ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 5

Προσέγγιση Συναρτήσεων

Ν. Μ. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,

Παρεμβολή

Ας υποθέσουμε ότι δίνονται οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ στα $n+1$ σημεία, έστω τα

$$x_i, \quad i = 0(1)n$$

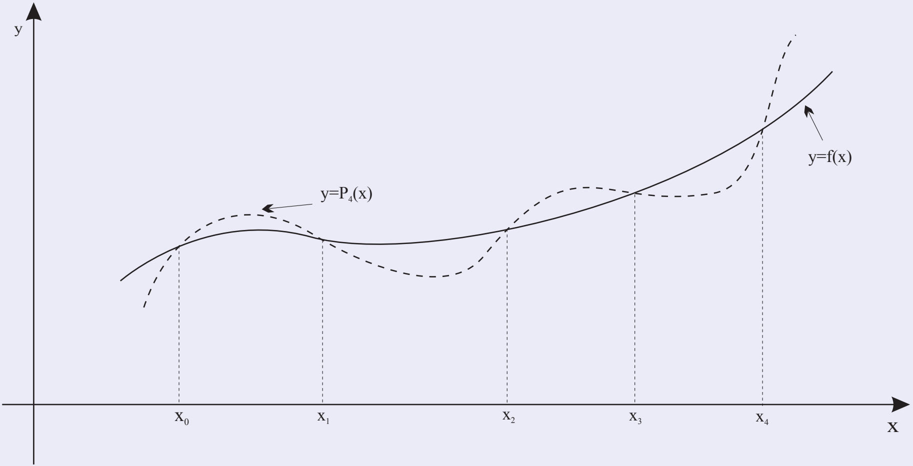
και ζητούμε να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο $p_n(x)$, βαθμού το πολύ n, τέτοιο ώστε

$$p_n(x_i) = f(x_i)$$

Το $p_n(x)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο γιατί αν δύο πολυώνυμα βαθμού το πολύ n λαμβάνουν τις ίδιες τιμές για $n+1$ διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής τους τότε αυτά ταυτίζονται.

Η εύρεση του πολυωνύμου παρεμβολής $p_n(x)$ μας επιτρέπει να βρίσκουμε προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο οποιοδήποτε σημείο x. Οι απλούστεροι τύποι παρεμβολής είναι εκείνοι στους οποίους τα σημεία παρεμβολής **ισαπέχουν**.

Σχήμα 1



Σχήμα: Πολυωνυμική Παρεμβολή

Πεπερασμένες διαφορές

Προς τα εμπρός διαφορές

Έστω ότι έχουμε ένα πίνακα τιμών $(x_i, f(x_i))$ μιας συνάρτησης $f(x)$.

Οι **πρώτης τάξης** προς τα εμπρός διαφορές στο σημείο x_n, ορίζονται από τις σχέσεις

$$\Delta f_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n \tag{1}$$

και γενικά οι προς τα εμπρός διαφορές **k τάξης** ορίζονται από τις

$$\Delta^k f_n = \Delta\left(\Delta^{k-1} f_n\right) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n. \tag{2}$$

Προς τα πίσω διαφορές

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορές

$$\nabla f_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f_n - f_{n-1} \tag{3}$$

ή

$$\nabla^k f_n = \nabla\left(\nabla^{k-1} f_n\right) = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}. \tag{4}$$

Κεντρικές διαφορές

Τέλος οι **πρώτης τάξης** κεντρικές διαφορές, στο σημείο $x_{n+1/2}$ ορίζονται από τη σχέση

$$\delta f_{n+1/2} = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n. \tag{5}$$

Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι

$$\Delta f_n = \nabla f_{n+1} = \delta f_{n+1/2} \tag{6}$$

και επαγωγικά

$$\Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+k/2}. \tag{7}$$

Κατασκευή των πινάκων διαφορών

1. Πίνακας **προς τα εμπρός** διαφορών

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_0 & f_0 & & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & & \\
 & & & \Delta^2 f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & & \Delta^3 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & & & \\
 & & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^4 f_0 & \\
x_2 & f_2 & & & \Delta^3 f_1 & & \\
 & & \Delta f_2 & & & & \\
 & & & \Delta^2 f_2 & & & \\
x_3 & f_3 & & & & & \\
 & & \Delta f_3 & & & & \\
x_4 & f_4 & & & & &
\end{array}
$$

2. Πίνακας **προς τα πίσω** διαφορών

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{-4} & f_{-4} & & & & \\
 & & \nabla f_{-3} & & & \\
x_{-3} & f_{-3} & & \nabla^2 f_{-2} & & \\
 & & \nabla f_{-2} & & \nabla^3 f_{-1} & \\
x_{-2} & f_{-2} & & \nabla^2 f_{-1} & & \nabla^4 f_0 \\
 & & \nabla f_{-1} & & \nabla^3 f_0 & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & & \\
 & & \nabla f_0 & & & \\
x_0 & f_0 & & & &
\end{array}
$$

