ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 2

Αριθμητική Επίλυση μη Γραμμικών Εξισώσεων

Ν. Μ. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,

ΕΝΟΤΗΤΑ 2 Αριθμητική Επίλυση μη Γραμμικών Εξισώσεων

Ένα από τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζεται συχνά στις εφαρμογές είναι η εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

όπου η $f(x)$ είναι μία συνάρτηση **πραγματικής** ή **μιγαδικής** μεταβλητής x.

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής x

- *Ειδική περίπτωση*: η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.
  - Μόνο μια μικρή κατηγορία εξισώσεων μπορούν να λυθούν με τη χρήση των κλασικών Μαθηματικών (όπως οι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ≤ 4).

Αριθμητική Επίλυση μη Γραμμικών Εξισώσεων

- Με τη χρήση **αριθμητικών μεθόδων** επιτυγχάνεται ο προσεγγιστικός εντοπισμός των ριζών μιας μη γραμμικής εξίσωσης $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{0}$.

  Ρίζα καλείται οποιοσδήποτε αριθμός ξ τέτοιος ώστε $f\left(\xi\right) = 0$.

- Για τις **βασικές αριθμητικές μεθόδους** που θα μελετήσουμε υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ένα διάστημα $[a, b]$ εντός του οποίου βρίσκεται η μοναδική ρίζα ξ.
  - Αν αυτό δεν είναι γνωστό, τότε θα πρέπει να εξασφαλιστεί με κάποιες συνθήκες.

Αριθμητική Επίλυση μη Γραμμικών Εξισώσεων

- Επαναληπτικές Μέθοδοι διαστημάτων(Παρενθετικές)
  - Μέθοδος Διχοτόμησης
  - Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης
- Επαναληπτικές Μέθοδοι Σημείου
  - Σταθερού Σημείου
  - Newton-Raphson
  - Τέμνουσας

Αριθμητική Επίλυση μη Γραμμικών Εξισώσεων

Από την Ανάλυση είναι γνωστό το ακόλουθο θεώρημα για τον εντοπισμό ριζών.

Θεώρημα

Αν $f(x) \in C[a, b]$ και αν $f(a) f(b) < 0$, τότε για κάποιο $\xi \in (a, b)$ έχουμε

$$f(\xi) = 0.$$

Η Μέθοδος της Διχοτόμησης ή (Bolzano)

- Από τη στιγμή που θα εξασφαλιστεί το διάστημα (a, b) εντός του οποίου βρίσκεται η άγνωστη ρίζα ξ, προχωρούμε **επαναληπτικά**.
- Επαναλαμβάνουμε, δηλαδή, μια διαδικασία με δεδομένα διαφορετικά (βελτιωμένα) σε κάθε επανάληψη μέχρις ότου πετύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.
- Στην περίπτωσή μας διαλέγουμε αυθαίρετα μια αρχική τιμή $x_0 \in (a, b)$ και χρησιμοποιώντας έναν επαναληπτικό κανόνα (τύπο) δημιουργούμε μία ακολουθία τιμών $x_1, x_2, \ldots$.

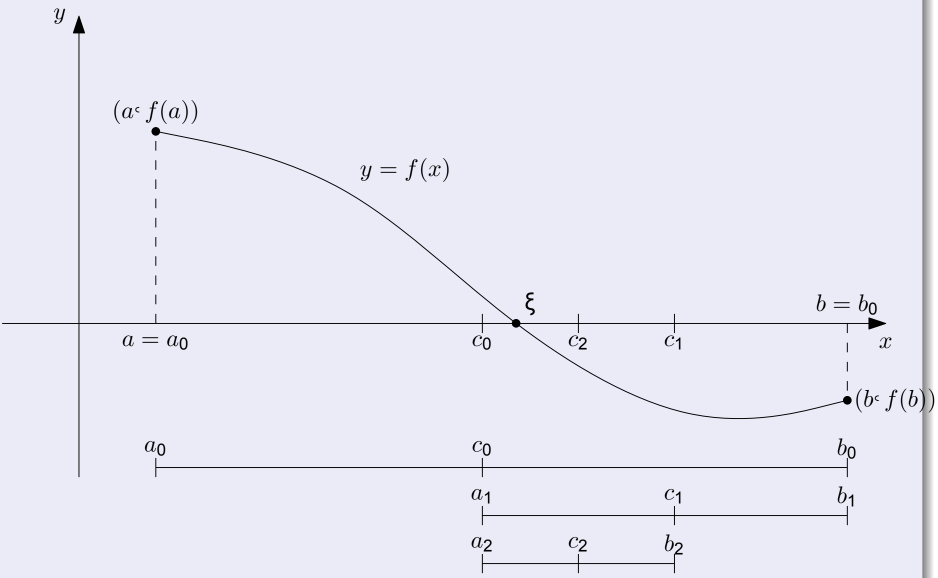
- Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλιστεί είναι η επιβολή συνθηκών έτσι ώστε η ακολουθία $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ να συγκλίνει στη ρίζα ξ.
- Το δεύτερο και εξίσου σημαντικό είναι η σύγκλιση προς την ξ να είναι **όσον το δυνατόν πιο αποτελεσματική**, πράγμα που έχει σχέση με χαρακτηριστικά της μεθόδου που χρησιμοποιείται.
- Συνήθως για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού επιχειρείται η αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης της ακολουθίας $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και στη συνέχεια υπολογίζεται το συνολικό πλήθος των αριθμητικών πράξεων.

Η Μέθοδος της Διχοτόμησης (ή Bolzano)

Έστω $f(x) \in C[a,b]$ και $f(a)f(b) < 0$, δηλαδή ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (a,b).

- Η μέθοδος της Διχοτόμησης διαιρεί διαδοχικά το διάστημα $[a,b]$ λαμβάνοντας κάθε φορά εκείνο το διάστημα που περιέχει τη ρίζα.
- Υπολογίζεται το μέσο του διαστήματος $c_0 = (a_0 + b_0)/2$, όπου $a_0 = a$ και $b_0 = b$.
- Αν $f(c_0) = 0$, τότε $\xi = c_0$ διαφορετικά ελέγχεται η συνθήκη $f(a_0)f(c_0) < 0$.
    - ▷ Αν ισχύει, τότε η ρίζα ξ βρίσκεται στο διάστημα (a_0, c_0) και τίθεται $a_1 = a_0$ και $b_1 = c_0$, οπότε προκύπτει το νέο διάστημα $[a_1, b_1]$ το οποίο είναι το μισό του αρχικού.
    - ▷ 'Αν $f(a_0)f(c_0) > 0$, τότε $f(c_0)f(b_0) < 0$ που σημαίνει ότι η ξ βρίσκεται στο διάστημα (c_0, b_0), οπότε το νέο διάστημα θα είναι το $[a_1, b_1]$, όπου τώρα $a_1 = c_0$ και $b_1 = b_0$.

Η Μέθοδος της Διχοτόμησης (ή Bolzano)



Σχήμα: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της Διχοτόμησης

Η Μέθοδος της Διχοτόμησης ή Μέθοδος του Bolzano

Δημιουργείται, μία ακολουθία διαστημάτων $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ για τα οποία ισχύουν οι

$$\begin{aligned} a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_0 \\ b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq a_0 \end{aligned} \tag{2}$$

με

$$f(a_n) f(b_n) \leq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

και

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right). \tag{4}$$

Επειδή η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, *συγκλίνει*. Όμοια, η $\{b_n\}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη συνεπώς *συγκλίνει*. Εφαρμόζοντας την (4) διαδοχικά προκύπτει

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}. \tag{5}$$

.....Η Μέθοδος της Διχοτόμησης.....

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}\left(b_0 - a_0\right) = 0.$$

Αν τεθεί

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

τότε λαμβάνοντας τα όρια στην (3) και λόγω της συνέχειας της $f\left(x\right)$, προκύπτει

$$\left[f\left(\xi\right)\right]^2 \leq 0$$

, δηλαδή τα όρια των διαστημάτων συγκλίνουν στη ρίζα ξ της $f\left(x\right)$.

Αν υποτεθεί ότι σε κάποια φάση σταματήσει η όλη διαδικασία στο διάστημα $\left[a_n, b_n\right]$, τότε η καλύτερη προσέγγιση της ρίζας είναι το μέσο του διαστήματος $\left[a_n, b_n\right]$

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}. \tag{6}$$

Το σφάλμα στη μέθοδο της Διχοτόμησης

Το σφάλμα στη μέθοδο φράσσεται ως εξής

$$|\xi - c_n| = \left|\xi - \frac{a_n + b_n}{2}\right| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

ή λόγω της (5)

$$|\xi - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}. \tag{7}$$

Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, η απαίτηση

$$|\xi - c_n| \leq \varepsilon$$

σημαίνει, λόγω της (7), να επιλεγεί n τέτοιο ώστε

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

ή

$$n \geq \left\lceil \frac{\log(b_0 - a_0) - \log 2\varepsilon}{\log 2} \right\rceil. \tag{8}$$

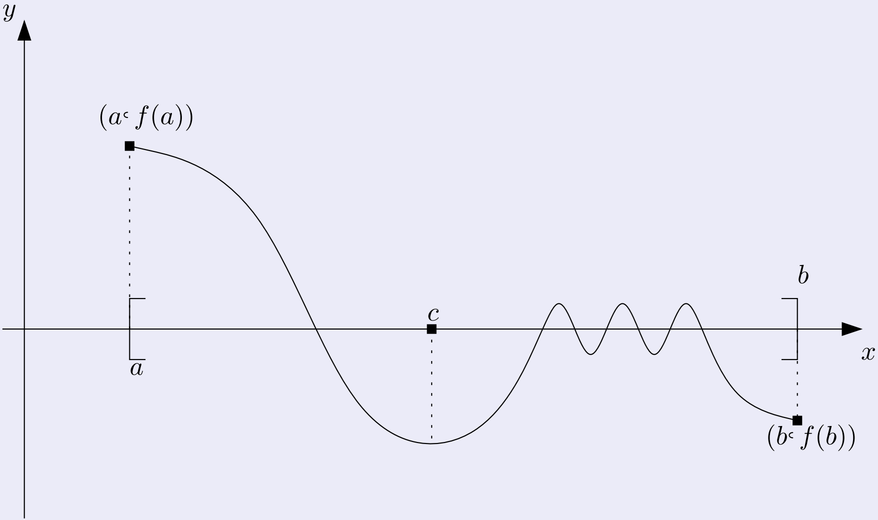
Ο ανωτέρω τύπος για δεδομένο ε δίνει ένα φράγμα του αριθμού επαναλήψεων n που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου της Διχοτόμησης που συνήθως είναι πολύ μεγαλύτερο από τον πραγματικό αριθμό επαναλήψεων.

....Η Μέθοδος της Διχοτόμησης....

- Μετά από n επαναλήψεις η μέθοδος παράγει ένα διάστημα $\left[a_n, b_n\right]$, το οποίο περιέχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ της $f\left(x\right) = 0$.
- Επειδή κάθε διάστημα $\left[a_n, b_n\right]$ πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια ρίζα ξ, γι' αυτό η μέθοδος της Διχοτόμησης καλείται *παρενθετική* μέθοδος.
- Έτσι από τη στιγμή που βρεθούν τα a και b, η μέθοδος συγκλίνει οπωσδήποτε σε μια ρίζα $\xi \in \left(a_n, b_n\right)$ για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f\left(x\right)$.

