθοδος του Euler είναι η

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\text{ή} \quad y_{i+1} = y_i + h(-y_i + x_i + 1), \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τον ανωτέρω τύπο βρίσκουμε

$$\begin{aligned}(i = 0) \quad y_1 &= y_0 + h(-y_0 + x_0 + 1) \\ &= 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1.0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(i = 1) \quad y_2 &= y_1 + h(-y_1 + x_1 + 1) \\ &= 1.0 + 0.1(-1 + 0.0 + 1) = 1.01\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(i = 2) \quad y_3 &= y_2 + h(-y_2 + x_2 + 1) \\ &= 1.01 + 0.1(-1.01 + 0.2 + 1) = 1.029\end{aligned}$$

⋮

$$(i = 9) \quad y_{10} = 1.348678.$$

Πίνακας υπολογισμών και σφαλμάτων

Η ακριβής λύση είναι η $y(x) = x + e^{-x}$.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $
0	0	1.0	1.00	0
1	0.1	1.0	1.004837	0.004837
2	0.2	1.01	1.018731	0.008731
3	0.3	1.029	1.040818	0.011818
4	0.4	1.0561	1.070320	0.014220
5	0.5	1.09049	1.106531	0.016041
6	0.6	1.131441	1.148812	0.017371
7	0.7	1.178297	1.196585	0.018288
8	0.8	1.230467	1.249329	0.018862
9	0.9	1.287420	1.306570	0.019150
10	1.0	1.348618	1.361879	0.019201

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα αυξάνονται όσο αυξάνεται η τιμή των x_i . Η ελεγχόμενη αυτή αύξηση του σφάλματος οφείλεται στην ευστάθεια της μεθόδου του Euler, πράγμα που δηλώνει ότι τα σφάλματα στρογγύλευσης αναμένονται να αυξηθούν ανάλογα με το h .

Η μέθοδος της σειράς Taylor

Η μέθοδος της σειράς Taylor είναι η γενίκευση της μεθόδου του Euler και είναι περισσότερο ακριβής. Συνιστάται δε στην περίπτωση όπου οι παράγωγοι ανώτερης τάξης της $f(x, y)$ μπορούν να υπολογιστούν εύκολα. Όπως και στη μέθοδο του Euler αναπτύσσουμε κατά Taylor κρατώντας $k + 1$ όρους, οπότε

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \dots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_i + \theta_i h) \quad (64)$$

όπου $0 < \theta_i < 1, i = 0, 1, \dots, n - 1$, ή

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \dots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_i) + O(h^{k+1}), i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (65)$$

Τοπικό σφάλμα αποκοπής

Δίνεται τώρα από τον τύπο

$$p_{i+1} = -\frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(x_i + \theta_i^* h), \quad 0 < \theta_i^* < 1, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Από την (65) έχουμε

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots + \frac{h^k}{k!} y_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

που αποτελεί τη γνωστή σαν μέθοδο της σειράς Taylor.

Παράδειγμα 1

Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Taylor με τρεις και τέσσερις όρους για το πρόβλημα

$$y' = -y + x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1.$$

Λύση

Η μέθοδος του Taylor με τρεις όρους είναι η

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

οπότε μας χρειάζονται οι εκφράσεις της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της y . Έχουμε $y' = -y + x + 1$

$y'' = (-y + x + 1)' = -y' + 1 = y - x - 1 + 1 = y - x$. Άρα για $n = 10$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_n = 1.0$, $h = \frac{x_n - x_0}{n} = 0.1$ έχουμε

$$y_{i+1} = y_i + h(-y_i + x_i + 1) + \frac{h^2}{2}(y_i - x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}(i = 0) \quad y_1 &= y_0 + h(-y_0 + x_0 - 1) + \frac{h^2}{2}(y_0 - x_0) \\ &= 1 + 0.1(-1 + 0 - 1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1 - 0) \\ &= 1 + \frac{0.01}{2} = 1 + 0.005 = 1.005\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(i = 1) \quad y_2 &= y_1 + h(-y_1 + x_1 - 1) + \frac{h^2}{2}(y_1 - x_1) \\ &= 1.005 + 0.1(-1.005 + 0.1 + 1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.005 - 0.1) \\ &= 1.019025 \\ &\quad \vdots\end{aligned}$$

$$(i = 9) \quad y_{10} = 1.368541.$$

Παράδειγμα 2

Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Euler στο ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -y$$

$$y(0) = 1$$

του οποίου η λύση είναι η $y(x) = e^{-x}$. Πιο συγκεκριμένα να βρεθεί η $y(0.4)$ όταν $h = 0.1$ και $h = 0.2$.