3. Πίνακας **κεντρικών** διαφορών

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{n-2} & f_{n-2} & & & & \\
 & & \delta f_{n-3/2} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \delta^2 f_{n-1} & & \\
 & & \delta f_{n-1/2} & & \delta^3 f_{n-1/2} & \\
x_n & f_n & & \delta^2 f_n & & \delta^4 f_n \\
 & & \delta f_{n+1/2} & & \delta^3 f_{n+1/2} & \\
x_{n+1} & f_{n+1} & & \delta^2 f_{n+1} & & \\
 & & \delta f_{n+3/2} & & & \\
x_{n+2} & f_{n+2}* & & & &
\end{array}
$$

Παράδειγμα

Δίνονται οι τιμές της $\mathbf{f(x) = x^3}$ στα σημεία $1, 2, 3$ και 4. Να σχηματιστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός (και προς τα πίσω) διαφορών.

i	x	$f(x)$	$\Delta f / \nabla f$	$\Delta^2 f / \nabla^2 f$	$\Delta^3 f / \nabla^3 f$
0	1	1			
			7		
1	2	8		12	
			19		6
2	3	27		18	
			37		
3	4	64			

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι τα σημεία x_i, $i = 0(1)n$ ισαπέχουν μεταξύ τους.

Θεώρημα

Οι πεπερασμένες διαφορές n τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι σταθερές.

Πόρισμα

Οι πεπερασμένες διαφορές $n+1$ και ανώτερης τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι μηδέν.

Τελεστές

Τα σύμβολα Δ, ∇ και δ καλούνται τελεστές διαφορών. Οι τελεστές αυτοί είναι **γραμμικοί** γιατί ικανοποιούν τη σχέση

$$T\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha T f(x) + \beta T g(x)$$

όπου $T = \Delta, \nabla$ και δ.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί και άλλος ένας **γραμμικός** τελεστής, ο οποίος καλείται τελεστής μετατόπισης και ορίζεται από τη σχέση

$$E f(x) = f(x+h). \tag{8}$$

Είναι δυνατόν να αποδειχτεί ότι με τους ανωτέρω τελεστές μπορούμε να εκτελέσουμε σχεδόν όλες τις πράξεις της Άλγεβρας (λογισμός τελεστών).

Επίσης ο τελεστής μετατόπισης μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή του Δ ή του ∇. Έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) = E f(x) - f(x) \\ &= (E-1) f(x) \end{aligned}$$

Σχέσεις μεταξύ Τελεστών

Είναι

$$\Delta = E - 1. \tag{9}$$

Επιπλέον,

$$\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x) = (E-1)f(x)$$

αλλά

$$\nabla f(x+h) = \nabla E f(x)$$

άρα

$$\nabla E = E - 1$$

ή

$$(1-\nabla)E = 1$$

ή

$$E = (1-\nabla)^{-1}. \tag{10}$$

Πολυώνυμο παρεμβολής για ισαπέχοντα σημεία

Πολυώνυμο παρεμβολής με προς τα εμπρός διαφορές του Newton

Έστω ότι $x_i = x_0 + ih, \; i = 0(1)n$ είναι $n+1$ γνωστά σημεία παρεμβολής και $f(x)$ η ζητούμενη τιμή της συνάρτησης στο τυχόν σημείο x, τότε είναι

$$x = x_0 + \theta h$$

ή

$$\theta = (x - x_0)/h \tag{11}$$

τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \theta h) = E^{\theta} f(x_0) = (1 + \Delta)^{\theta} f_0 && (12) \\ &= \left[1 + \binom{\theta}{1} \Delta + \binom{\theta}{2} \Delta^2 + \ldots \right] f_0 && (13) \end{aligned}$$

ή

$$f(x) = f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \ldots \tag{14}$$

όπου

$$\left(\begin{array}{c}\theta\\ s\end{array}\right)=\frac{\theta!}{s!(\theta-s)!}=\frac{\theta(\theta-1)\ldots(\theta-s+1)}{s!}$$

ή

$$f(x)=p_n(x)+R_{n+1}(x), \tag{15}$$

όπου $p_n(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής που δίνεται από την έκφραση

$$p_n(x)=f_0+\left(\begin{array}{c}\theta\\ 1\end{array}\right)\Delta f_0+\left(\begin{array}{c}\theta\\ 2\end{array}\right)\Delta^2 f_0+\ldots+\left(\begin{array}{c}\theta\\ n\end{array}\right)\Delta^n f_0 \tag{16}$$

και R_{n+1} το σφάλμα. Ο τύπος που βρήκαμε είναι τελικά ο

$$f(x)\simeq p_n(x). \tag{17}$$

Για το τυχόν x_i, $i=0(1)n$ έχουμε ότι

$$p_n(x_i)=f_0+\left(\begin{array}{c}i\\ 1\end{array}\right)\Delta f_0+\ldots+\left(\begin{array}{c}i\\ i\end{array}\right)\Delta^i f_0$$

$$
\begin{aligned}
p_n(x_i) &= \left[1 + \binom{i}{1}\Delta + \binom{i}{2}\Delta^2 + \ldots + \binom{i}{i}\Delta^i\right] f_0 \\
&= (1+\Delta)^i f_0 = E^i f_0 = f(x_0 + ih) = f(x_i),
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$
p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0(1)n. \tag{18}
$$

Άρα το $p_n(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής.