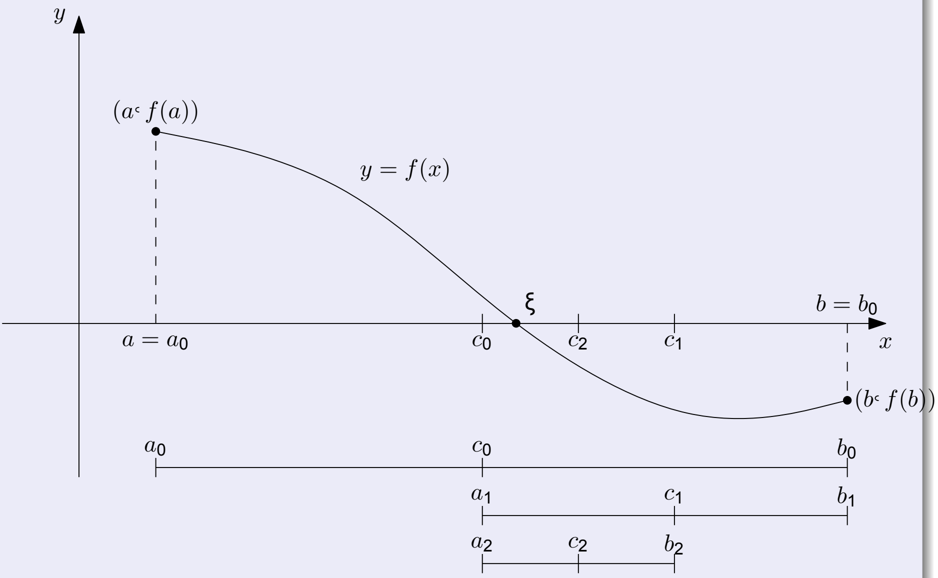
- Το βασικό της **μειονέκτημα** είναι ότι το σφάλμα σε κάθε επανάληψη $(b-a)/2^{n+1}$ είναι αρκετά μεγάλο συγκρινόμενο με άλλες μεθόδους, δηλαδή έχει αργή σύγκλιση.
  - ▷ *Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται συνήθως αρχικά για τον εντοπισμό ενός διαστήματος εντός του οποίου υπάρχει μια ρίζα και στη συνέχεια εφαρμόζεται μια άλλη μέθοδος με γρηγορότερη ταχύτητα σύγκλισης για τον υπολογισμό της εν λόγω ρίζας.*
  - ▷ Επίσης η μέθοδος απαιτεί η $f(x)$ να αλλάζει πρόσημο γύρω από τη ρίζα (δεν υπολογίζει ρίζες άρτιας πολλαπλότητας).
  - ▷ Τέλος από το ακόλουθο σχήμα είναι φανερό γιατί η μέθοδος της Διχοτόμησης εντοπίζει μια ρίζα αλλά όχι όλες τις ρίζες που βρίσκονται στο διάστημα $[a, b]$.

....Η Μέθοδος της Διχοτόμησης....



Σχήμα: Η μέθοδος της Διχοτόμησης για τον εντοπισμό μιας ρίζας στο $[a, b]$.

Η Μέθοδος της Διχοτόμησης (ή Bolzano)



Σχήμα: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της Διχοτόμησης

Δίνεται η $f(x) \in C[a_0, b_0]$ τέτοια ώστε $f(a_0)f(b_0) < 0$.

Αλγόριθμος της Διχοτόμησης

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ μέχρις ότου επιτευχθεί σύγκλιση να εκτελούνται τα ακόλουθα:

1. $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
2. Αν $f(c_n) = 0$ τότε $\xi = c_n$

   διαφορετικά

   αν $f(a_n)f(c_n) < 0$ τότε

   $$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_n$$

   διαφορετικά

   $$a_{n+1} = c_n, \quad b_{n+1} = b_n.$$

Κριτήρια διακοπής του αλγορίθμου της Διχοτόμησης

μέχρις ότου επιτευχθεί σύγκλιση

σημαίνει να ικανοποιείται ένα από τα ακόλουθα κριτήρια:

1. $|f(c)| < \delta$
2. $|c - \xi| < \varepsilon$
3. $|f(c)| < \delta$ και $|c - \xi| < \varepsilon$

Κριτήριο διακοπής του αλγορίθμου της Διχοτόμησης

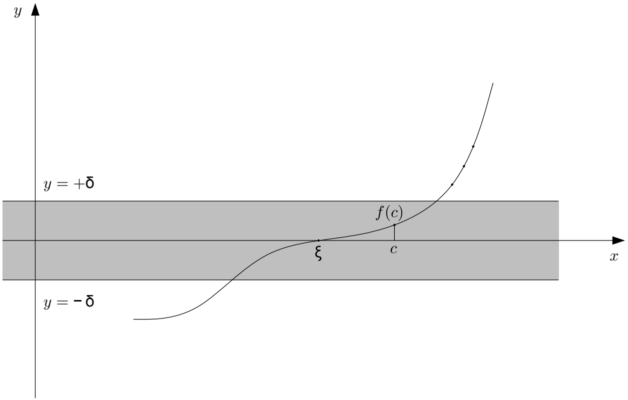
$$|f(c)| < \delta$$

όπου $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$ είναι η ανεκτικότητα (ή **επιθυμητή ακρίβεια**).

- Το κριτήριο αυτό αντιστοιχεί στον έλεγχο αν το c είναι ρίζα της $f(x)$ (δηλ. αν $f(c) = 0$).
- Η εφαρμογή του κριτηρίου αυτού σημαίνει ότι αποδεχόμαστε το c να είναι καλή προσέγγιση της ρίζας αν $-\delta < f(c) < \delta$, δηλαδή αν η $f(c)$ βρίσκεται εντός της άπειρης οριζόντιας ζώνης που ορίζεται μεταξύ των δύο οριζόντιων ευθειών $y = +\delta$ και $y = -\delta$ (βλ. Σχήμα)

Γεωμετρική ερμηνεία του κριτηρίου διακοπής

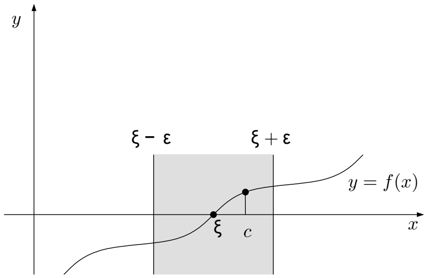
$$|f(c)| < \delta$$



Γεωμετρική ερμηνεία του κριτηρίου διακοπής

$$|c - \xi| < \varepsilon$$

όπου ε κάποια ανεκτικότητα, τότε αποδεχόμαστε το c σαν καλή προσέγγιση της ρίζας αν $\xi - \varepsilon < c < \xi + \varepsilon$, δηλαδή αν το c βρίσκεται εντός της άπειρης κάθετης ζώνης που ορίζεται μεταξύ των δύο κάθετων ευθειών $x = \xi - \varepsilon$ και $x = \xi + \varepsilon$ (βλ. Σχήμα)



Σχήμα: Γεωμετρική ερμηνεία του κριτηρίου $|c - \xi| < \varepsilon$.

Γεωμετρική ερμηνεία του συνδυασμού των κριτηρίων διακοπής

- Αν απαιτηθεί να ισχύουν και τα δύο κριτήρια, τότε η περιοχή στην οποία θα πρέπει να βρίσκονται τα c και $f(c)$ θα είναι η τομή των δυο ζωνών των σχημάτων (20) και (4)
- ενω άν απαιτηθεί να ισχύει είτε το ένα είτε το άλλο κριτήριο, τότε η περιοχή των c και $f(c)$ θα είναι η ένωση των ζωνών των προαναφερθέντων σχημάτων.

Στην πράξη, επειδή **δεν είναι γνωστή** η ρίζα ξ χρησιμοποιούνται αντί του $|c-\xi| < \varepsilon$ τα ακόλουθα κριτήρια :

$$|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon \tag{9}$$

ή

$$\frac{|c_n - c_{n-1}|}{|c_n|} < \varepsilon, \quad c_n \neq 0. \tag{10}$$

Δυσκολίες με τα κριτήρια διακοπής στην πράξη

- Οι τιμές των δ και ε δεν θα πρέπει να είναι πλησίον της μονάδας της μηχανής, δηλαδή αν k είναι το μέγιστο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που μπορούν να αποθηκευθούν τότε $\delta, \varepsilon \geq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k+2}$.
- Υπάρχουν ακολουθίες $\{c_n\}$ για τις οποίες οι διαφορές $|c_n - c_{n-1}|$ συγκλίνουν στο μηδέν, ενώ η ίδια η ακολουθία αποκλίνει.
- Συνήθως το κριτήριο (10) είναι καλύτερο γιατί ελέγχει το σχετικό σφάλμα (με την προϋπόθεση ότι $c_n \neq 0$).

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, η οποία έχει μία απλή ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Να εφαρμοστούν τέσσερις επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης.

Λύση

Για την πρώτη επανάληψη έχουμε $(a_0, b_0) = (1, 2)$ με $f(a_0) < 0$ και $f(b_0) > 0$. Το μέσο του πρώτου διαστήματος και η πρώτη προσέγγιση για τη ρίζα είναι

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1.5.$$

Προκειμένου να εξεταστεί αν η ρίζα περιέχεται στο $(a_0, c_0) = (1, 1.5)$ ή στο $(c_0, b_0) = (1.5, 2)$ υπολογίζεται η

$$f(c_0) = 2.375 > 0.$$

Αφού τα $f(a_0)$ και $f(c_0)$ έχουν αντίθετο πρόσημο, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των a_0 και c_0. Επομένως, το νέο διάστημα θα είναι το $(a_1, b_1) = (a_0, c_0) = (1, 1.5)$.

Το μέσο του νέου διαστήματος καθώς και η δεύτερη προσέγγιση για τη ρίζα είναι
$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25.$$
Αλλά
$$f(c_1) \simeq 0.328 > 0,$$
το οποίο έχει αντίθετο πρόσημο από το $f(a_1)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των a_1 και c_1. Δηλαδή, το νέο διάστημα θα είναι το $(a_2, b_2) = (a_1, c_1) = (1, 1.25)$.

Στην τρίτη επανάληψη, υπολογίζεται το
$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1 + 1.25}{2} = 1.125$$
και
$$f(c_2) \simeq -0.420 < 0.$$
Σε αυτή την επανάληψη βρέθηκε ότι οι $f(a_2)$ και $f(c_2)$ έχουν το ίδιο πρόσημο, το οποίο δηλώνει ότι η ρίζα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των c_2 και b_2.

Επομένως, στην τέταρτη επανάληψη θα ισχύει ότι
$(a_3, b_3) = (c_2, b_2) = (1.125, 1.25)$ και

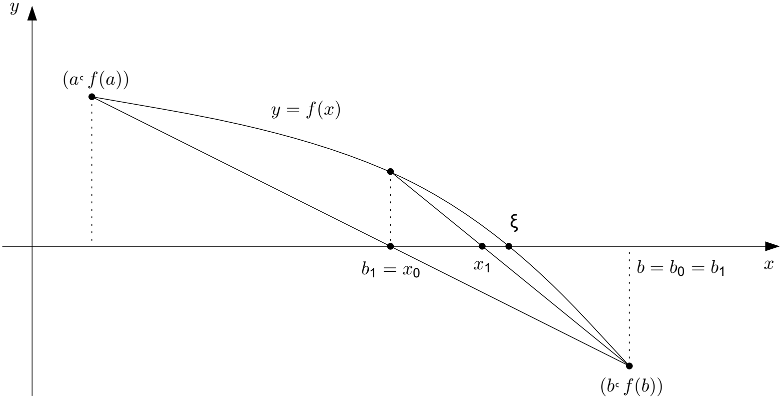
$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 1.1875.$$

Ας σημειωθεί ότι $\xi = 1.1986912435$ με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων κατά συνέπεια το απόλυτο σφάλμα είναι $1.119\text{x}10^{-2}$.