Λύση

Έχουμε $f(x, y) = -y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_n = 0.4$, $h = 0.1$ και

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 4$$

ή $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$ και $x_4 = 0.4$.

Η μέθοδος του Euler είναι η

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

ή

$$y_{i+1} = y_i + h(-y_i), \quad i = 0, 1, \dots, 3$$

συνεπώς

$$(i = 0) \quad y_1 = y_0 - hy_0 = 1 - 0.1 \times 1 = 0.9$$

$$(i = 1) \quad y_2 = y_1 - hy_1 = 0.9 - 0.1 \times 0.9 = 0.81$$

$$(i = 2) \quad y_3 = y_2 - hy_2 = 0.81 - 0.1 \times 0.81 = 0.729$$

$$(i = 3) \quad y_4 = y_3 - hy_3 = 0.729 - 0.1 \times 0.729 = 0.6561.$$

Πίνακας υπολογισμών και σφαλμάτων

i	x_i	y_i	e^{-x_i}	$e^{-x_i} - y_i$
0	0	1.000	1.000	0
1	0.1	0.900	0.9048	0.0048
2	0.2	0.8100	0.8187	0.0087
3	0.3	0.7290	0.7408	0.0118
4	0.4	0.6561	0.6703	0.0142

Όταν $h = 0.2$ έχουμε

i	x_i	y_i	e^{-x_i}	$e^{-x_i} - y_i$
0	0	1.000	1.000	0
1	0.2	0.800	0.8187	0.0187
2	0.4	0.6400	0.6703	0.0303

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα αυξάνει όσο αυξάνει το x . Επίσης τα σφάλματα για $h = 0.2$ είναι περίπου δύο φορές μεγαλύτερα από την περίπτωση όπου $h = 0.1$. Από το αριθμητικό αυτό παράδειγμα παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι ανάλογο του h , πράγμα που αληθεύει σύμφωνα με τη θεωρία.

Η Μέθοδος των Runge-Kutta 2ης τάξης

Οι μέθοδοι των Runge-Kutta (R-K) (1895-1901) είναι οι πλέον δημοφιλείς και διακρίνονται σε κατηγορίες ανάλογα με την τάξη του σφάλματος αποκοπής. Αρχίζουμε πάλι με το ανάπτυγμα Taylor με δύο όρους

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i + \theta_i h), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (66)$$

με $0 < \theta_i < 1$. Η ιδέα της μεθόδου των R-K είναι να προσεγγίσουμε την $y'(x_i + \theta_i h)$ με ένα γραμμικό συνδυασμό τιμών της συνάρτησης f σε δύο γνωστά σημεία. Έτσι θέτουμε

$$y'(x_i + \theta_i h) = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \quad (67)$$

όπου

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (68)$$

και

$$k_2 = f(x_i + \beta_1 h, y_i + \beta_2 k_1 h) \quad (69)$$

όπου οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ θα προσδιορισθούν έτσι ώστε η (67) να είναι όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση.

Αναπτύσσοντας την (66) έχουμε

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4)$$

ή

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf_i + \frac{h^2}{2}(f_{x,i} + f_{y,i}f) + O(h^3). \quad (70)$$

Από την άλλη πλευρά χρησιμοποιώντας την (67) έχουμε

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) = y_i + h(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 f(x_i + \beta_1 h, y_i + \beta_2 k_2 h)) \\ &= y_i + \alpha_1 k_1 h + h\alpha_2 (f_i + \beta_1 h f_{x,i} + \beta_2 k_1 h f_{y,i}) + O(h^3) \\ &= y_i + h(\alpha_1 + \alpha_2) f_i + h^2 \alpha_2 (\beta_1 f_{x,i} + \beta_2 f_{y,i} f_i) + O(h^3). \end{aligned} \quad (71)$$

Συγκρίνοντας τις (71) και (70) μπορούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια με τη σύμπτωση όσο το δυνατόν περισσότερων συντελεστών των h, h^2, \dots . Έτσι για τη σύμπτωση των h και h^2 έχουμε

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_2\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = 1/2. \quad (72)$$

Το σύστημα αυτό έχει τη μονοπαραμετρική λύση

$$\alpha_1 = 1 - \lambda, \quad \alpha_2 = \lambda, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2\lambda} \quad (73)$$

όπου $\lambda \neq 0$ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός και η (66) γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + h \left[(1 - \lambda)f_i + \lambda f \left(x_i + \frac{h}{2\lambda}, y_i + \frac{h}{2\lambda}f_i \right) \right], \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (74)$$

Η μέθοδος αυτή αποτελεί τη γενική μέθοδο των R-K δεύτερης τάξης.