Πολυώνυμο παρεμβολής με προς τα πίσω διαφορές του Newton

Έστω $x_i = x_0 + ih, \quad i = -n(1)0$ τα $n+1$ ισαπέχοντα σημεία της συνάρτησης $f(x)$ (με x_0 συμβολίζουμε τώρα το τελευταίο σημείο). Τότε είναι

$$x = x_0 - \theta h$$

ή

$$\theta = (x_0 - x)/h \tag{19}$$

τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 - \theta h) = E^{-\theta} f(x_0) = (1 - \nabla)^{\theta} f(x_0) \\ &= \left[1 - \binom{\theta}{1} \nabla + \binom{\theta}{2} \nabla^2 - \ldots + (-1)^n \binom{\theta}{n} \nabla^n + \ldots\right] f_0 \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών είναι το

$$p_n(x) = f_0 - \theta \nabla f_0 + \frac{\theta(\theta - 1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \ldots + (-1)^n \binom{\theta}{n} \nabla^n f_0. \tag{20}$$

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας τιμών της $f(x) = 1 + x^3$

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	9	28

Να βρεθεί η προσεγγιστική τιμή $f(1.5)$.

Λύση

Ας υποθέσουμε καταρχήν ότι χρησιμοποιούμε όλα τα σημεία του πίνακα, τότε το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι το πολύ 3ου βαθμού και θα συμπίπτει με την $f(x)$, αφού και η $f(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού. Πράγματι,

$$x_0 = 0, \quad h = 1, \quad \theta = \frac{x - x_0}{h} = x$$

Πολυώνυμο παρεμβολής με προς τα εμπρός διαφορές του Newton

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= f_0 + \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} \Delta f_0 + \begin{pmatrix} \theta \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 f_0 + \begin{pmatrix} \theta \\ 3 \end{pmatrix} \Delta^3 f_0 \\
&= f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0 .
\end{aligned}
$$

Για τον υπολογισμό των Δf_0, $\Delta^2 f_0$ και $\Delta^3 f_0$ κατασκευάζουμε τον πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών για τα δεδομένα σημεία. Έχουμε

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	1			
		1		
1	2		6	
		7		6
2	9		12	
		19		
3	28			

όπου $f_0 = 1, \quad \Delta f_0 = 1, \quad \Delta^2 f_0 = 6$ και $\Delta^3 f_0 = 6$. Άρα

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1 + x \cdot 1 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 6 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 6 \\ &= 1 + x^3 \end{aligned}$$

συνεπώς

$$f(1.5) = p_3(1.5) = 4.375.$$

Πολυώνυμο παρεμβολής με προς τα πίσω διαφορές του Newton

Τότε το πολυώνυμο παρεμβολής θα συμπίπτει με αυτό που βρέθηκε αφού (το πολυώνυμο παρεμβολής) είναι **μοναδικό**. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών έχουμε

$$p_3(x) = f_0 - \theta\nabla f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\nabla^2 f_0 - \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{6}\nabla^3 f_0$$

όπου τώρα $f_0 = 28$, $\nabla f_0 = 19$, $\nabla^2 f_0 = 12$ και $\nabla^3 f_0 = 6$. Επίσης είναι $x_0 = 3$ και $\theta = 3 - x$ συνεπώς

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 28 - (3-x)\cdot 19 + \frac{(3-x)(2-x)}{2}\cdot 12 - \frac{(3-x)(2-x)(1-x)}{6}\cdot 6 \\ &= 1 + x^3 \end{aligned}$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε μόνον τα **τρία πρώτα σημεία**, τότε έχουμε

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 6$$

ή

$$p_2(1.5) = 4.75.$$

Επίσης, αν χρησιμοποιήσουμε τα **τρία τελευταία σημεία**, τότε $x_0 = 1, \theta = 0.5$ έχουμε

$$\hat{p}_2(1.5) = 2 + 0.5 \cdot 7 + \frac{0.5 \cdot (0.5-1)}{2} \cdot 12 = 4.000.$$

Παρατηρούμε ότι το απόλυτο σφάλμα $|f(1.5) - p_2(1.5)| = |f(1.5) - \hat{p}_2(1.5)| = 0.375$ είναι το ίδιο στις δύο τελευταίες περιπτώσεις. Συνεπώς η προσέγγιση της $f(x)$ δεν εξαρτάται από το πόσο πλησίον του x θα επιλεγεί το x_0.