Η Μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi)

- Η μέθοδος της εσφαλμένης θέσης έχει την ίδια φιλοσοφία με τη μέθοδο της Διχοτόμησης με τη μόνη διαφορά ότι ο τρόπος υπολογισμού του c είναι διαφορετικός.
- Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε γιατί η μέθοδος της Διχοτόμησης συγκλίνει αρκετά αργά. Ισχύουν συνεπώς οι ίδιες υποθέσεις όπως στη μέθοδο της Διχοτόμησης. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι $f(x) \in C[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$, δηλαδή ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ στο διάστημα $[a, b]$ της $f(x) = 0$.
- Μια καλύτερη προσέγγιση της ξ, από το μέσο του διαστήματος, είναι το σημείο x_0 όπου η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τέμνει τον άξονα των x (βλ. Σχήμα)

Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της εσφαλμένης θέσης



Θέτοντας αρχικά $a_0 = a$ και $b_0 = b$ η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο σημεία $(a_0, f(a_0))$ και $(b_0, f(b_0))$ είναι η

$$\frac{y - f(b_0)}{x - b_0} = \frac{f(a_0) - f(b_0)}{a_0 - b_0}. \tag{11}$$

....Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της εσφαλμένης θέσης

Από την (11) για $y = 0$ και $x = x_0$ έχουμε

$$x_0 = b_0 - f(b_0) \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)}. \tag{12}$$

Λόγω της $f(a_0) f(b_0) < 0$, ο παρονομαστής της (12) είναι διάφορος του μηδενός και το x_0 πάντα ορισμένο. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στη μέθοδο της Διχοτόμησης.

- Υπολογισμός του $x_0 = b_0 - f(b_0) \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)}$ όπου $a_0 = a$ και $b_0 = b$.
- Αν $f(x_0) = 0$ τότε $\xi = x_0$
  διαφορετικά ελέγχεται η συνθήκη $f(a_0) f(x_0) < 0$
  - Αν ισχύει, τότε η ρίζα ξ βρίσκεται στο διάστημα $[a_1, b_1] = [a_0, x_0]$ και επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία για το νέο διάστημα $[a_1, b_1]$.
  - Αν $f(a_0) f(x_0) > 0$, τότε $f(x_0) f(b_0) < 0$ που σημαίνει ότι η ξ βρίσκεται στο διάστημα $[a_1, b_1] = [x_0, b_0]$ και επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία για το νέο διάστημα $[a_1, b_1]$.

Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία για το διάστημα $\left[a_1, b_1\right]$ και υπολογίζεται η προσέγγιση x_1 από τον τύπο (12) όπου τώρα τα a_0, b_0 έχουν αντικατασταθεί από τα a_1 και b_1, αντίστοιχα.

Γενικά, η ακολουθία των $\left\{x_n\right\}$ παράγεται από τον τύπο

$$x_n = b_n - f\left(b_n\right)\frac{b_n - a_n}{f\left(b_n\right) - f\left(a_n\right)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Επειδή $f\left(a_n\right) f\left(b_n\right) < 0$ έπεται ότι $f\left(a_n\right) \neq f\left(b_n\right)$ άρα το x_n είναι πάντα ορισμένο και είτε $a_n < x_n < b_n$ ή $b_n < x_n < a_n$.

Αλγόριθμος της μεθόδου της Εσφαλμένης θέσης

Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία που παράγεται από τον επαναληπτικό τύπο (13) συγκλίνει, κάτω από ορισμένες συνθήκες.

Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[a_0, b_0]$, τέτοια ώστε $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Αλγόριθμος

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ μέχρις ότου επιτευχθεί σύγκλιση να εκτελούνται τα ακόλουθα:

1. Υπολογισμός του x_n από τον τύπο (13)
2. Αν $f(x_n) = 0$ τότε $\xi = x_n$
   διαφορετικά
   Αν $f(a_n) f(x_n) < 0$ τότε
   $$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = x_n$$
   διαφορετικά
   $$a_{n+1} = x_n, \quad b_{n+1} = b_n.$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, η οποία έχει μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Να εφαρμοστούν τέσσερις επαναλήψεις της μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης.

Λύση

Έχουμε $(a_0, b_0) = (1, 2)$ με $f(a_0) = -1 < 0$ και $f(b_0) = 9 > 0$.
Η πρώτη προσέγγιση της ρίζας, είναι

$$x_0 = b_0 - f(b_0)\frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} = 2 - 9\frac{2-1}{9-(-1)} = 1.1.$$

Προκειμένου να εξεταστεί αν η ρίζα περιέχεται στο $(a_0, x_0) = (1, 1.1)$ ή στο $(x_0, b_0) = (1.1, 2)$ υπολογίζεται η

$$f(x_0) = -0.549 < 0.$$

Αφού οι $f(a_0)$ και $f(x_0)$ έχουν το ίδιο πρόσημο, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των x_0 και b_0.

Επομένως, στην επόμενη επανάληψη το νέο διάστημα θα είναι $(a_1, b_1) = (x_0, b_0) = (1.1, 2)$. Η δεύτερη προσέγγιση για τη ρίζα είναι

$$x_1 = 2 - 9\frac{2 - 1.1}{9 - (-0.549)} = 1.151743638.$$

Αλλά

$$f(x_1) \simeq -0.274 < 0,$$

το οποίο έχει το ίδιο πρόσημο με το $f(a_1)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των x_1 και b_1.

Δηλαδή, στην επόμενη επανάληψη το νέο διάστημα θα είναι το $(a_2, b_2) = (x_1, b_1) = (1.151743638, 2)$. Στην τρίτη επανάληψη έχουμε

$$x_2 = b_2 - f(b_2)\frac{b_2 - a_2}{f(b_2) - f(a_2)} = 1.17684091$$

και

$$f(x_2) \simeq -0.131 < 0.$$

Σε αυτή την επανάληψη οι $f(a_2)$ και $f(x_2)$ έχουν το ίδιο πρόσημο πράγμα που δηλώνει ότι η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των x_2 και b_2.

Επομένως, στην τέταρτη επανάληψη $(a_3, b_3) = (x_2, b_2) = (1.17684091, 2)$. Ας σημειωθεί ότι $\xi = 1.1986912435$ με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων έτσι το απόλυτο σφάλμα είναι 2.185x10^{-2}.

Το πρόβλημα του σταθερού σημείου(fixed-point problem)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$, με $x \in [a, b]$, να βρεθούν ξ τέτοια ώστε $f(\xi) = 0$.

Σχηματίζουμε μια βοηθητική συνάρτηση $g(x)$ τέτοια ώστε $\xi = g(\xi)$, δηλαδή η ρίζα ξ της $f(x)$ να είναι σταθερό σημείο της $g(x)$.

Μετασχηματισμός Σταθερού Σημείου

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

όπου

$$g(x) = x - f(x)$$

ή γενικότερα

$$g(x) = x - h(x)f(x), \quad \text{με} \;\; h(x) \neq 0$$

Ο σχηματισμός της $g(x)$ δεν είναι μοναδικός.

Παράδειγμα

Αν

$$f(x) = x^3 - 13x + 18$$

τότε πιθανές επιλογές για την $g(x)$ είναι οι:

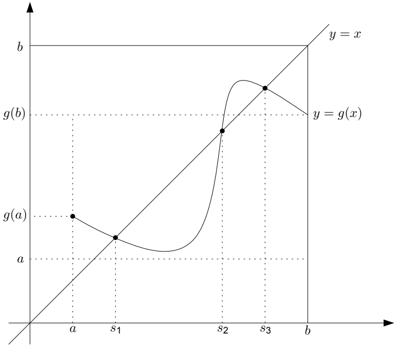
$$\begin{array}{ll} (a) & g(x) = \left(x^3 + 18\right)/13 \\ (b) & g(x) = (13x - 18)^{1/3} \\ (c) & g(x) = (13x - 18)/x^2 \end{array}$$

Σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις, αν $\xi = g(\xi)$, τότε $f(\xi) = 0$.

...Το πρόβλημα του σταθερού σημείου...

Το πρόβλημα του εντοπισμού ενός ξ τέτοιου ώστε $\xi = g(\xi)$ είναι γνωστό σαν **το πρόβλημα του σταθερού σημείου** και το ξ καλείται **σταθερό σημείο** της $g(x)$.

Η $g(x)$ έχει σταθερό σημείο στο $I = [a, b]$ όταν το γράφημα της $g(x)$ τέμνει την $y = x$ (βλ. Σχήμα)



Σχήμα: s_1, s_2 και s_3 σταθερά σημεία της $g(x)$.

Το πρόβλημα του σταθερού σημείου

- Είναι φανερό ότι για ένα δεδομένο διάστημα $I = [a,\ b]$, η $g(x)$ μπορεί να έχει πολλά σταθερά σημεία ή κανένα.
- Προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι η $g(x)$ έχει ένα σταθερό σημείο στο I, πρέπει να επιβληθούν ορισμένες συνθήκες στην $g(x)$.
  - ▷ Καταρχήν, υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in I$, τότε και $g(x) \in I$.

    Η συνθήκη αυτή είναι εύλογη γιατί για $\xi \in I$, δεν μπορεί να ισχύει

    $$g(\xi) = \xi$$

    αν κανένα $g(x)$ δεν ανήκει στο I.

...Το πρόβλημα του σταθερού σημείου....

Θεώρημα 1

- Αν $g(x) \in C[a,b]$ και $g(x) \in [a,b]$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε η $g(x)$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο $[a,b]$.
- Επιπλέον αν υπάρχει η $g'(x)$ στο (a,b) και υπάρχει μια θετική σταθερά $L<1$ με

$$\left|g'(x)\right| \leq L < 1 \text{ για κάθε } x \in (a,b), \tag{14}$$

τότε υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in [a,b]$ της $g(x)$.

Απόδειξη.

Έστω η

$$F(x) = g(x) - x,$$

τότε η $F(x)$ είναι συνεχής
Είναι

$$F(a) = g(a) - a > 0$$

και

$$F(b) = g(b) - b < 0$$

. Άρα

$$F(a)F(b) < 0$$

και συνεπώς υπάρχει μια ρίζα ξ της $F(x)$ στο (a, b) Δηλαδή

$$F(\xi) = 0 \iff g(\xi) = \xi$$

και το ξ είναι σταθερό σημείο της $g(x)$.

- Αν $g(a) = a$ ή $g(b) = b$, τότε η ύπαρξη του σταθερού σημείου είναι προφανής.

Απόδειξη.

●● Έστω ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία $\xi_1 \in I$ και $\xi_2 \in I$ με

$$\xi_1 \neq \xi_2.$$

Από το θεώρημα Μέσης τιμής έχουμε ότι

$$g(\xi_1) - g(\xi_2) = g'(\eta)(\xi_1 - \xi_2)$$

όπου $\xi_1 < \eta < \xi_2$.

Άρα, λόγω και της (14), έχουμε

$$|\xi_1 - \xi_2| = |g(\xi_1) - g(\xi_2)| = \left|g'(\eta)(\xi_1 - \xi_2)\right| \leq L|\xi_1 - \xi_2| < |\xi_1 - \xi_2|$$

το οποίο είναι **άτοπο**.

Συνεπώς $\xi_1 = \xi_2$ και το σταθερό σημείο στο $[a, b]$ είναι μοναδικό. □

Για να εξεταστεί αν για $x \in I$, τότε $g(x) \in I$, χρησιμοποιείται το ακόλουθο

Θεώρημα Ακροτάτων τιμών

Αν $f(x) \in C[a, b]$, τότε υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2 \in [a, b]$ με

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Αν επιπλέον, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε οι c_1 και c_2 είτε είναι τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ ή οι ρίζες της $f'(x)$.

Το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός **μοναδικού** σταθερού σημείου της $g(x)$ στο $[a, b]$. Το επόμενο πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του.

