ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 6

Αριθμητική Παραγώγιση και Ολοκλήρωση

Ν. Μ. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,

Αριθμητική Παραγώγιση

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$

- με ένα πολύπλοκο τύπο ή
- δίνεται ένας πίνακας τιμών της.

Ζητείται η $f'(x)$ (και πιθανόν οι $f''(x),\ f'''(x)$, κ.ο.κ). Τότε

$$f'(x) \simeq p_n'(x)$$

όπου $p_n(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής σε $n+1$ σημεία της $f(x)$.

Τύποι Αριθμητικής Παραγώγισης για ισαπέχοντα σημεία

Δίνονται τα σημεία

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n$$

και ζητείται ο υπολογισμός της $f'(x)$ σε ένα δεδομένο σημείο x.

Έχουμε

$$f'(x) \simeq p_n'(x)$$

Αν τώρα

$$x = x_0 + \theta h$$

και χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής του Newton με προς τα εμπρός διαφορές λαμβάνουμε διαδοχικά

$$f(x) \simeq p_n(x) = f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0$$

ή

$$f'(x) \simeq p_n'(x) = \frac{dp_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{1}{h} \frac{d}{d\theta} \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \right]$$

οπότε

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}\Big[\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta - 1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3\theta^2 - 6\theta + 2)\Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_0\Big]. \quad (1)$$

Ο ανωτέρω τύπος απλοποιείται αρκετά αν ζητείται η παράγωγος της $f(x)$ στο x_i.

Αν $x = x_0$ τότε για $\theta = 0$ έχουμε ότι

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\Big[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n f_0\Big]. \quad (2)$$

Για **n = 1**

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_0 = \frac{1}{h}[f_1 - f_0]. \quad (3)$$

Για **n = 2**

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right) = -\frac{f_2 - 4f_1 + 3f_0}{2h} \quad (4)$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε την $f'(x_1)$, τότε $\theta = 1$ και

$$f'(x_1) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 - \frac{1}{6}\Delta^3 f_0 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}\Delta^n f_0\right]$$

επομένως

για $\mathbf{n} = \mathbf{1}$

$$f'(x_1) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_0 = \frac{f_1 - f_0}{h}, \tag{5}$$

και για $\mathbf{n} = \mathbf{2}$

$$f'(x_1) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right] = \frac{f_2 - f_0}{2h}. \tag{6}$$

Χρήσιμες βοηθητικές πράξεις

$$x = x_0 + \theta h \;\Leftrightarrow\; \theta = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$f'(x) \simeq p_n'(\theta(x)) = \frac{dp_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

...Χρήσιμες βοηθητικές πράξεις...

Είναι

$$\binom{\theta}{n} = \frac{1}{n!}(\theta - n + 1)(\theta - n + 2)\cdots\theta =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\theta - (n-1)\right]\left[\theta - (n-2)\right]\cdots\theta$$

΄Αρα

$$\frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{n!}\left[\theta - (n-1)\right]\left[\theta - (n-2)\right]\cdots\theta\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\prod_{j=0}^{n-1}}_{j\neq i}(\theta - j)$$

Για $\theta = 0$ είναι

$$\frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Big|_{\theta=0} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\prod_{j=0}^{n-1}}_{j\neq i}(-j) = \frac{1}{n!}(-1)(-2)\cdots(-n+1)$$

Για $\theta = 0$ είναι

$$\frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Big|_{\theta=0} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\prod_{j=0}^{n-1}}_{j\neq i}(-j) = \frac{1}{n!}(-1)(-2)\cdots(-n+1)$$

άρα τελικά

$$\frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Big|_{\theta=0} = \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Για $\theta = 1$ είναι

$$\frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Big|_{\theta=1} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\prod_{j=0}^{n-1}}_{j\neq i}(1-j)$$

άρα τελικά

$$\frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Big|_{\theta=1} = \frac{1}{n!}(1-0)(1-2)(1-3)\cdots[1-(n-1)]$$

$$= \frac{1}{n!}(-1)^{n-2}(n-2)! = (-1)^{n-2}\frac{1}{n(n-1)}, \qquad n \geq 2$$

Τύποι για τον υπολογισμό των $f''(x),\ f'''(x), \cdots$

Υπολογισμός της δεύτερης παράγωγου $f''(x)$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &\simeq \frac{1}{h}\frac{d}{dx}\Big[\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta - 1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3\theta^2 - 6\theta + 2)\Delta^3 f_0 + \cdots \\
&\qquad + \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_0\Big] \\
&= \frac{1}{h^2}\frac{d}{d\theta}\Big[\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta - 1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3\theta^2 - 6\theta + 2)\Delta^3 f_0 + \cdots \\
&\qquad + \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_0\Big]. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
f''(x) \simeq \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^2 f_0 + (\theta - 1)\Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{d^2}{d\theta^2}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_0\Big]. \qquad (8)
$$