Πολυώνυμο παρεμβολής για μη ισαπέχοντα σημεία

Τύπος παρεμβολής του Lagrange

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα σημεία παρεμβολής δεν ισαπέχουν. Για να βρούμε το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange ξεκινάμε από τις σχέσεις

$$p_n(x_j) = f_j, \quad j = 0(1)n. \tag{21}$$

Επίσης το $p_n(x)$ μπορεί να εκφρασθεί σαν

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i \tag{22}$$

όπου $L_i(x)$, $i = 0(1)n$ πολυώνυμα βαθμού $\leq n$ τα οποία καλούνται συντελεστές του Lagrange και ικανοποιούν τις σχέσεις

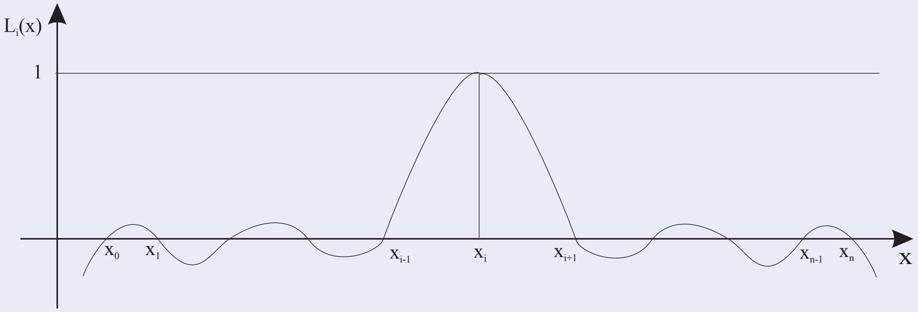
$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0(1)n. \tag{23}$$

Το $p_n(x)$ είναι το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής, αφού ισχύει

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x_i) f_j = L_i(x_i) f_i = f_i, \quad i = 0(1)n.$$

Πολυώνυμο παρεμβολής για μη ισαπέχοντα σημεία

Πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange



Σχήμα: Γραφική παράσταση

Τα $x_j, j = 0(1)n, j \neq i$ είναι οι ρίζες του $L_i(x)$ άρα

$$L_i(x) = A_i(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n).$$

Ο προσδιορισμός της A_i γίνεται με τη βοήθεια της πρώτης από τις σχέσεις

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0(1)n. \tag{24}$$

έτσι

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \tag{25}$$

ή

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0(1)n. \tag{26}$$

Έτσι ο τύπος παρεμβολής του Lagrange είναι ο

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{27}$$

όπου το

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i$$

και $R_{n+1}(x)$ το σφάλμα, συνεπώς

$$f(x) \simeq p_n(x). \tag{28}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πολυώνυμο του Lagrange $p_2(x)$ για το οποίο

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$$

Είναι

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f_i = L_0(x) \cdot 1 + L_1(x) \cdot 2 + L_2(x) \cdot 4$$

όπου οι συντελεστές του Lagrange είναι

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-1}, \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2},
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - 2x(x-2) + \frac{1}{2}4x(x-1) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Οι ανωτέρω υπολογισμοί θα αυξηθούν σημαντικά αν θέλουμε να υπολογίσουμε και άλλες τιμές x. Επίσης, η πρόσθεση και άλλων σημείων παρεμβολής, σε μια προσπάθεια να αυξηθεί η ακρίβεια, θα αλλάξει όλους τους συντελεστές του Lagrange και έτσι όλοι οι προηγούμενοι υπολογισμοί *"χάνονται"*.

Το σφάλμα στην πολυωνυμική παρεμβολή

Μετά την εύρεση του πολυωνύμου παρεμβολής $p_n(x)$, που διέρχεται από τα $n+1$ σημεία x_i, $i = 0(1)n$, το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής : Ποιό είναι το σφάλμα $e(x) = f(x) - p_n(x)$ για ένα οποιοδήποτε σημείο $x \neq x_i, i = 0(1)n, x \in [a, b]$;

Θεώρημα

Αν $p_n(x)$ είναι το πολυώνυμο το πολύ n βαθμού που παρεμβάλει την $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ στα $n+1$ διακεκριμένα σημεία $x_i, i = 0(1)n$ στο $[a, b]$, τότε για κάθε σημείο $x \in [a, b]$

$$f(x) = p_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{29}$$

όπου $\xi \in (a, b)$.

Απόδειξη

Επειδή $f(x_i) = p_n(x_i), i = 0(1)n$, τα σημεία $x_i, i = 0(1)n$ είναι ρίζες της $f(x) - p_n(x)$ άρα

$$f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)A(x). \tag{30}$$

Έστω $x \in [a, b]$ οποιοδήποτε σταθερό σημείο διάφορο των x_i, $i = 0(1)n$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\Phi(t) = f(t) - p_n(t) - (t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n) A(x).$$

Οι ρίζες της $\Phi(t)$ είναι τα $n + 2$ σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ και x.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle η $\Phi^{'}$ έχει τουλάχιστον $n + 1$ ρίζες,

η $\Phi^{''}(x)$ έχει τουλάχιστον n ρίζες κ.ο.κ.