Μέθοδος του σταθερού σημείου (fixed point method)

Για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής του ξ

- επιλέγεται μια αυθαίρετη αρχική προσέγγιση $x_0 \in [a, b]$ και
- δημιουργείται η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ από το επαναληπτικό σχήμα

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Άν η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \to \xi$ και η $g(x)$ είναι συνεχής, τότε

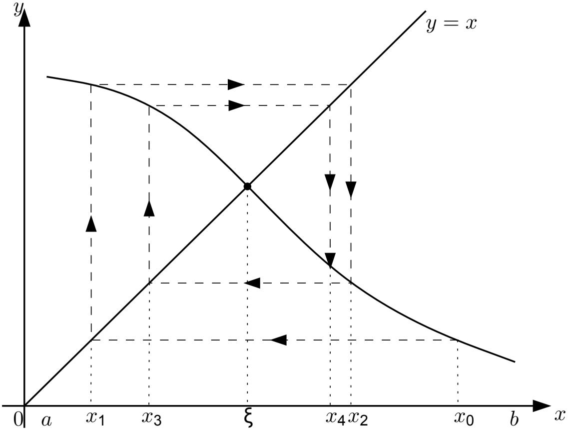
$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(\xi) \tag{16}$$

δηλαδή το ξ είναι σταθερό σημείο της $g(x)$ και μια ρίζα της $f(x) = 0$.

Είναι φανερό ότι για μια εξίσωση $f(x) = 0$ είναι δυνατόν να εκλεγούν διάφορες συναρτήσεις $g(x)$ έτσι ώστε ένα σταθερό σημείο της $g(x)$ να είναι ρίζα της $f(x)$.

Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου του σταθερού σημείου

Για κάθε μία τέτοια επιλογή θα πρέπει, πριν εφαρμοστεί η (15), να εξασφαλιστεί η σύγκλισή της.



Σχήμα: Η μέθοδος του σταθερού σημείου.

Αλγόριθμος της μεθόδου του Σταθερού σημείου

Δίνεται μια συνάρτηση $g(x)$ και μία αρχική προσέγγιση x_0.

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ μέχρις ότου επιτευχθεί σύγκλιση:

Να υπολογίζεται $x_{n+1} = g(x_n)$

Συνθήκες σύγκλισης της μεθόδου του σταθερού σημείου

Αν ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος 1 θα δειχτεί ότι η μέθοδος του σταθερού σημείου συγκλίνει.

Θεώρημα 2 (Καθολικής Σύγκλισης)

Έστω $g(x) \in C[a,b]$ και $g(x) \in [a,b]$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Επιπλέον η $g'(x)$ υπάρχει στο (a,b) και

$$|g'(x)| \leq L < 1 \text{ για όλα τα } x \in (a,b). \tag{17}$$

Για οποιοδήποτε $x_0 \in [a,b]$, η ακολουθία που ορίζεται από την

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in [a,b]$ της $g(x)$.

Απόδειξη

Λόγω του Θεωρ. 1 υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in [a, b]$. Επειδή $g(x) \in [a, b]$ για κάθε $x \in [a, b]$, η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ορίζεται για κάθε $n \geq 0$ και $x_n \in [a, b]$. Χρησιμοποιώντας την (17) και το θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε

$$|x_n - \xi| = |g(x_{n-1}) - g(\xi)| = \left|g'(\xi_n)\right| |x_{n-1} - \xi| \leq L\,|x_{n-1} - \xi|$$

όπου $min(x_{n-1}, \xi) < \xi_n < max(x_{n-1}, \xi)$. Μετά από διαδοχικές εφαρμογές της τελευταίας ανισότητας προκύπτει

$$|x_n - \xi| \leq L\,|x_{n-1} - \xi| \leq L^2\,|x_{n-2} - \xi| \leq \ldots \leq L^n\,|x_0 - \xi|\,. \tag{19}$$

Επειδή $0 \leq L < 1$, συνεπάγεται

$$\lim_{n\to\infty} L^n = 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| \leq \lim_{n\to\infty} L^n\,|x_0 - \xi| = 0$$

και η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, που ορίζεται από την (18), συγκλίνει στο ξ.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει μία ρίζα ξ στο διάστημα $[2, 3]$. Να δειχθεί ότι το επαναληπτικό σχήμα $x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2$ για $x_0 \in [2, 3]$ συγκλίνει στην ξ.

Λύση

Έχουμε $g(x) = 2 + 1/x^2$ και $I = [2, 3]$. Η $g(x)$ είναι συνεχής στο I.

Επιπλέον $g'(x) = -2/x^3$, άρα η $g(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση για $x \in [2, 3]$ με ακρότατα $m = g(3) = 2 + 1/9$ και $M = g(2) = 2 + 1/4$.

Επομένως, λόγω του θεωρήματος των Ακροτάτων τιμών

$$g(x) \in [2 + 1/9, 2 + 1/4] \subset [2, 3]$$

για κάθε $x \in [2, 3]$.

Επίσης

$$\left|g'(x)\right| = \left|-\frac{2}{x^3}\right| \leq \frac{1}{4} \quad \gamma\iota\alpha \quad x \in [2, 3].$$

Άρα η $g(x)$ ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2 και κατά συνέπεια η ε.μ.

$$x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και για $x_0 \in [2, 3]$ θα συγκλίνει στη ρίζα $\xi \in [2, 3]$.

Παράδειγμα

Δίνεται η

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

η οποία έχει ρίζες 2 και -1. Να υπολογιστεί η ρίζα $\xi = 2$ με τη μέθοδο του σταθερού σημείου.

Λύση

Μετασχηματισμός σταθερού σημείου

$$\mathbf{f}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = g(x)$$

Επαναληπτικό σχήμα

$$\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{g}(\mathbf{x_n}), \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Υπάρχουν πολλές επιλογές της $g(x)$, μερικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

$$(a)\ g(x) = x^2 - 2 \qquad (b)\ g(x) = \sqrt{2 + x}$$
$$(c)\ g(x) = 1 + \frac{2}{x} \qquad (d)\ g(x) = x - \frac{x^2 - x - 2}{m}, \ m \neq 0.$$

Επιλογές ε.μ. σταθερου σημείου

- Επιλογή **(a)** : Ισχύει $g'(x) > 1$ για $x > 1/2$, άρα δεν ικανοποιείται η βασική υπόθεση (17) για κανένα διάστημα που περιέχει τη ρίζα $\xi = 2$.
- Επιλογή **(b)** : Είναι
$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}.$$
Παρατηρούμε ότι για $x \geq 0$ έχουμε $g(x) \geq 0$ και $0 \leq g'(x) \leq 1/\sqrt{8} < 1$
Επίσης για $x \leq k$, έχουμε ότι $\sqrt{2+x} \leq \sqrt{2+k}$ και $\sqrt{2+k} \leq k$ για $k \geq 2$, άρα $g(x) = \sqrt{2+x} \leq k$ για $k \geq 2$.
Συνεπώς για $x \in [0, k]$, $\quad k \geq 2$ έχουμε $g(x) \in C[0, k]$ που σημαίνει ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος σταθ. σημείου.

Εφαρμογή της ε.μ. σταθερου σημείου

Αν λοιπόν επιλέξουμε αρχική τιμή $x_0 \in [0, k], \quad k \geq 2$, τότε η μέθοδος του σταθερού σημείου θα συγκλίνει στη ρίζα $\xi = 2$.

Πράγματι, αν $x_0 = 0$, τότε η εφαρμογή του επαναληπτικού σχήματος

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

παράγει την ακολουθία

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{2} = 1.41421 \\
x_2 &= \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{3.41421} \simeq 1.84776 \\
x_3 &= \sqrt{2 + x_2} = \sqrt{3.84776} \simeq 1.96157 \\
x_4 &= \sqrt{2 + x_3} = \sqrt{3.96157} \simeq 1.99037 \\
x_5 &= \sqrt{2 + x_4} = \sqrt{3.99037} \simeq 1.99759
\end{aligned}$$

η οποία συγκλίνει προς τη ρίζα $\xi = 2$.

Η μελέτη των (c) και (d) αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Πόρισμα

Αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του προηγ. Θεωρήματος, τότε το n–ιοστό σφάλμα $\varepsilon_n = x_n - \xi$, ικανοποιεί τις

$$|\varepsilon_n| \leq L^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}$$

και

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_0 - x_1| \,. \tag{20}$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$|\varepsilon_n| \leq L^n |x_0 - \xi| \leq L^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}$$

αφού $\xi \in [a, b]$.
Επίσης,

$$|x_0 - \xi| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \xi| \leq |x_0 - x_1| + L |x_0 - \xi|$$

άρα

$$|x_0 - \xi| \leq \frac{1}{1 - L} |x_0 - x_1| \,.$$

...Απόδειξη

Αλλά

$$\left|\varepsilon_n\right| \leq L^n \left|x_0 - \xi\right|$$

οπότε με αντικατάσταση προκύπτει

$$\left|\varepsilon_n\right| \leq \frac{L^n}{1-L} \left|x_0 - x_1\right|,$$

όπου

$$L = \max_{x \in [a,b]} \left|g'(x)\right|$$

Συμπέρασμα

$L \Longrightarrow 0$ γρήγορη σύγκλιση

$L \Longrightarrow 1$ αργή σύγκλιση

Εκτίμηση σφάλματος στη n-οστή επανάληψη

$$\left|\varepsilon_n\right| \leq \frac{L^n}{1-L}\left|x_0 - x_1\right|,$$

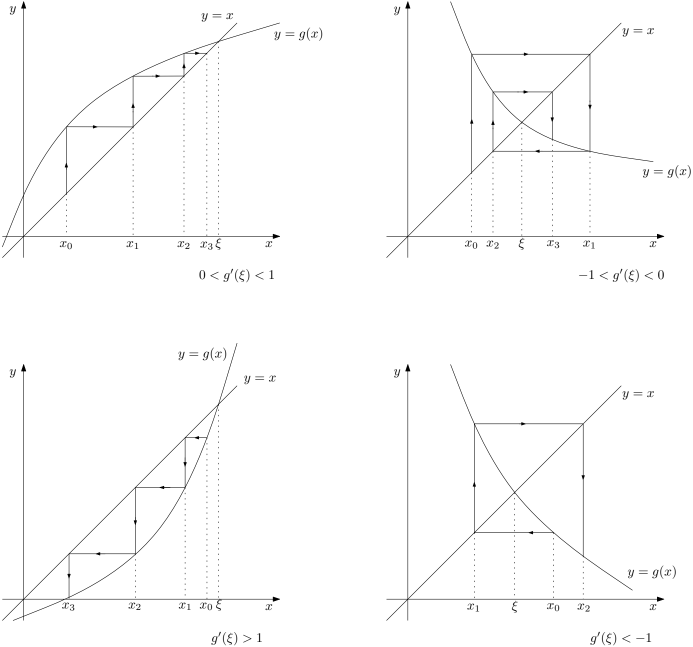
όπου

$$L = \max_{x\in[a,b]}\left|g'(x)\right|$$

Στη συνέχεια θα μελετηθεί ο ρόλος της $L < 1$. Ας υποθέσουμε ότι $\left|g'(\xi)\right| > 1$. Αν έχουμε την ακολουθία των επαναλήψεων $x_{n+1} = g\left(x_n\right)$ και μια ρίζα $\xi = g(\xi)$, τότε

$$\left|\xi - x_{n+1}\right| = \left|g(\xi) - g(x_n)\right| = \left|g'(\xi_n)\right|\left|\xi - x_n\right|.$$

Αν το x_n είναι πολύ κοντά στο ξ, τότε $\left|g'(\xi_n)\right| > 1$, και το σφάλμα $\left|\xi - x_{n+1}\right|$ θα είναι μεγαλύτερο του $\left|\xi - x_n\right|$. Οπότε η σύγκλιση δεν είναι δυνατή αν $\left|g'(\xi_n)\right| > 1$. Ο υπολογισμός των επαναλήψεων της μεθόδου του σταθερού σημείου, για διάφορες περιπτώσεις, έχει την γεωμετρική ερμηνεία που εμφανίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



y
y = x
y = g(x)
x_0 x_1 x_2 x_3 ξ x
0 < g′(ξ) < 1
y
y = x
y = g(x)
x_0 x_2 ξ x_3 x_1 x
−1 < g′(ξ) < 0
y = g(x)
y
y = x
x_3 x_2 x_1 x_0 ξ x
g′(ξ) > 1
y
y = x
y = g(x)
x_1 ξ x_0 x_2 x
g′(ξ) < −1

Σχήμα:

Συχνά είναι αδύνατο να βρεθεί ένα διάστημα, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του προηγ. θεωρήματος. Σε μία τέτοια περίπτωση οι ακόλουθες υποθέσεις μπορούν να εξασφαλίσουν σύγκλιση της μεθόδου του σταθερού σημείου αν η αρχική προσέγγιση επιλεγεί *αρκετά κοντά* στο σταθερό σημείο.