Βελτιωμένη μέθοδος του Euler

- Για $\lambda = 1/2$ έχουμε από την (74)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f_i + f(x_i + h, y_i + hf_i)], \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (75)$$

η οποία είναι γνωστή σαν η *βελτιωμένη μέθοδος του Euler* ή μέθοδος του Heun.

- Για $\lambda = 1$ έχουμε

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f_i \right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (76)$$

η οποία είναι γνωστή σαν η *τροποποιημένη μέθοδος του Euler*.

- Για $\lambda = \frac{3}{4}$ η (74) δίνει

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left[f_i + 3f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3}f_i \right) \right]$$

η οποία είναι γνωστή σαν η *βέλτιστη R-K δεύτερης τάξης*.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν θέλουμε να εξισώσουμε και τους συντελεστές του h^3 , τότε εκτός από τις (72) θα πρέπει να ισχύουν και οι

$$\begin{aligned}\alpha_2\beta_1^2 &= \frac{1}{3} \\ \alpha_2\beta_1\beta_2 &= \frac{1}{3} \\ \alpha_2\beta_2^2 &= \frac{1}{3}\end{aligned}\tag{77}$$

οι οποίες είναι συμβιβαστές με τις (72) αλλά για τους υπόλοιπους συντελεστές έχουμε $1/6 = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, για την τυχαία $f(x, y)$ έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια όταν ισχύουν οι (72).

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τη βελτιωμένη μέθοδο του Euler ή τη μέθοδο του Heun

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

να υπολογιστεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = -xy^2, \quad y(0) = 2$$

στο σημείο $x = 0.2$.

Λύση

$$f(x, y) = -xy^2, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2 \quad \text{και} \quad x_n = x = 0.2.$$

Για $n = 1$,

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{0.2 - 0}{1} = 0.2$$

...Παράδειγμα

και για $i = 0$ έχουμε

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))]$$

$$f(x_0, y_0) = -x_0^2 = -0 \times 2^2 = 0$$

άρα

$$y_1 = 2 + \frac{0.2}{2} [0 + (-0.2 \times 2^2)] = 1.920.$$

Για $n = 2, h = 0.1$

$$y_1 = 1.980, \quad y_2 = 1.923$$

άρα

$$y(0.2) \simeq 1.92.$$

Αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές συνθήκες

Συνήθης Διαφορική Εξίσωση 2ης τάξης

Έστω η συνήθης διαφορική εξίσωση 2ης τάξης

$$y'' = f(x) \quad (78)$$

με

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

με a, b ($a < b$), α, β γνωστά και f γνωστή συνάρτηση του x . Με την προϋπόθεση ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μία λύση ορίζουμε αυθαίρετα φυσικό αριθμό n και στη συνέχεια

$$h = \frac{b - a}{n}$$

το βήμα ολοκλήρωσης.

πίσης ορίζουμε τα σημεία

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

με

$$x_0 = a.$$

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε τις προσεγγιστικές τιμές y_i των $y(x_i)$, $1 \leq i \leq n - 1$ που να επαληθεύουν την $y'' = f(x)$ όταν γνωρίζουμε ότι

$$y_0 = \alpha \quad \text{και} \quad y_n = \beta.$$

Αντικαθιστώντας

$$y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

λαμβάνουμε

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (79)$$

Τριδιαγώνιο Γραμμικό Σύστημα

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα $n - 1$ γραμμικών εξισώσεων με $n - 1$ αγνώστους που λόγω των συνοριακών τιμών λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{array}{rcccc} 2y_1 & -y_2 & & & = & \alpha - h^2 f(x_1) \\ -y_1 & +2y_2 & -y_3 & & = & -h^2 f(x_2) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & -y_{n-3} & +2y_{n-2} & -y_{n-1} & = & -h^2 f(x_{n-2}) \\ & & -y_{n-2} & +2y_{n-1} & = & \beta - h^2 f(x_{n-1}) \end{array} \quad (80)$$

ή

$$Ay = k \quad (81)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και

$$k = \begin{bmatrix} \alpha - h^2 f(x_1) \\ -h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ -hf(x_{n-2}) \\ \beta - h^2 f(x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών 2015, Νικόλαος Μισυρλής, "Αριθμητική Ανάλυση. Ενότητα 6- Αριθμητική Παραγωγή και Ολοκλήρωση" Έκδοση:1.01 . Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:<http://opencourses.uoa.gr/courses/DI12/> .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 (1) ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

(1) <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση του ακόλουθου έργου:

" Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση : Μια αλγοριθμική προσέγγιση, αυτο-έκδοση, Αθήνα, 2009", Νικόλαος Μισυρλής.