Τέλος, η $\Phi^{(n+1)}(x)$ πρέπει να έχει τουλάχιστον μια ρίζα $\xi \in [a, b]$. Τότε

$$\begin{aligned} \Phi^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \left(t^{n+1} + \text{όροι μικρότερων δυνάμεων}\right)^{(n+1)} A(x) \\ &= f^{(n+1)}(t) - 0 - (n+1)! A(x). \end{aligned}$$

Για $t = \xi$ λαμβάνουμε

$$\Phi^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!A(x)$$

ή

$$A(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

οπότε αντικαθιστώντας ολοκληρώνεται η απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος.

Το σφάλμα στην πολυωνυμική παρεμβολή

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{31}$$

ή

$$f(x) \simeq p_n(x) \tag{32}$$

και $R_{n+1}(x)$ το σφάλμα με τύπο

$$R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{33}$$

όπου $\xi \in (a, b)$.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η $f(x) = e^x$ για $x \in [0, 1]$. Να υπολογιστεί η απόσταση h των σημείων έτσι ώστε να προσεγγίζεται η $f(x)$ με γραμμική παρεμβολή (δηλ. με πολυώνυμο παρεμβολής **1ου βαθμού**) και με ακρίβεια d δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

Το σφάλμα στη γραμμική παρεμβολή της $f(x)$ στα x_0 και x_1 δίνεται από την

$$e^x - p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} e^{\xi}$$

για κάποιο ξ μεταξύ του ελάχιστου και του μέγιστου των x_0, x_1 και x. Υποθέτουμε ότι $x_0 < x < x_1$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} e^{x_0} \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} e^{x_1}.$$

Επίσης

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} \frac{(x_1 - x)(x - x_0))}{2} = \frac{h^2}{8}, \quad h = x_1 - x_0.$$

Επιπλέον, $e^{x_1} \leq e$ στο $[0, 1]$ και

$$|e^x - p_1(x)| \leq \frac{h^2 e}{8}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο των x_0, x_1 και x. Αν επιθυμούμε ακρίβεια d δεκαδικών ψηφίων τότε το h θα επιλεγεί έτσι ώστε

$$\frac{h^2 e}{8} \leq \frac{1}{2} 10^{-d}$$

ή

$$h \leq \frac{2}{\sqrt{10^d e}}.$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η $f(x) = e^x$ για $x \in [0, 1]$. Να υπολογιστεί η απόσταση h των σημείων έτσι ώστε να προσεγγίζεται η $f(x)$ με **τετραγωνική** παρεμβολή (δηλ. με πολυώνυμο παρεμβολής **2ου βαθμού**) και με ακρίβεια d δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

Το σφάλμα στη **τετραγωνική** παρεμβολή της $f(x)$ στα x_0, x_1, x_2 δίνεται από τόν τύπο

$$e^x - p_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} e^{\xi}.$$

Για την παρεμβολή υποθέτουμε $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ και $x_0 < x < x_2$. Έχουμε

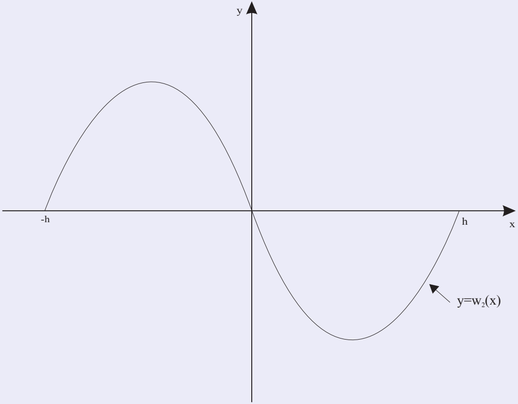
$$|e^x - p_2(x)| \leq \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} e^1.$$

Ας υποθέσουμε $x_1 = 0$, τότε $x_0 = -h$ και $x_2 = h$, στην ειδική αυτή περίπτωση έχουμε

$$w_2(x) = \frac{(x + h)x(x - h)}{6} = \frac{x^3 - xh^2}{6}.$$

$$w_2(x) = \frac{x^3 - xh^2}{6}.$$

Σχήμα 2.



Για την εύρεση του μέγιστου της $w_2(x)$(βλ. σχήμα 2), έχουμε

$$w_2'(x) = \frac{3x^2 - h^2}{6} = 0$$

οπότε $x = \pm h/\sqrt{3}$ και

$$\left| w_2\left(\pm \frac{h}{\sqrt{3}} \right) \right| = \frac{h^3}{9\sqrt{3}}.$$

Συνεπώς

$$|e^x - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} e \simeq 0.174 h^3,$$

το οποίο είναι μικρότερο από το σφάλμα που βρέθηκε στη γραμμική παρεμβολή.