Θεώρημα(Τοπικής Σύγκλισης)

Έστω $g(x) \in C^1[a, b]$[a] και η $g(x)$ έχει ένα σταθερό σημείο ξ στο εσωτερικό του $[a, b]$. Αν $|g'(\xi)| < 1$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε η μέθοδος του σταθερού σημείου να συγκλίνει στο ξ για $x_0 \in (a, b)$ με $|x_0 - \xi| < \varepsilon$.

[a] Το διάστημα $[a, b]$ δύναται να είναι μη πεπερασμένο

Απόδειξη

Επειδή η $g'(x)$ είναι συνεχής στο (a, b) και $|g'(\xi)| < 1$, τότε για οποιαδήποτε σταθερά K που ικανοποιεί την $|g'(\xi)| \leq K < 1$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \equiv I_\varepsilon$, τότε $|g'(x)| \leq K$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για ένα δεδομένο $x \in I_\varepsilon$, έχουμε

$$|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| = \left|g'(\xi_n)\right| |x - \xi| \leq K\varepsilon < \varepsilon,$$

όπου $min(x, \xi) < \xi_n < max(x, \xi)$, που αποδεικνύει ότι $g(x) \in I_\varepsilon$ για όλα τα $x \in I_\varepsilon$. Άρα ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος (γενικής σύγκλισης)για το διάστημα I_ε.

Παράδειγμα

Αν $\alpha > 0$ και $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{\alpha}{x})$ με $x > 0$, να αποδειχθεί ότι η μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει στην $\sqrt{\alpha}$, αν το x_0 εκλεγεί αρκετά πλησίον της $\sqrt{\alpha}$.

Λύση

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\alpha}{x^2})$$

, άρα τόσο η $g(x)$ όσο και η $g'(x)$ είναι συνεχείς για $x > 0$.

Επιπλέον, η $\sqrt{\alpha}$ είναι ένα σταθερό σημείο της $g(x)$, καθόσον $\sqrt{\alpha} = g(\sqrt{\alpha})$.

Τέλος, $g'(\sqrt{\alpha}) = 0 < 1$, συνεπώς ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος(τοπικής σύγκλισης) και η μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει για x_0 πλησίον της $\sqrt{\alpha}$.

Ταχύτητα σύγκλισης

Ορισμός. Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία, η οποία συγκλίνει στο ξ. Αν υπάρχουν θετικές σταθερές c και p τέτοιες ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} = c, \tag{21}$$

τότε η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ έχει τάξη σύγκλισης p, με ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος(ή ρυθμό σύγκλισης) c
(αν $p = 1$ τότε $c < 1$).
Για αρκετά μεγάλες τιμές του n θα ισχύει

$$|\varepsilon_{n+1}| \sim c\,|\varepsilon_n|^p$$

(όπου $\sim$ σημαίνει: είναι ανάλογο ή συμπεριφέρεται ανάλογα).

$p = 1$	γραμμική
$p = 2$	τετραγωνική
$p = 3$	κυβική κ.ο.κ

Θεώρημα (τάξη σύγκλισης)

Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος(τοπικής σύγκλισης) και

1) όλες οι παράγωγοι της $g(x)$ μέχρι p-τάξης είναι συνεχείς στο διάστημα I_ε $(g(x) \in C^p(I)$,

2) $g^{(k)}(\xi) = 0$ για $k = 1, 2, \ldots, p-1$ με $g^{(p)}(\xi) \neq 0$ και $p \geq 1$,

τότε η μέθοδος του σταθερού σημείου συγκλίνει στο σταθερό σημείο $\xi \in I_\varepsilon$ για όλα τα $x \in I_\varepsilon$ και έχει p τάξη σύγκλισης.

Απόδειξη

Η $g(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x = \xi$, οπότε

$$g(x_n) = \quad g(\xi) + \tfrac{(x_n-\xi)}{1!}g'(\xi) + \tfrac{(x_n-\xi)^2}{2!}g''(\xi) + \dots$$

$$+\tfrac{(x_n-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(\xi) + \tfrac{(x_n-\xi)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n)$$

όπου ξ_n είναι ένα σημείο μεταξύ των x_n και ξ.
Λόγω της υπόθεσης 2) του θεωρήματος έχουμε

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi) = \frac{(x_n - \xi)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n)$$

και επειδή $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ λαμβάνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \frac{1}{p!}\left|g^{(p)}(\xi)\right|. \tag{22}$$

Άρα η τάξη σύγκλισης της μεθόδου του σταθερού σημείου είναι p.

Συμπέρασμα

Όσο περισσότερες παράγωγοι της $g(x)$ μηδενίζονται στο $x = \xi$ τόσο ταχύτερη είναι η σύγκλιση της μεθόδου του σταθερού σημείου.

Η μέθοδος Newton-Raphson(N-R)

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x) \in C^2[a, b]$. Έστω $x_n \in [a, b]$ μια προσέγγιση στην ρίζα ξ τέτοια ώστε $f'(x_n) \neq 0$ και $|x_n - \xi|$ είναι ¨μικρό. Έστω το δευτέρου βαθμού πολυώνυμο του Taylor για την $f(x)$ γύρω από το x_n, οπότε έχουμε

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2!} f''\left(\eta(x)\right) \tag{23}$$

όπου $\eta(x)$ βρίσκεται μεταξύ x και x_n. Για $x = \xi$ η (23) δίνει

$$f(\xi) = 0 = f(x_n) + (\xi - x_n)f'(x_n) + \frac{(\xi - x_n)^2}{2!} f''\left(\eta(x)\right). \tag{24}$$

Διατηρώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους της (24), έχουμε

$$0 \simeq f(x_n) + (\xi - x_n)f'(x_n)$$

ή

$$\xi \simeq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Αλγόριθμος της μεθόδου N-R

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x) \in C^2[a, b]$ και μία αρχική προσέγγιση $x_0 \in [a, b]$.

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ μέχρις ότου επιτευχθεί σύγκλιση να εκτελείται:

Υπολογισμός του

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Σύγκλιση της μεθόδου N-R

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει τη σπουδαιότητα εκλογής του x_0 σε σχέση με τη σύγκλιση της μεθόδου N-R.

Θεώρημα

Έστω $f(x) \in C^2[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon], \varepsilon > 0$.
Αν $f(\xi) = 0$ και $f'(\xi) \neq 0$, τότε υπάρχει $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ τέτοιο ώστε η μέθοδος N-R συγκλίνει στο ξ για κάθε αρχική προσέγγιση $x_0 \in I_{\varepsilon_0} = [\xi - \varepsilon_0, \xi + \varepsilon_0]$.
Επιπλέον η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

Απόδειξη

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε ένα διάστημα $I_{\varepsilon_0} = [\xi - \varepsilon_0, \xi + \varepsilon_0]$ τέτοιο ώστε:

1. $g(x) \in C^1(I_{\varepsilon_0})$,
2. $g(\xi) = \xi$ και
3. $|g'(\xi)| \leq L < 1$ για μια σταθερά L με $L \in (0, 1)$.

.....Απόδειξη

Επειδή $f'(\xi) \neq 0$ και η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $I_\varepsilon = [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ τέτοιο ώστε $f'(x) \neq 0$ για $x \in [\xi - \varepsilon_1, \xi + \varepsilon_1]$. Συνεπώς, η $g(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\xi - \varepsilon_1, \xi + \varepsilon_1]$.
Επίσης,

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

και επειδή $f(x) \in C^2[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ έχουμε $g(x) \in C^1[\xi - \varepsilon_1, \xi + \varepsilon_1]$.
Επίσης

$$g'(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2} = 0 < 1$$

και $g(\xi) = \xi$. Άρα οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος ικανοποιούνται για την

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \sigma\tau o \quad I_{\varepsilon_1}.$$

Συνεπώς, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει στο ξ για κάθε $x_0 \in I_{\varepsilon_0}$ με $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$. Επειδή $g'(\xi) = 0$, λόγω του θεωρήματος (τάξη σύγκλισης), η σύγκλιση είναι τουλάχιστον **τετραγωνική**.

Επιλογή του $\mathbf{x_0}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\varepsilon_{n+1}\right|}{\left|\varepsilon_n\right|^2} = \frac{1}{2}\left|g''(\xi)\right|.$$

Αλλά

$$g''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\varepsilon_{n+1}\right|}{\left|\varepsilon_n\right|^2} = M \tag{26}$$

όπου

$$M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right|. \tag{27}$$

Από την (26) προκύπτει ότι

$$\left|\varepsilon_{n+1}\right| \leq M\varepsilon_n^2$$

ή

$$\left|M\varepsilon_{n+1}\right| \leq \left(M\varepsilon_n\right)^{2^1} \leq \left(M\varepsilon_{n-1}\right)^{2^2} \leq \ldots \leq \left(M\varepsilon_0\right)^{2^n}$$

και προκειμένου $\lim_{n\to\infty}\left|\varepsilon_{n+1}\right| = 0$ θα πρέπει

$$\left|M\varepsilon_0\right| < 1$$

...Επιλογή του $\mathbf{x_0}$

θα πρέπει

$$|M\varepsilon_0| < 1$$

ή

$$|\xi - x_0| < \frac{1}{M} = 2\left|\frac{f'(\xi)}{f''(\xi)}\right|. \tag{28}$$

Συμπέρασμα

Η επιλογή του x_0 εξαρτάται από την ποσότητα M. Αν το M είναι αρκετά μεγάλο, τότε το x_0 θα πρέπει να επιλεγεί πολύ κοντά στο ξ προκειμένου η μέθοδος N-R να συγκλίνει.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ με αρχική προσέγγιση $x_0 = 2$. Να εκτελεστούν πέντε επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson.

Επίσης, να υπολογιστεί το απόλυτο σφάλμα σε κάθε επανάληψη και να επαληθευτεί αριθμητικά η τετραγωνική τάξη σύγκλισης της μεθόδου.