Άρα για $x = x_0$ (δηλ. $\theta = 0$) και $n = 2$ έχουμε

$$
f''(x_0) \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0 = \frac{1}{h^2}(f_2 - 2f_1 + f_0). \qquad (9)
$$

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας όλες τις πληροφορίες του πίνακα

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	6	15

να βρεθούν οι προσεγγιστικές τιμές $f'(1.5)$ και $f''(2.5)$.

Τα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 3$ είναι ισαπέχοντα με βήμα $h = 1$.

Για τον υπολογισμό της $f'(1.5)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1).
Έχουμε

$$\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.5 - 0}{1} = 1.5$$

και επειδή έχουμε 4 σημεία είναι $n = 3$.

Πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0			
		1		
1	1		4	
		5		0
2	6			
		9	4	
3	15			

οπότε για την $f'(x)$ έχουμε από την (1) ότι

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta - 1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3\theta^2 - 6\theta + 2)\Delta^3 f_0\right]$$

και

$$f'(1.5) \simeq \frac{1}{h}\left[1 + \frac{1}{2}(2 \cdot 1.5 - 1) \cdot 4 + \frac{1}{6}(3 \cdot 1.5^2 - 6 \cdot 1.5 + 2) \cdot 0\right] = 5.$$

Για τον υπολογισμό της $f''(2.5)$ από τον τύπο (8) προκύπτει

$$f''(x) \simeq \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_0 + (\theta - 1)\Delta^3 f_0] = \frac{1}{1^2}[4 + (2.5 - 1) \cdot 0] = 4.$$

Αριθμητική Παραγώγιση με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

Παράδειγμα 1

Να προσδιοριστούν οι συντελεστές w_{-1} και w_1 στον παρακάτω προσεγγιστικό τύπο της αριθμητικής παραγώγισης

$$f'(x_0) \simeq w_{-1}f_{-1} + w_1 f_1 \tag{10}$$

με $f_i = f(x_0 + ih)$, $i = -1,\ 0,\ 1,$ ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής.

Λύση

Για να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους w_{-1} και w_1 θα απαιτήσουμε ο τύπος που δόθηκε να είναι ακριβής για $f(x) = 1,\ x,\ x^2, \ldots$

Για $f(x) = 1$ έχουμε $f'(x) = 0$ οπότε το πρώτο μέλος του τύπου (10) γίνεται

$$A = 0$$

ενώ το δεύτερο μέλος γίνεται

$$B = w_{-1} + w_1.$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη βρίσκουμε

$$w_{-1} + w_1 = 0. \tag{11}$$

Για $f(x) = x$ έχουμε $f'(x) = 1$ οπότε

$$A = 1$$

και

$$B = w_{-1}(x_0 - h) + w_1(x_0 + h) = (w_{-1} + w_1)x_0 + (-w_{-1} + w_1)h$$

εξισώνοντας $(A = B)$ προκύπτει

$$(w_{-1} + w_1)x_0 + (-w_{-1} + w_1)h = 1$$

λόγω όμως της (11) έχουμε

$$(-w_{-1} + w_1)h = 1. \tag{12}$$

Από τις (11) και (12) βρίσκουμε αμέσως ότι

$$w_1 = -w_{-1} = \frac{1}{2h}$$

οπότε ο τύπος (10) γίνεται

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}(f_1 - f_{-1}). \tag{13}$$

Συνεπώς, ο τύπος (13) είναι ακριβής **για πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού**.