Αν επιθυμούμε ακρίβεια d δεκαδικών ψηφίων, τότε το h θα επιλεγεί έτσι ώστε

$$\frac{h^3 e}{9\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2}10^{-d}$$

ή

$$h \leq \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{2e10^d}} \simeq \sqrt[3]{\frac{2.87}{10^d}}.$$

Πολυώνυμο παρεμβολής του Newton για μη ισαπέχοντα σημεία

Διηρημένες διαφορές

Για τα μη ισαπέχοντα σημεία (x_i, f_i), $i = 0(1)n$, ορίζονται ως εξής:

- **0 τάξης**

$$f[x_i] = f_i \tag{34}$$

- **1ης τάξης**

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \tag{35}$$

- **n τάξης**

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{36}$$

Ο πίνακας των διηρημένων διαφορών για τα (x_i, f_i), $i = 0(1)3$ είναι ο ακόλουθος :

x	$f(x)$	1ης τάξης	2ης τάξης	3ης τάξης
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]-f[x_0, x_1]}{x_2-x_0}$	
				$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3]-f[x_0, x_1, x_2]}{x_3-x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3]-f[x_1, x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	$f[x_3]$			

Παράδειγμα

Να κατασκευαστεί ο πίνακας των διηρημένων διαφορών των σημείων (0,0), (2,4), (3,9) και (5,25).

Λύση

x	$f(x)$	**1ης** τάξης	**2ης** τάξης	**3ης** τάξης
0	0			
		2		
2	4		1	
		5		0
3	9		1	
		8		
5	25			

Πολυώνυμο παρεμβολής του Newton με διηρημένες διαφορές

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Μπορεί να μετασχηματιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής έτσι ώστε, αν προστεθεί ένα επιπλέον σημείο παρεμβολής, οι υπολογισμοί να μην χρειάζεται να ξεκινήσουν από την αρχή, αλλά να χρησιμοποιούνται οι προηγούμενοι υπολογισμοί ;

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το πολυώνυμο παρεμβολής $P_k(x)$ βαθμού $\leq k$ που παρεμβάλει στα σημεία x_i, $i = 0(1)k$ και θέλουμε να σχηματίσουμε το πολυώνυμο $P_{k+1}(x)$ προσθέτοντας ένα επί πλέον σημείο παρεμβολής x_{k+1}. Επειδή θέλουμε επίσης να μην αλλάξουμε και τους προηγούμενους υπολογισμούς μας, απαιτούμε το νέο πολυώνυμο να έχει τη μορφή

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + p_{k+1}(x), \quad k = 0(1)n \tag{37}$$

όπου $p_{k+1}(x)$ είναι βαθμού $\leq k + 1$.

Επειδή τα $P_{k+1}(x)$ και $P_k(x)$ παρεμβάλλουν στα σημεία x_i, $i = 0(1)k$ έχουμε

$$P_{k+1}(x_i) = P_k(x_i), \quad i = 0(1)k \tag{38}$$

άρα

$$p_{k+1}(x_i) = 0, \quad i = 0(1)k, \tag{39}$$

το οποίο σημαίνει ότι τα x_i, $i = 0(1)k$ είναι ρίζες του $p_{k+1}(x)$ συνεπώς το πολυώνυμο αυτό έχει την ακόλουθη μορφή

$$p_{k+1}(x) = a_{k+1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k). \tag{40}$$

Εφαρμόζοντας αναγωγικά την προηγούμενη ισότητα για $k = 0(1)n - 1$, προκύπτει το ακόλουθο πολυώνυμο των διηρημένων διαφορών του Newton

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \tag{41}$$

Το $P_n(x)$ δύναται να τροποποιηθεί στο ακόλουθο *"φωλιασμένο"* σχήμα κατάλληλο για υπολογισμό π.χ. για $n = 3$

$$P_3(x) = [[a_3(x - x_2) + a_2]\,(x - x_0) + a_0]\,. \tag{42}$$

Για τον υπολογισμό των a_i, $i = 0(1)n$ εργαζόμαστε ως εξής. Αφού για $x_i, \quad i = 0(1)n$ έχουμε ότι $P_n(x_i) = f_i$, $i = 0(1)n$. Συνεπώς για $x = x_i, \quad i = 0(1)n$ παράγονται οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} (i=0)\; f_0 &= a_0 \\ (i=1)\; f_1 &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ (i=2)\; f_2 &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\;\;\vdots \\ (i=n)\; f_n &= a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + a_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{43}$$

το οποίο είναι ένα **τριγωνικό σύστημα**, όπου ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων X είναι μη ιδιάζων καθόσον η ορίζουσα του είναι ίση με

$$\det(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (x_i - x_j), \quad i = 0(1)n.$$