Λύση

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται για τις πέντε πρώτες επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson το απόλυτο σφάλμα και ο λόγος $|\varepsilon_n|/|\varepsilon_{n-1}|^2$.

n	Απόλυτο Σφάλμα $\lvert\varepsilon_n\rvert$	$\lvert\varepsilon_n\rvert/\lvert\varepsilon_{n-1}\rvert^2$
0	8.0130876×10^{-1}	-
1	2.7189699×10^{-1}	0.42345
2	4.8441435×10^{-2}	0.65525
3	2.0074889×10^{-3}	0.85549
4	3.6829405×10^{-6}	0.91387
5	$1.2432499 \times 10^{-11}$	0.91657

Πίνακας: Αριθμητική επαλήθευση της τετραγωνικής τάξης σύγκλισης της μεθόδου

Παρατήρηση

Ο λόγος $|\varepsilon_n|/|\varepsilon_{n-1}|^2$ συγκλίνει σε μια σταθερά, επιβεβαιώνοντας αριθμητικά την τετραγωνική τάξη σύγκλισης της μεθόδου (βλ. (22)). Επίσης, ο λόγος σφάλματος προσεγγίζει την τιμή

$$\frac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|} \simeq 0.916586$$

επιβεβαιώνοντας αριθμητικά ότι η ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος της μεθόδου Newton-Raphson είναι $c = f''(\xi)/2f'(\xi)$.

Προσδιορισμός ρίζας ξ πολλαπλότητας k με τη μεθόδο N-R

Επειδή διαπιστώνονται προβλήματα αν $f(x_n)$ και $f'(x_n)$ συγκλίνουν στο μηδέν ταυτόχρονα, η περίπτωση αυτή εξετάζεται στη συνέχαια πιο αναλυτικά.

Ορισμός

Η ρίζα ξ της $f(x)$ είναι πολλαπλότητας k αν η $f(x)$ μπορεί να γραφτεί υπό την μορφή $f(x) = (x-\xi)^k h(x)$, για $x \neq \xi$, όπου

$$\lim_{x \to \xi} h(x) \neq 0.$$

Θεώρημα

Η ρίζα ξ της $f(x) \in C^k[a,b]$, είναι πολλαπλότητας k αν και μόνον αν

$$f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(k-1)}(\xi) = 0$$

και

$$f^{(k)}(\xi) \neq 0.$$

Με βάση το ανωτέρω θεώρημα, η υπόθεση $f'(\xi) \neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξής: η ξ είναι μία απλή ρίζα της $f(x) = 0$.

Σε περίπτωση τώρα που η ρίζα ξ έχει κάποια πολλαπλότητα $k > 1$, τότε έχουμε:

Θεώρημα

Αν $f(x) \in C^2[a, b]$ και $\xi \in [a, b]$ όπου ξ είναι μια ρίζα της $f(x) = 0$, βαθμού πολλαπλότητας $k > 1$, τότε αν η μέθοδος N-R συγκλίνει, η σύγκλιση θα είναι **γραμμική**.

Απόδειξη

Είναι

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Λόγω της πολλαπλότητας της ξ έχουμε $f'(\xi) = 0$, άρα υπάρχει αοριστία για $x = \xi$. Για την άρση της αοριστίας εργαζόμαστε ως εξής. Αφού η ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k > 1$, η $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = (x - \xi)^k h(x), \quad h(\xi) \neq 0. \tag{29}$$

....Απόδειξη

Επομένως

$$f'(x) = (x-\xi)^{k-1}\left[kh(x) + (x-\xi)h'(x)\right] \tag{30}$$

και

$$f''(x) = (x-\xi)^{k-2}\left[k(k-1)h(x) + 2k(x-\xi)h'(x) + (x-\xi)^2 h''(x)\right]. \tag{31}$$

Άρα

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} g'(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \lim_{x\to\xi} \frac{(x-\xi)^k h(x)(x-\xi)^{k-2}\left[k(k-1)h(x)+2k(x-\xi)h'(x)+(x-\xi)^2h''(x)\right]}{(x-\xi)^{2k-2}[kh(x)+(x-\xi)h'(x)]^2} \\ &= \frac{k(k-1)[h(\xi)]^2}{k^2[h(\xi)]^2} = \frac{k-1}{k} < 1. \end{aligned}$$

Επομένως, η μέθοδος είναι **γραμμικής** σύγκλισης.

Γνωστή πολλαπλότητα

Αν υποθέσουμε τώρα ότι

$$k = 2$$

και θέσουμε

$$g(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$$

τότε

$$g'(x) = \frac{2f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{[f'(x)]^2}.$$

Εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα του L' Hospital βρίσκουμε

$$g'(\xi) = 0.$$

Συνεπώς η ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \mathbf{k}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

θα συγκλίνει τουλάχιστον τετραγωνικά στην ξ για κατάλληλο x_0.

Άγνωστη πολλαπλότητα

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{33}$$

Αν ξ είναι μια ρίζα με πολλαπλότητα $k > 1$, έχουμε

$$f(x) = (x-\xi)^k h(x) \quad \mu\varepsilon \quad h(\xi) \neq 0$$

τότε η

$$\mu(x) = \frac{(x-\xi)^k h(x)}{k(x-\xi)^{k-1}h(x) + (x-\xi)^k h'(x)} = \frac{(x-\xi)h(x)}{kh(x) + (x-\xi)h'(x)}$$

έχει μια ρίζα ξ, η οποία είναι πολλαπλότητας 1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο N-R στη συνάρτηση $\mu(x)$, οπότε

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{[f'(x)]^2 - [f(x)][f''(x)]}{[f'(x)]^2}}$$

ή

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}. \tag{34}$$

Άγνωστη πολλαπλότητα

Αν η $g(x)$ είναι συνεχής, η μέθοδος

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{35}$$

θα συγκλίνει τετραγωνικά ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα της ρίζας.

Το μόνο μειονέκτημα της μεθόδου είναι ο πρόσθετος υπολογισμός της $f''(x)$ και γενικά η επιπλέον υπολογιστική δουλειά.

Γενική Σύγκλιση

Ένα τέτοιο κριτήριο δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

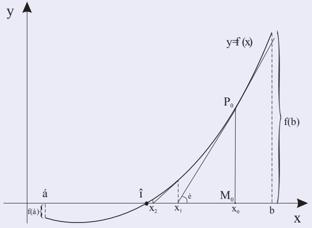
Θεώρημα (γενικής σύγκλισης)

Αν

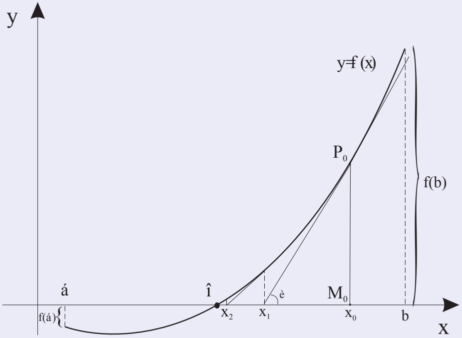
1. $f(x) \in C^2[a, b]$
2. $f(a)f(b) < 0$
3. $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$
4. $f''(x)$ δεν αλλάζει σημείο στο $[a, b]$
5. Αν c συμβολίζει το άκρο του $[a, b]$ για το οποίο η $|f'(x)|$ είναι μικρότερη και $\left|\frac{f(c)}{f'(c)}\right| \leq b - a$

τότε για κάθε $x_0 \in [a, b]$ η μέθοδος N-R συγκλίνει τετραγωνικά στη μοναδική ρίζα ξ της $f(x)$ στο $[a, b]$.

- Η (2) εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της $f(x)$ στο $[a, b]$.
- Η (3) εξασφαλίζει ότι η $f(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα ($f' > 0$) ή αυστηρά φθίνουσα ($f' < 0$) συνάρτηση στο $[a, b]$. Σαν συνέπεια έχουμε ότι το $[a, b]$ περιέχει **ακριβώς** μία ρίζα της $f(x)$.
- Η (4) εξασφαλίζει ότι η $f(x)$ έχει τα κοίλα προς τα άνω ($f''(x) \geq 0$) ή τα κοίλα προς τα κάτω ($f''(x) \leq 0$).
- Η (5), θα πρέπει να την εξετάσουμε γεωμετρικά προκειμένου να διαπιστώσουμε τι μας εξασφαλίζει.



Σχήμα: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου N-R



$$\tan\theta = f'(x_0) = \frac{M_0P_0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{ή} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (5) εξασφαλίζει το εξής: αν διαλέξουμε το x_0 στο $[a, b]$, τότε και το $x_1 \in [a, b]$. Αυτό εξασφαλίζεται αν απαιτήσουμε το x_0 να είναι είτε το a ή το b, τότε και $x_1 \in [a, b]$.

Παράδειγμα

1. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x^3 - 2x - 1, \quad x \in [1, 2].$$
Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει.

Λύση

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα γενικής σύγκλισης διαπιστώνεται ότι

- $f(x) \in C^2[1, 2]$ και $f(1)f(2) < 0$.
- Επίσης $f'(x) = 3x^2 - 2 \neq 0$ και $f''(x) = 6x > 0$ για $x \in [1, 2]$.
- Τέλος, εξετάζοντας την 5) υπόθεση έχουμε $\left|f(1)/f'(1)\right| = 2 > 1$,

άρα η μέθοδος N-R δεν συγκλίνει στο $[1, 2]$.

Λαμβάνοντας το μέσο του διαστήματος και εξετάζοντας το δεξί τμήμα δηλαδή το $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, διαπιστώνουμε ότι $f(\frac{3}{2})f(2) < 0$ και $\left|f(\frac{3}{2})/f'(\frac{3}{2})\right| = \frac{5}{30} < 1$.

Άρα η μέθοδος N-R συγκλίνει για κάθε $x_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Παράδειγμα

2. Δίνεται η $f(x) = x^2 - c, \quad x > 0$, όπου $c > 0$ δεδομένος αριθμός. Να δειχθεί ότι η μέθοδος N-R συγκλίνει στην $\sqrt{c}$ για κάθε $x_0 > 0$.

Λύση

Για κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < \sqrt{c} < b$ έχουμε ότι οι υποθέσεις 1) και 2) του Θεωρήματος ισχύουν. Επίσης, επειδή $f'(x) = 2x \neq 0, \qquad f''(x) = 2$ για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύουν και οι υποθέσεις 3) και 4). Τέλος, προκειμένου να ισχύει η συνθήκη 5) θα πρέπει $(|f'(a)| < |f'(b)|)$

$$\frac{|a^2 - c|}{2a} \leq b - a.$$

Επίσης, εύκολα διαπιστώνεται ότι η ανωτέρω ανισότητα ισχύει για $b \geq 1/2(a + c/a)$. Συνεπώς, η μέθοδος N-R συγκλίνει στην $\sqrt{c}$ για κάθε $x_0 > 0$. Η N-R έχει την ακόλουθη μορφή

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n}$$

ή

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Η ανωτέρω μέθοδος χρησιμοποιείται συνήθως για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού.

3. Υπολογισμός του $1/c$ χωρίς διαίρεση. Για ένα δεδομένο $c > 0$, να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος N-R για τον υπολογισμό του $1/c$.

Λύση

Ο υπολογισμός του $1/c$ ανάγεται στην εύρεση της λύσης της εξίσωσης

$$f(x) = \frac{1}{x} - c = 0$$

Η μέθοδος N-R παράγει διαδοχικά

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - c}{-\frac{1}{x_n^2}}$$

ή

$$x_{n+1} = x_n(2 - cx_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{36}$$

Παρατηρήστε ότι για τον υπολογισμό της (36) δεν απαιτούνται διαιρέσεις.

Επειδή

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$$

για $x > 0$ συνεπάγεται ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος για ένα διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε $0 < a < c^{-1} < b$ και

$$\frac{|f(b)|}{|f'(b)|} = b(bc - 1) \leq b - a$$

Η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται για $b_1 \leq b \leq b_2$, όπου

$$b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - ac}}{c}$$

η οποία για αυθαίρετα μικρό $x > 0$ γίνεται $0 < b < 2c^{-1}$. Συνεπώς η μέθοδος N-R συγκλίνει για οποιοδήποτε x_0 τέτοιο ώστε

$$0 < x_0 < 2c^{-1} \tag{37}$$

4. Να υπολογιστεί με τη μέθοδο N-R προσεγγιστική τιμή της ποσότητας e^{-1}.