Για να διαπιστώσουμε αν είναι ακριβής και για πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού αρκεί να συνεχίσουμε την προηγούμενη διαδικασία για $f(x) = x^2,\ x^3,\ \ldots$.
Οπότε, για $f(x) = x^2$, έχουμε $f'(x) = 2x$ και

$$A = 2x_0$$

$$B = \frac{1}{2h}\left[(x_0 + h)^2 - (x_0 - h)^2\right] = 2x_0.$$

Άρα A ≡ B, οπότε είναι ακριβής και για δευτέρου βαθμού πολυώνυμα.
για $f(x) = x^3$, έχουμε $f'(x) = 3x^2$ και βρίσκουμε

$$A = 3x_0^2$$

$$B = \frac{1}{2h}\left[(x_0 + h)^3 - (x_0 - h)^3\right] = 3x_0^2 + h^2.$$

Άρα **A ≠ B**, οπότε **δεν είναι ακριβής για τρίτου βαθμού πολυώνυμα**.

Παράδειγμα 2

Να προσδιοριστούν οι συντελεστές w_0, w_1 και w_2 στο προσεγγιστικό τύπο της αριθμητικής παραγωγίσεως

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left(w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2\right)$$

με $f_i = f(x_0 + ih)$, $i = 0,\ 1,\ 2$ ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής.

Λύση

Για να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους w_0, w_1 και w_2 θα απαιτήσουμε ο τύπος που δόθηκε να είναι ακριβής για $f(x) = 1,\ x,\ x^2, \ldots$ έτσι ώστε να μπορέσουμε να σχηματίσουμε τρεις εξισώσεις που να περιέχουν τους τρεις αγνώστους w_0, w_1 και w_2.

Για $f(x) = 1$ έχουμε

$$A = f'(x_0) = 0$$

και

$$B = \frac{1}{h}\left(w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2\right) = \frac{1}{h}\left(w_0 + w_1 + w_2\right)$$

Επειδή απαιτούμε $A \equiv B$ προκύπτει αμέσως ότι

$$w_0 + w_1 + w_2 = 0. \tag{14}$$

Για $f(x) = x$ έχουμε

$$A = f'(x_0) = 1$$

και

$$B = \frac{1}{h}[w_0 x_0 + w_1(x_0 + h) + w_2(x_0 + 2h)]$$

ή

$$B = \frac{1}{h}[x_0(w_0 + w_1 + w_2) + h(w_1 + 2w_2)$$

λόγω όμως της (14) έχουμε $B = w_1 + 2w_2$ άρα

$$w_1 + 2w_2 = 1. \tag{15}$$

Για $f(x) = x^2$ έχουμε

$$A = f'(x_0) = 2x_0$$

και

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{h}[w_0 x_0^2 + w_1(x_0+h)^2 + w_2(x_0+2h)^2] \\ &= \frac{1}{h}[x_0^2(w_0+w_1+w_2) + 2x_0 h(w_1+2w_2) \\ &\quad + h^2(w_1+4w_2)] \\ &= 2x_0 + h(w_1+4w_2), \text{ λόγω των } (14) \text{ και } (15) \end{aligned}$$

άρα

$$2x_0 + h(w_1+4w_2) = 2x_0$$

ή

$$w_1 + 4w_2 = 0. \tag{16}$$

Λύνοντας τις (14), (15) και (16) βρίσκουμε

$$w_0 = -\frac{3}{2},\ w_1 = 2,\ w_2 = -\frac{1}{2}.$$

Με βάση τις τιμές αυτές ο τύπος που δόθηκε γίνεται

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}(3f_0 - 4f_1 + f_2).$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος που δόθηκε είναι **ακριβής** **για πολυώνυμα μέχρι δευτέρου βαθμού τουλάχιστον**.

Σφάλμα αποκοπής της πρώτης παραγώγου

Το σφάλμα αποκοπής E_n στον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου στην περίπτωση των $n+1$ σημείων παρεμβολής είναι

$$E_n = f'(x) - p_n'(x) \tag{17}$$

όπου

$$f(x) = p_n(x) + f[x_0,\ x_1, \ldots x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{18}$$

Επειδή όμως

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} g[x,\ x+h] = g[x,\ x]$$

έχουμε

$$\frac{d}{dx} f[x_0,\ x_1, \ldots, x_n, x] = f[x_0,\ x_1, \ldots, x_n, x, x].$$

Παραγωγίζοντας την (18) έχουμε

$$f'(x) = p_n'(x) + f[x_0,\ x_1, \ldots, x_n, x, x]\psi_n(x) + f[x_0,\ x_1, \ldots, x_n, x]\psi_n'(x)$$

όπου

$$\psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{19}$$

ή

$$f'(x) = p_n'(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\psi_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi_n'(x) \tag{20}$$

όπου $\xi_1 = \xi_1(x),\ \xi = \xi(x) \in I,\ f(x)C^{n+2}(I)$ και

$$I = [\min\{x_0,\ x_1, \ldots, x_n, x\},\ \max\{x_0,\ x_1, \ldots, x_n, x\}].$$

Συνεπώς, λόγω της (20) η (17) γράφεται

$$E_n = \psi_n(x)\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} + \psi_n'(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{21}$$

Ο ανωτέρω τύπος μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά όταν το τυχόν σημείο x είναι ένα από τα σημεία παρεμβολής $x_k,\ 0 \le k \le n$.
Στην περίπτωση αυτή η (21) γίνεται

$$E_n = \underbrace{\prod_{i=0}^{n}}_{i \neq k} (x_k - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{22}$$

όπου

$$\xi = \xi(x) = I = [\min\{x_0,\ x_1, \ldots x_n\},\ \max\{x_0,\ \ x_1, \ldots\ x_n\}]. \tag{23}$$

Πράγματι,

$$\psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

ή

$$\psi_n'(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) + (x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n) + \cdots + \\ +(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

οπότε όταν $x = x_k$ έχουμε

$$\psi_n'(x_k) = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$$

ή

$$\psi_n'(x_k) = \prod_{i=0}^{n} (x_k - x_i).$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το σφάλμα αποκοπής στην περίπτωση χρήσης του τύπου

$$f'(x_0) \simeq \frac{f_1 - f_0}{h}.$$

Λύση

Με εφαρμογή του τύπου (22) με $n = 1,\ x_k = x_0$ και έχοντας υπόψη ότι τα σημεία παρεμβολής ισαπέχουν βρίσκουμε

$$E_1 = \frac{1}{(1+1)!} f^{(1+1)}(\xi) \underbrace{\prod_{i=0}^{1}}_{i \neq 0} (x_0 - x_i),$$

όπου

$$\xi \in I = [\min\{x_0,\ x_1\},\ \max\{x_0,\ x_1\}].$$

Από τα ανωτέρω προκύπτει

$$E_1 = -\frac{h}{2!} f^{(2)}(\xi), \qquad \xi \in (x_0,\ x_1).$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα 1, το σφάλμα αποκοπής στην περίπτωση χρήσης του τύπου

$$f'(x_0) \simeq -\frac{f_2 - 4f_1 + 3f_0}{2h}$$

Λύση

Εργαζόμαστε παρόμοια με $n = 2$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \\ &= \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(-h)(-2h) \\ &= \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi), \qquad \xi \in (x_0,\ x_2). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Για την εύρεση της πρώτης παραγώγου του πολυωνύμου $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ στο σημείο $x = 1.5$ χρησιμοποιείται ο τύπος (4) με σημεία παρεμβολής τα $x_0 = 0, x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Να βρεθεί, εφαρμόζοντας τον τύπο (21), το αντίστοιχο σφάλμα αποκοπής.

Λύση

Επειδή το $x = 1.5$ δεν είναι σημείο παρεμβολής θα εφαρμοστεί ο τύπος (21) για $n = 2$ και $x = 1.5$. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, έχουμε αμέσως από την αναλυτική έκφρασή της ότι $f^{(3)}(\xi) = 18$ και $f^{(4)}(\xi_1) = 0$. Επομένως ο τύπος (21) δίνει

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{3!} \cdot 18[(x-0)(x-1)(x-2)]' \,|_{x=1.5} \\ &= 3(x^3 - 3x^2 + 2x)' \,|_{x=1.5} \\ &= 3(3x^2 - 6x + 2) \,|_{x=1.5} \\ &= 3(3 \cdot (1.5)^2 - 6 \cdot (1.5) + 2) = -0.75. \end{aligned}$$

Σφάλμα **αποκοπής** της παραγώγου στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

Έστω ότι ζητάμε να βρούμε το σφάλμα **αποκοπής** του τύπου (13), δηλαδή του

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}(f_1 - f_{-1}). \tag{24}$$

Όπως διαπιστώθηκε προηγούμενα, ο τύπος αυτός είναι ακριβής μέχρι και για δευτέρου βαθμού πολυώνυμα, συνεπώς με βάση τον τύπο (22) συμπεραίνουμε ότι το σφάλμα αποκοπής του είναι ανάλογο προς την $f'''(\xi)$, δηλαδή θα ισχύει

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f_1 - f_{-1}) + Af'''(\xi), \qquad \xi \in (x_{-1},\ x_1). \tag{25}$$

Αν τώρα θέσουμε $f(x) = x^3$, θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την σταθερά A. Πράγματι, επειδή $f'(x) = 3x^2$ και $f'''(x) = 6$, ο τύπος (25) γράφεται

$$3x_0^2 = \frac{1}{2h}(x_1^3 - x_{-1}^3) + A \cdot 6$$

όπου $x_{-1} = x_0 - h$ και $x_1 = x_0 + h$, οπότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$3x_0^2 = \frac{1}{2h}[(x_0 + h)^3 - (x_0 - h)^3] + 6A$$

ή

$$12hA = 6x_0h^2 - 2h(3x_0^2 + h^2)$$

ή

$$A = -\frac{h^2}{6}.$$

Συνεπώς η (25) γράφεται τελικά σαν

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f_1 - f_{-1}) - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \qquad \xi \in (x_{-1},\ x_1). \tag{26}$$

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε για την εύρεση του σφάλματος αποκοπής για τον άλλο τύπο.

Σφάλμα την Αριθμητική Παραγώγιση

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό θέμα στη μελέτη του προβλήματος της αριθμητικής παραγώγισης είναι η επίδραση του σφάλματος **στρογγύλευσης**. Χάριν απλότητας, ας μελετήσουμε το σφάλμα στρογγύλευσης στον τύπο

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi). \tag{27}$$

Ας υποθέσουμε ότι κατά τον υπολογισμό των $f(x_0+h)$ και $f(x_0-h)$ υπεισέρχονται σφάλματα στρογγύλευσης ε_1 και ε_{-1}, τότε οι προσεγγιστικές τιμές $\overline{f}_1$ και $\overline{f}_{-1}$ δίνονται από τους τύπους

$$\overline{f}_i = f_i - \varepsilon_i, \quad i = -1,\ 1 \tag{28}$$

όπου $f_i, \quad i = -1,\ 1$ συμβολίζουν τις ακριβείς τιμές της $f(x)$ στα σημεία $x_i, \quad i = -1,\ 1.$

Το σφάλμα για τον υπολογισμό της $f'(x_0)$ δίνεται από την ποσότητα

$$E = f'(x_0) - \frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_{-1}}{2h}$$

ή λόγω της (28)

$$E = \left[f'(x_0) - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right] + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h}$$

και τελικά, λόγω της (27), λαμβάνουμε

$$E = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h}. \tag{29}$$

Από την (29) παρατηρούμε ότι το σφάλμα έχει ένα τμήμα που οφείλεται στο σφάλμα **στρογγύλευσης** και ένα τμήμα που οφείλεται στο σφάλμα **αποκοπής**. Υποθέτοντες ότι τα σφάλματα στρογγύλευσης είναι φραγμένα, δηλαδή

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon \quad \text{και} \quad |f^{(3)}(\xi)| < M,$$

η (29) γράφεται

$$|E| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M = g(h). \tag{30}$$

Για την ελαχιστοποίηση του $|E|$ είναι φανερό ότι αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η $g(h)$ ως προς h. Έτσι, από την $g'(h) = 0$ προκύπτει

$$h = \left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Στην πράξη όμως δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την ακριβή βέλτιστη τιμή του h αφού δεν γνωρίζουμε το M. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τους άλλους τύπους αριθμητικής παραγώγισης. Αξίζει λοιπόν να σημειωθεί ότι η αριθμητική παραγώγιση είναι **ασταθής** καθόσον μικρές τιμές του h ελαπώνουν το σφάλμα **αποκοπής** αλλά συγχρόνως αυξάνουν το σφάλμα **στρογγύλευσης**.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015, Νικόλαος Μισυρλής, "Αριθμητική Ανάλυση. Ενότητα 6- Αριθμητική Παραγώγιση και Ολοκλήρωση" Έκδοση:1.01 . Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:`http://opencourses.uoa.gr/courses/DI12/` .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 (1) ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

(1) `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/`

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση του ακόλουθου έργου:
" Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση : Μια αλγοριθμική προσέγγιση, αυτο-έκδοση, Αθήνα, 2009", Νικόλαος Μισυρλής.