Έτσι τα $a_i, i = 0(1)n$ ορίζονται μονοσήμαντα, η δε λύση του είναι η

$$\begin{aligned} a_0 &= f_0 \\ a_1 &= \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = f[x_0, x_1] \\ a_2 &= \frac{f[x_0, x_1] - (f_0 - f_2)/(x_0 - x_2)}{x_0 - x_2} = f[x_0, x_1, x_2] \\ &\vdots \\ a_n &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned} \tag{44}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής των διηρημένων διαφορών του Newton

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + \\ &\quad (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]. \end{aligned} \tag{45}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής των διηρημένων διαφορών του Newton

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \ldots + \\ & (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]. \end{aligned} \tag{46}$$

Αλλαγή της σειράς των x_i δεν αλλάζει την τιμή μιας διηρημένης διαφοράς και το σφάλμα στην παρεμβολή χρησιμοποιώντας το $p_n(x)$ σε ένα σημείο x είναι (γιατί;)

$$R_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]. \tag{47}$$

Θεώρημα

Αν I είναι το μικρότερο διάστημα που περιέχει όλα τα σημεία παρεμβολής x_i, $i = 0(1)n$ και το τυχόν σημείο x και η συνάρτηση $f(x) \in C^{n+1}(I)$, τότε

$$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{48}$$

όπου $\xi \in I$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι το σφάλμα στην παρεμβολή είναι

$$R_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in I \tag{49}$$

ενώ για την παρεμβολή του Newton με διηρημένες διαφορές δίνεται από την (47), άρα από την εξίσωση των δύο αυτών σχέσεων προκύπτει η (48).

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας τιμών της $f(x)$

x_i	1	2	4	5
f_i	0	2	12	20

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton

Λύση

Το ζητούμενο πολυώνυμο θα είναι το πολύ βαθμού 3 και λόγω της (46) για $n = 3$ είναι το

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ &\quad (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$

Πίνακας των διηρημένων διαφορών

x	$f(x)$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
1	$\boxed{0}$			
		$\boxed{2}$		
2	2		$\boxed{1}$	
		5		$\boxed{0}$
4	12		1	
		8		
5	20			

$$p_3(x) = 0 + (x-1)\cdot 2 + (x-1)(x-2)\cdot 1 + (x-1)(x-2)(x-4)\cdot 0$$

ή

$$p_3(x) = (x-1)x$$

Παρατήρηση

Αν είχαν δοθεί μόνο τα **τρία πρώτα** σημεία και στη συνέχεια εισαγόταν **το τελευταίο**, τότε στο πολυώνυμο παρεμβολής απλά προστίθεται ένας επιπλέον όρος (που στην προκειμένη περίπτωση είναι μηδέν).

Μελέτη του σφάλματος

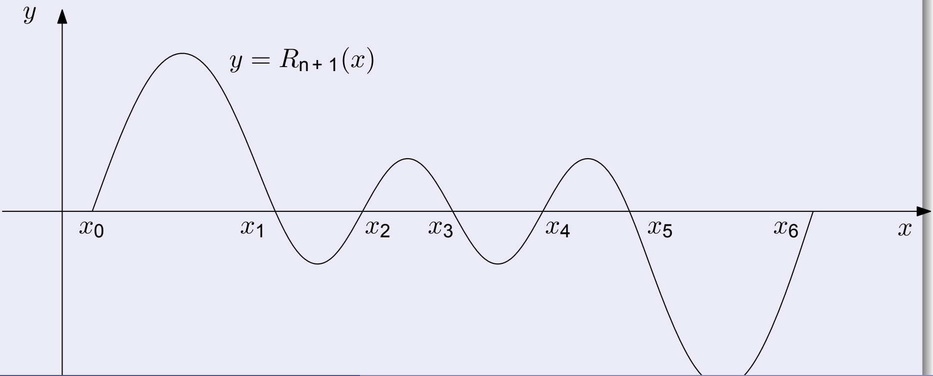
Το σφάλμα παρεμβολής δίνεται από το τύπο

$$\Psi_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

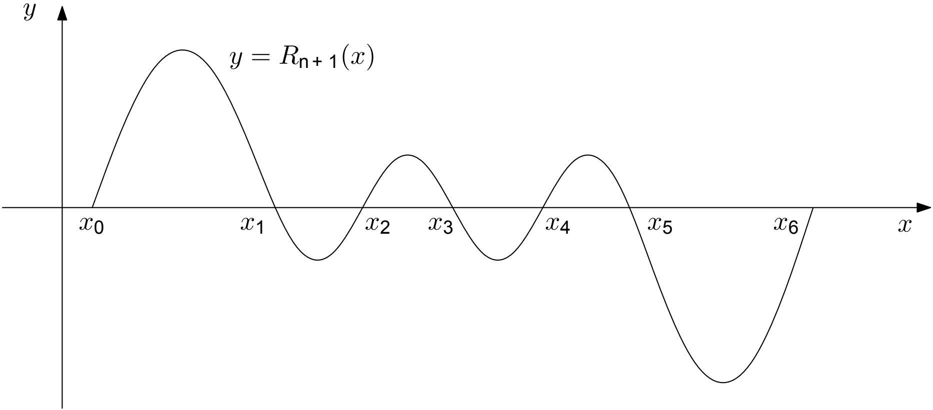
όπου

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_n) < \xi < \max(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Σχήμα