Για $c = e$ η (37) γίνεται $0 < x_0 < 2e^{-1} \simeq 0.735776$ και επιλέγοντας $x_0 = 0.3$ η (36) παράγει την ακολουθία:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.3 & 2 - ex_0 &= 1.1845157\\
x_1 &= 0.355355 & 2 - ex_1 &= 1.0340461\\
x_2 &= 0.36745345 & 2 - ex_2 &= 1.00111583\\
x_3 &= 0.36787907 & 2 - ex_3 &= 1.0000014\\
x_4 &= 0.36787958 & 2 - ex_4 &= 1.0000000
\end{aligned}
$$

όπου φαίνεται η τετραγωνική τάξη σύγκλισης με το διπλασιασμό των μηδενικών στη δεύτερη στήλη, σε κάθε επανάληψη.

5. Δίνεται $f(x) \in c^1[a,b]$, με $f'(x) \neq 0$ για $x \in [a,b]$ και ξ η ρίζα της $f(x) = 0$ στο $[a,b]$. Αν $g(x) = x + h(x)f(x)$, να προσδιοριστεί η συνάρτηση $h(x)$ έτσι ώστε η μέθοδος του σταθερού σημείου να συγκλίνει τετραγωνικά.

Λύση

Για να συγκλίνει η μέθοδος σταθερού σημείου τετραγωνικά θα πρέπει $g'(\xi) = 0$. Από την

$$g'(x) = 1 + h'(x)f(x) + h(x)f'(x)$$

έχουμε για $x = \xi$ ότι

$$g'(\xi) = 0 = 1 + h(\xi)f'(\xi)$$

αφού $f(\xi) = 0$. Η τελευταία σχέση γράφεται

$$h(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$$

από την οποία προκύπτει (χωρίς να είναι η μόνη επιλογή) ότι η $h(x)$ μπορεί να εκλεγεί σαν

$$h(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Έτσι η μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1} = g(x_n)$ γράφεται

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

6. Αν $f(x) = x^k - c, \quad x > 0$, όπου $c > 0$ και k ένας θετικός ακέραιος, τότε να δειχθεί ότι η μέθοδος N-R συγκλίνει στην $\sqrt[k]{c}$ για κάθε $x_0 > 0$.

Λύση

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος ισχύουν για κάθε διάστημα $[a, b]$ αν $0 < a < \sqrt[k]{c}$ και b αρκετά μεγάλο, τέτοιο ώστε $b \geq \frac{1}{k}\left[(k-1)a + c/a^{k-1}\right]$.
Η μέθοδος N-R δίνεται τώρα από το επαναληπτικό σχήμα

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - c}{k x_n^{k-1}}$$

ή

$$x_{n+1} = (1 - \frac{1}{k})x_n + \frac{1}{k} c x_n^{1-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

για $k = 2$ έχουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + c/x_n).$$

Αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την $\sqrt{17}$ και λάβουμε $x_0 = 4$ οι επαναλήψεις που θα βρούμε είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 4,12 \\
x_2 &= 4,123 \quad 106 \\
x_3 &= 4,123 \quad 1056 \quad 2561 \quad 77 \\
x_4 &= 4.123 \quad 1056 \quad 2561 \quad 7660 \quad 5498 \quad 2140 \quad 9856
\end{aligned}$$

Η τιμή της x_4 είνα ακριβής σε 28 σημαντικά ψηφία. Παρατηρήστε τον αναμενόμενο διπλασιασμό των σημαντικών ψηφίων στους υπολογισμούς.

Η ανωτέρω μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά για τον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών από τα υποπρογράμματα βιβλιοθήκης που συνοδεύουν κάποια γλώσσα προγραμματισμού.

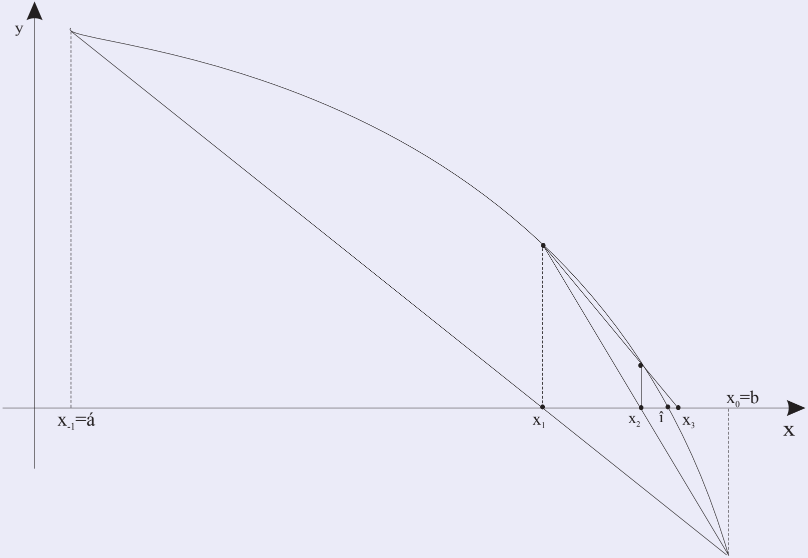
Ας σημειωθεί ότι η ανωτέρω μέθοδος έχει ανακαλυφθεί από τον Έλληνα μηχανικό και αρχιτέκτονα Ήρωνα (100 π.Χ.-100 μ.Χ)

Η μέθοδος της τέμνουσας

- Γενικά η μέθοδος του Newton συγκλίνει ταχύτερα από τις παρενθετικές μεθόδους αλλά έχει σοβαρά μειονεκτήματα, όπως πόσο κοντά πρέπει να διαλέξουμε το x_0 στο ξ και η ανάγκη του υπολογισμού της $f'(x_n)$ για κάθε n.
- Αν η $f(x)$ είναι μια πολύπλοκη συνάρτηση, τότε ο υπολογισμός της παραγώγου της παρουσιάζει δυσκολίες καθόσον θα πρέπει να γίνει όσο το δυνατόν ακριβής για να αποφύγουμε τη συσσώρευση σφαλμάτων στρογγύλευσης.
- Η μέθοδος της τέμνουσας είναι η ενδιάμεση λύση μεταξύ των παρενθετικών μεθόδων και της μεθόδου N-R.
- Η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας είναι καλύτερη από γραμμική αλλά όχι τετραγωνική. Αυτό μαζί με το γεγονός ότι δε χρειάζεται ο υπολογισμός της παραγώγου την κάνει μια πολύ ελκυστική μέθοδο.
- Αντικαθιστώντας στη μέθοδο N-R την $f'(x_n)$ με το πηλίκο

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

προκύπτει η μέθοδος της τέμνουσας.



Σχήμα: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της τέμνουσας.

Ο αλγόριθμος της μεθόδου της τέμνουσας

Δίδεται η $f(x) \in C[a, b]$ και οι αρχικές προσεγγίσεις $x_{-1},\ x_0 \in [a, b]$.

Αλγόριθμος

Για $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ μέχρις ότου επιτευχθεί σύγκλιση να υπολογίζεται το x_{n+1} από τον τύπο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

όπου

$$f(x_n) \neq f(x_{n-1}).$$

Έτσι έχουμε μια μέθοδο, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί ακόμα και αν $f(a)f(b) > 0$, αλλά δεν συγκλίνει πάντα.

Σύγκλιση

Θεώρημα

Αν $f(\xi) = 0,\ f'(\xi) \neq 0$ και η $f''(x)$ είναι συνεχής σε μια περιοχή της ξ, τότε η μέθοδος της τέμνουσας συγκλίνει στο ξ αν $x_{-1},\ x_0 \in I_\varepsilon = [\xi - \varepsilon,\ \xi + \varepsilon],\ \varepsilon > 0$.

Τάξη σύγκλισης

Αναζήτηση και προσδιορισμός ενός αριθμού $m > 0$ έτσι ώστε $\varepsilon_{n+1} = K\varepsilon_n^m$. Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει και $\varepsilon_n = K\varepsilon_{n-1}^m$ ή $\varepsilon_{n-1} = K^{-\frac{1}{m}} \cdot \varepsilon_n^{\frac{1}{m}}$.

$$\varepsilon_{n+1} = M\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} = M\varepsilon_n\left(K^{-\frac{1}{m}} \cdot \varepsilon_n^{\frac{1}{m}}\right) \equiv K\varepsilon_n^m$$

άρα θα πρέπει να ισχύει

$$1 + \frac{1}{m} = m$$

ή

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

συνεπώς $\varepsilon_{n+1} = K\varepsilon_n^m$ με $m = 1.618$.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, η οποία είναι γνωστό ότι έχει μια ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$. Να εκτελεστούν έξι επαναλήψεις της μεθόδου της Τέμνουσας.

Λύση

Για $x_{-1} = 2$ και $x_0 = 1$, η μέθοδος της τέμνουσας δίνει

$$x_1 = x_0 - f(x_0)\frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})} = 1 - (-1)\frac{1-2}{-1-9} = 1.1.$$

Για $x_0 = 1$ και $x_1 = 1.1$ η επόμενη επανάληψη της μεθόδου της τέμνουσας δίνει

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 1.1 - (-0.549)\frac{1.1 - 1}{-0.549 - (-1)} = 1.2217294900.$$

Οι επόμενες τέσσερις επαναλήψεις παράγουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 1.1964853266$$

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} = 1.1986453684$$

$$x_5 = x_4 - f(x_4)\frac{x_4 - x_3}{f(x_4) - f(x_3)} = 1.1986913364$$

$$x_6 = x_5 - f(x_5)\frac{x_5 - x_4}{f(x_5) - f(x_4)} = 1.1986912435.$$

Η προσέγγιση x_6 έχει απόλυτο σφάλμα περίπου 3.907 x 10^{-12}. Προκειμένου να υπολογιστεί η προσέγγιση x_6, πραγματοποιήθηκαν έξι επαναλήψεις της μεθόδου της τέμνουσας (η πρώτη επανάληψη παρήγαγε το x_1, η δεύτερη το x_2, κ.λ.π.) και υπολογίστηκαν οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στα $x = x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ και x_5.

- Επομένως, το απόλυτο σφάλμα 3.907×10^{-12} επιτεύχθηκε με ένα συνολικό κόστος υπολογισμών επτά τιμών μιας συνάρτησης. Η μέθοδος NR πέτυχε παρόμοια ακρίβεια με μόλις πέντε επαναλήψεις (βλ.πίνακα 1). Όμως, για αυτές τις πέντε επαναλήψεις, απαιτήθηκε κόστος υπολογισμών δέκα τιμών της συνάρτησης.
- *Επομένως, αν και η μέθοδος της Τέμνουσας χρειάστηκε περισσότερες επαναλήψεις από τη μέθοδο NR για να πετύχει τη συγκεκριμένη ακρίβεια, η μέθοδος της Τέμνουσας χρειάστηκε λιγότερους υπολογισμούς τιμών της συνάρτησης.*

Η μέθοδος του Aitken

- Η σύγκλιση μιας επαναληπτικής μεθόδου που είναι γραμμικής τάξης μπορεί να επιταχυνθεί με τη χρήση της μεθόδου του Aitken.
- Έστω ότι η ακολουθία $\{x_n\}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ έχει γεωμετρική σύγκλιση στο ξ δηλαδή
$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = k,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{38}$$
όπου $\varepsilon_n = x_n - \xi$ με $|k| < 1$.
- Δεδομένων τριών διαδοχικών όρων $x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2}$ της ακολουθίας μπορεί να προσδιοριστεί το ξ. Πράγματι, από την (38) έχουμε
$$\frac{x_{n+1} - \xi}{x_n - \xi} = \frac{x_{n+2} - \xi}{x_{n+1} - \xi}$$

Η μέθοδος του Aitken

- Λύνοντας ως προς ξ προκύπτει

$$\xi = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \tag{39}$$

  ή

$$\xi = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \tag{40}$$

  όπου Δ είναι ο τελεστής των προς τα εμπρός διαφορών και ορίζεται σαν $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ με $\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$.

- Ακόμα και αν η σύγκλιση της ακολουθίας $\{x_n\}$ $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ δεν είναι γεωμετρική, η σύγκλιση επιταχύνεται με τη δημιουργία μιας νέας ακολουθίας $\{x_n'\}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ που προκύπτει από την (40) και δίνεται από το επαναληπτικό σχήμα

$$x_n' = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{41}$$

  το οποίο είναι γνωστό σαν η μέθοδος του Aitken.

- Μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - \xi}{x_n - \xi} = 0$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{x_n - \xi} = k < 1.$$

Παρατηρήσεις

- Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις της καθολικής σύγκλισης της μεθόδου σταθερού σημείου, η σύγκλιση της νέας ακολουθίας είναι δεύτερης τάξης.
- Δεν αυξάνεται η ταχύτητα σύγκλισης μιας μεθόδου, με τη χρήση της μεθόδου του Aitken, όταν η σύγκλισή της είναι δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Aitken προκειμένου να επιταχυνθεί η σύγκλιση της μεθόδου του σταθερού σημείου.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του σταθερού σημείου για τον υπολογισμό των $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.3678794412$ και $x_4 = 0.6922006276$. Έπειτα, αντικαθιστώντας τις τιμές στην (41) για $n = 3$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
x_3^{'} &= x_3 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_4 + x_2 - 2x_3} \\
&= 0.6922006276 - \frac{(0.6922006276 - 0.3678794412)^2}{0.6922006276 + 1 - 2(0.3678794412)} \\
&= 0.5822260970.
\end{aligned}
$$

Μετά από δέκα επαναλήψεις της μεθόδου του σταθερού σημείου και της μεθόδου του Aitken έχουμε τις τιμές που εμφανίζονται στον ακόλουθο πίνακα. Το σταθερό σημείο της $g(x)$ είναι το $\xi = 0.5671432904$ με ακρίβεια δέκα δεκαδικών ψηφίων.

n	μέθοδος σταθερού σημείου	μέθοδος Aitken
1	1.0000000000	-
2	0.3678794412	-
3	0.6922006276	0.5822260970
4	0.5004735006	0.5717057675
5	0.6062435351	0.5686388059
6	0.5453957860	0.5676169948
7	0.5796123355	0.5672967525
8	0.5601154614	0.5671924279
9	0.5711431151	0.5671591338
10	0.5648793474	0.5671483792

Συμπέρασμα

Είναι φανερό ότι η ακολουθία που παράγεται με τη μέθοδο Aitken συγκλίνει γρηγορότερα.

Για παράδειγμα το x_{10} είναι ακριβές μόνο σε δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ το $x_{10}^{'}$ είναι ακριβές σε πέντε δεκαδικά ψηφία.

Πολυωνυμικές εξισώσεις

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0$$

όπου $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού $(a_n \neq 0)$.

Υπολογισμός της τιμής $p(x_0)$ **με αντικατάσταση**

α) Ο σχηματισμός των $x^k,\ k = 2(1)n$, άρα $n - 1$ πολλαπλασιασμοί,

β) Ο σχηματισμός των $a_k x^k,\ k = 1(1)n$, άρα n πολλαπλασιασμοί,

γ) Ο σχηματισμός του $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, άρα n προσθέσεις.

Σύνολο δηλαδή $2n - 1$ πολλαπλασιασμοί και n προσθέσεις.

Υπολογισμός της τιμής $p(x_0)$ **με το σχήμα του Horner**

Έστω

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$p(x) \equiv (x - x_0)q(x) + r.$$

Παρατηρούμε ότι

$$p(x_0) = r.$$

Αν λοιπόν

$$q(x) = \beta_n x^{n-1} + \beta_{n-1}x^{n-2} + \cdots + \beta_2 x + \beta_1,$$

τότε

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 \\
&\equiv (x - x_0)(\beta_n x^{n-1} + \beta_{n-1}x^{n-2} + \cdots + \beta_2 x + \beta_1) + r \\
&= \beta_n x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \beta_2 x^2 + \beta_1 x \\
&\quad -(\beta_n x_0 x^{n-1} + \beta_{n-1}x_0 x^{n-2} + \cdots + \beta_2 x_0 x + \beta_1 x_0) + r \\
&= \beta_n x^n + (\beta_{n-1} - \beta_n x_0)x^{n-1} + \cdots + (\beta_1 - \beta_2 x_0)x + r - \beta_1 x_0
\end{aligned} \tag{42}$$

.....Σχήμα του Horner

ή

$$\begin{aligned} a_n &= \beta_n \\ a_{n-1} &= \beta_{n-1} - \beta_n x_0 \\ &\vdots \\ a_1 &= \beta_1 - \beta_2 x_0 \\ a_0 &= r - \beta_1 x_0 \end{aligned} \tag{43}$$

ή

$$\begin{aligned} \beta_n &= a_n \\ \beta_{n-1} &= a_{n-1} + \beta_n x_0 \\ &\vdots \\ \beta_1 &= a_1 + \beta_2 x_0 \\ r &= a_0 + \beta_1 x_0 \end{aligned} \tag{44}$$

ή

.....Σχήμα του Horner

$$\beta_i = a_i + \beta_{i+1} x_0, \; i = n(-1)0 \tag{45}$$

με $\beta_{n+1} = 0$ και $\beta_0 = r = p(x_0)$, οπότε παρατηρούμε ότι χρειάζονται μόνο n πολλαπλασιασμοί και n προσθέσεις για τον υπολογισμό της $p(x_0)$. Για τον απλούστερο υπολογισμό των β_i ακολουθούμε την παρακάτω διάταξη:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
x_0 & & \beta_n x_0 & \beta_{n-1} x_0 & \cdots & \beta_2 x_0 & \beta_1 x_0 \\
\hline
 & \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 = p(x_0)
\end{array}$$

Άρα το σχήμα του Horner προτείνει τη γραφή του $p(x_0)$ υπό τη μορφή

$$p(x_0) = (\ldots(\underbrace{(\overbrace{a_n x_0 + a_{n-1}}^{\beta_{n-1}})x_0 + a_{n-2}}_{\beta_{n-2}})x_0 + \cdots + a_1)x_0 + a_0 \tag{46}$$

Υπολογισμός των τιμών των παραγώγων του $p(x)$

$$p(x) \equiv (x - x_0)q(x) + r$$

παρατηρούμε παραγωγίζοντάς την ότι

$$p'(x) \equiv q(x) + (x - x_0)q'(x)$$

οπότε

$$p'(x_0) \equiv q(x_0)$$

πράγμα που δηλώνει ότι για τον υπολογισμό της $p'(x_0)$ αρκεί να εφαρμοστεί δύο φορές το σχήμα του Horner, μία για την εύρεση του $q(x)$ και στη συνέχεια για την εύρεση του υπολοίπου της διαίρεσης του $q(x)$ με το $x - x_0$.

....Υπολογισμός των τιμών $p^{(k)}(x)$ των παραγώγων του $p(x)$

Γενικά, με $k+1$ διαδοχικές εφαρμογές του σχήματος του Horner, έχουμε:

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv (x-x_0)q_1(x)+r_0 \\ q_1(x) &\equiv (x-x_0)q_2(x)+r_1 \\ &\vdots \\ q_{n-1}(x) &\equiv (x-x_0)q_n(x)+r_{n-1} \\ q_n(x) &\equiv (x-x_0)\cdot 0+r_n. \end{aligned} \tag{47}$$

Άρα

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv (x-x_0)q_1(x)+r_0 \\ &= (x-x_0)[(x-x_0)q_2(x)+r_1]+r_0 \\ &= (x-x_0)^2 q_2(x)+(x-x_0)r_1+r_0 \end{aligned} \tag{48}$$

και γενικά το $p(x)$ μπορεί να λάβει τη μορφή

$$p(x) \equiv r_n(x-x_0)^n + r_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + r_1(x-x_0) + r_0.$$

Ανάπτυγμα του $p(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το x_0

$$p(x) = p(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}p'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}p''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}p^{(n)}(x_0).$$

Από τις δύο μορφές του $p(x)$ προκύπτει ότι

$$p^{(k)}(x_0) = k!r_k,\ k = 0(1)n$$

όπου

$$r_k = q_k(x_0),\ k = 0(1)n.$$

Υπολογισμός της τιμής $p^{(k)}(x_0)$

π.χ. για την εύρεση της $p''(x_0)$ έχουμε

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
x_0 & & \beta_n x_0 & \cdots & \beta_3 x_0 & \beta_2 x_0 & \beta_1 x_0 \\
\hline
 & \beta_n & \beta_{n-1} & \cdots & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 = r_0 \\
x_0 & & \gamma_n x_0 & \cdots & \gamma_3 x_0 & \gamma_2 x_0 & \\
\hline
 & \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 = r_1 & \\
x_0 & & \delta_n x_0 & \cdots & \delta_3 x_0 & & \\
\hline
 & \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_2 = r_2 & &
\end{array}
$$

Άρα $p''(x_0) = 2! r_2$

Παράδειγμα 1

1. Δίνεται το πολυώνυμο $p(x) = 6x^4 - 53x^3 + 184x^2 - 295x + 186$. Με την εφαρμογή του σχήματος Horner να βρεθούν οι τιμές $p(2),\ p'(2),\ p''(2),\ p'''(2),\ p^{(4)}(2)$.

Λύση

	6	-53	184	-295	186
2		12	-82	204	-182
	6	-41	102	-91	$4 = r_0$
2		12	-58	88	
	6	-29	44	$-3 = r_1$	
2		12	-34		
	6	-17	$10 = r_2$		
2		12			
	$6 = r_4$	$-5 = r_3$			

Εφαρμόζοντας τον τύπο $p^{(k)}(x_0) = k!r_k$ για $k = 0, 1, 2, 3, 4$ έχουμε:

$p(2) = 0!r_0 = 1 \times 4 = 4$

$p'(2) = 1!r_1 = 1 \times (-3) = -3$

$p''(2) = 2!r_2 = 2 \times 10 = 20$

$p'''(2) = 3!r_3 = 6 \times (-5) = -30$

$p^{(4)}(2) = 4!r_4 = 24 \times 6 = 144$

Παράδειγμα 2

2. Με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος Horner και μόνο να γραφεί το πολυώνυμο $p(x) = 3x^2 - 4x + 5$ στη μορφή $p(x) = a + \beta(x-2) + \gamma(x-2)^2$.

Λύση

Το ανάπτυγμα κατά Taylor στο σημείο $x_0 = 2$ είναι:

$$p(x) = p(2) + \frac{(x-2)}{1!}p'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}p''(2),$$

ή επειδή $r_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0,\ 1,\ 2$, θα έχουμε

$$p(x) = r_0 + r_1(x-2) + r_2(x-2)^2.$$

Τα r_0, r_1, r_2, υπολογίζονται με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος Horner ως εξής:

...Λύση

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 3 & -4 & 5 \\
2 & & 6 & 4 \\
\hline
 & 3 & 2 & 9 = r_0 \\
2 & & 6 & \\
\hline
 & 3 = r_2 & 8 = r_1 &
\end{array}
$$

άρα $p(x) = 9 + 8(x-2) + 3(x-2)^2$.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση του ακόλουθου έργου:
" Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση : Μια αλγοριθμική προσέγγιση, αυτο-έκδοση, Αθήνα, 2009", Νικόλαος Μισυρλής.