Σχήμα



Παρατήρηση

Η γραφική παράσταση του σφάλματος $\Psi_n(x)$ παρουσιάζεται στο ανωτέρω σχήμα από το οποίο παρατηρούμε ότι *το σφάλμα γίνεται μικρότερο όταν το x είναι πλησίον του μέσου.*

Παρεμβολή με κυβικές splines

- Έστω το σύνολο των σημείων $X_n = \{x_j\}, j = 0, 1, \ldots, n$ όπου $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ και το σύνολο των τιμών $\{f(x_j)\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
- Ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση η οποία διέρχεται από τα σημεία $P_j = (x_j, f(x_j)), 0 \leq j \leq n$.
- Έστω το σύνολο όλων των συναρτήσεων $Sp(X_n)$ τέτοιες ώστε αν $S(x) \in Sp(X_n)$ τότε η $S(x)$ ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:
  1. $S(x) \in C^2[a, b]$ δηλαδή οι $S(x)$, $S'(x)$ και $S''(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$.
  2. $S(x_j) = f(x_j) \equiv f_j, 0 \leq j \leq n$, δηλαδή η $S(x)$ παρεμβάλλει την $f(x)$ στο $[a, b]$.
  3. $S(x)$ είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού σε κάθε υποδιάστημα $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n-1$.
- Η συνάρτηση $S(x)$ που ικανοποιεί τις (1), (2) και (3) λέγεται μία κυβική spline. Όμοια μπορούμε να ορίσουμε splines μεγαλύτερης τάξης.
- Παρατηρούμε ότι η $S(x)$ μπορεί να είναι διαφορετική σε κάθε υποδιάστημα, έτσι συμβολίζουμε με $S_j(x)$ το κυβικό πολυώνυμο τέτοιο ώστε $S(x) = S_j(x)$ για $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n-1$.

....Παρεμβολή με κυβικές splines

- Επειδή κάθε $S_j(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και όλες οι παράγωγοί του είναι συνεχείς για κάθε $x \in (x_j, x_{j+1})$ στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα, έτσι τα σημεία που μας ενδιαφέρουν στο $[x_0, x_3]$ είναι τα εσωτερικά x_1 και x_2 όπου τα κυβικά πολυώνυμα πρέπει να συμπίπτουν με δευτέρου βαθμού συνέχεια.
- Έχοντας αυτό υπόψη ας εργαστούμε από τα αριστερά προς τα δεξιά στο $[a, b] \equiv [x_0, x_3]$ και ας προσδιορίσουμε τον αριθμό των εξισώσεων οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται.
- Επειδή η $S(x)$ πρέπει να παρεμβάλει σε κάθε x_j και να είναι συνεχής στα x_1 και x_2 έχουμε ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω έξι εξισώσεις

$$\begin{gathered} S_0(x_0) = f_0, \quad S_1(x_1) = f_1, \quad S_0(x_1) = S_1(x_1) \\ S_2(x_2) = f_2, \quad S_1(x_2) = S_2(x_2) \quad \text{και} \quad S_2(x_3) = f_3. \end{gathered} \tag{50}$$

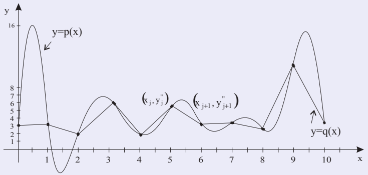
- Τέλος, επειδή οι $S'(x)$ και $S''(x)$ πρέπει επίσης να είναι συνεχείς στα x_1 και x_2 έχουμε

$$\begin{gathered} S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \quad S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \\ S_1'(x_2) = S_2'(x_2) \quad S_1''(x_2) = S_2''(x_2). \end{gathered} \tag{51}$$

....Παρεμβολή με κυβικές splines

- Άρα έχουμε ένα σύνολο δέκα εξισώσεων με δώδεκα αγνώστους. Διαισθητικά λοιπόν αναμένουμε ότι το σύνολο $S_p(X_n)$ είναι μια διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων.
- Δύο λογικοί τρόποι για να αποκτήσουμε μία καλή προσέγγιση της $f(x)$ είναι να προσδιορίσουμε αυθαίρετα είτε τα $S_0'(x_0)$ και $S'(x_3)$ ή τα $S''(x_0)$ και $S''(x_3)$.

Κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή



Σχήμα: Κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή