Λογική Πρώτης Τάξης: Σημασιολογία

- Η έννοια της ερμηνείας στη λογική πρώτης τάξης
- Άλλες θεμελιώδεις έννοιες: ικανοποίηση, ικανοποιησιμότητα, αλήθεια, μοντέλο, λογική κάλυψη, εγκυρότητα, ισοδυναμία
- Μερικά θεωρήματα που θεμελιώνουν τις παραπάνω έννοιες
- Παραδείγματα

Η Έννοια της Ερμηνείας Διαισθητικά

Η σημασία των τύπων της λογικής πρώτης τάξης δίνεται από την έννοια της ερμηνείας.

Μια **ερμηνεία (interpretation)** καθορίζει πλήρως ένα **κόσμο** για τον οποίο έχουμε αναπαραστήσει γνώση χρησιμοποιώντας τη λογική πρώτης τάξης.

Μια ερμηνεία καθορίζει πλήρως ένα κόσμο ως εξής:

- Καθορίζοντας το **σύνολο των αντικειμένων του κόσμου**. Το σύνολο αυτό λέγεται **πεδίο (domain)** ή **σύμπαν (universe)** της ερμηνείας.
- Δίνοντας μια αντιστοίχιση **των συμβόλων του λεξιλογίου** που χρησιμοποιούμε με **αντικείμενα (objects)**, **συναρτήσεις (functions)** και **σχέσεις (relations)** του κόσμου.

Η Έννοια της Ερμηνείας Διαισθητικά

Μια ερμηνεία αντιστοιχίζει κάθε **σύμβολο σταθεράς** σε ένα **αντικείμενο** του κόσμου.

Παράδειγμα: Σε μια συγκεκριμένη ερμηνεία, το σύμβολο *John* μπορεί να αναφέρεται στον John Lennon.

Σε μια άλλη ερμηνεία μπορεί να αναφέρεται στον King John, βασιλιά της Αγγλίας από το 1166 ως το 1216 μ.Χ. (`http://en.wikipedia.org/wiki/John_of_England`).

Η Έννοια της Ερμηνείας Διαισθητικά

Μια ερμηνεία αντιστοιχίζει κάθε **σύμβολο κατηγορήματος** σε μια **σχέση** του κόσμου.

Παράδειγμα: Σε μια συγκεκριμένη ερμηνεία, το σύμβολο $Brother(.,.)$ μπορεί να αναφέρεται στη σχέση αδελφότητας. Σε ένα κόσμο με τρία αντικείμενα King John, John Lennon, και Richard the Lionheart, η σχέση αδελφότητας μπορεί να ορίζεται από τις ακόλουθες πλειάδες:

$$\{\ \langle \text{King John}, \text{Richard the Lionheart} \rangle,$$
$$\langle \text{Richard the Lionheart}, \text{King John} \rangle\ \}$$

Η Έννοια της Ερμηνείας Διαισθητικά

Μια ερμηνεία αντιστοιχίζει **πάντα** το **σύμβολο ισότητας** στην **σχέση ταυτότητας (identity relation)** στον κόσμο.

Η σχέση ταυτότητας ορίζεται ως εξής:

$$id = \{\langle o, o \rangle \ : \ \text{το } o \text{ είναι αντικείμενο του κόσμου}\}$$

Η Έννοια της Ερμηνείας Διαισθητικά

Μια ερμηνεία αντιστοιχίζει κάθε **σύμβολο συνάρτησης** σε μια **συναρτησιακή σχέση (ή συνάρτηση)** στον κόσμο.

Παράδειγμα: Σε μια συγκεκριμένη ερμηνεία, το σύμβολο $FatherOf(.)$ μπορεί να αντιστοιχίζεται στην συναρτησιακή σχέση πατρότητας. Για παράδειγμα, στην πρώτη βιβλική οικογένεια, η σχέση πατρότητας μπορεί να ορίζεται από τις ακόλουθες πλειάδες:

$$\{\langle Cain, Adam\rangle, \langle Abel, Adam\rangle\}$$

Η Έννοια της Ερμηνείας - Τυπικός Ορισμός

Έστω ένα λεξιλόγιο Σ.

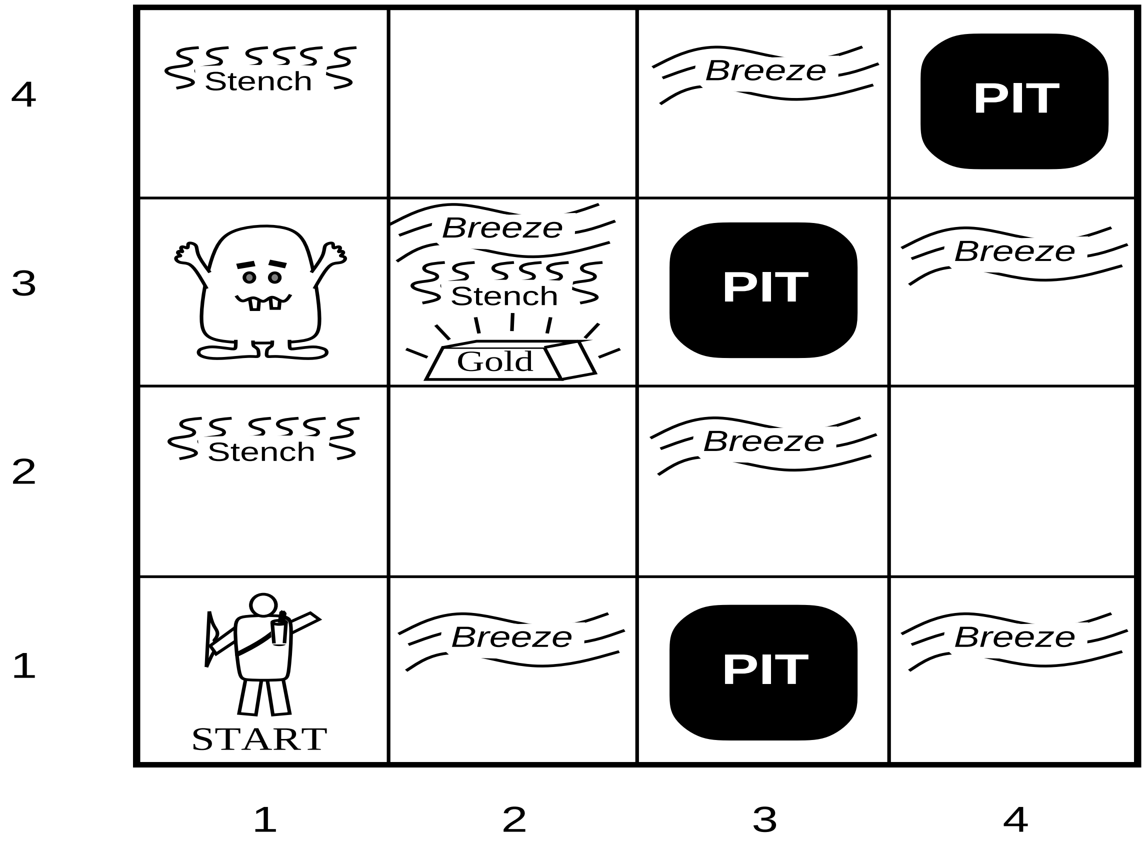
Μια **ερμηνεία** I του Σ αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο $|I|$ που ονομάζεται **πεδίο (domain)** ή **σύμπαν (universe)** της I, και μια συνάρτηση $\cdot^I$ που κάνει τις εξής αντιστοιχίσεις στα σύμβολα του Σ:

1. Κάθε **σύμβολο σταθεράς** c αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο $c^I \in |I|$.

2. Κάθε n-**αδικό σύμβολο κατηγορήματος** P αντιστοιχίζεται σε μια n-αδική σχέση $P^I \subseteq |I|^n$. Δηλαδή, το P^I είναι ένα σύνολο n-άδων που αποτελούνται από στοιχεία του πεδίου $|I|$.

3. Κάθε n-**αδικό σύμβολο συνάρτησης** F αντιστοιχίζεται σε μια n-αδική συνάρτηση $F^I : \ |I|^n \rightarrow |I|$.

Παράδειγμα: Ο Κόσμος του Wumpus



Λεξιλόγιο για το Παράδειγμα

Αν θέλουμε να παραστήσουμε τον κόσμο του Wumpus σε λογική πρώτης τάξης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω **λεξιλόγιο**:

- **Σύμβολα σταθερών**:

$$Agent, Wumpus, Gold, Breeze, Stench, Rm11, Rm12, \ldots, Rm44$$

- **Σύμβολα συναρτήσεων**:
  - Το μοναδιαίο σύμβολο συνάρτησης $NorthOf$ για να δηλώσουμε το μοναδικό τετραγωνάκι που βρίσκεται αμέσως βόρεια από το τετραγωνάκι που δηλώνει το όρισμα της συνάρτησης. Για παράδειγμα, το τετραγωνάκι αμέσως βόρεια από το τετραγωνάκι $Rm11$ είναι το τετραγωνάκι $Rm21 = NorthOf(Rm11)$.
  - Αντίστοιχα σύμβολα συναρτήσεων $SouthOf, WestOf, EastOf$.

Λεξιλόγιο για το Παράδειγμα

- **Σύμβολα κατηγορημάτων**:
  - Το δυαδικό κατηγόρημα *Location* θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει το τετραγωνάκι στο οποίο βρίσκεται το κάθε αντικείμενο του κόσμου (π.χ. ο πράκτορας, ο Wumpus και η πλάκα χρυσού).
  - Το δυαδικό κατηγόρημα *Percept* θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει κάτι που αντιλαμβάνεται ο πράκτορας (π.χ., αύρα ή δυσάρεστη μυρωδιά) στο κάθε τετραγωνάκι.
  - Το μοναδιαίο κατηγόρημα *Bottomless* θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι ένα τετραγωνάκι περιέχει πηγάδι.

Συζήτηση

Θα μπορούσε κάποιος να διαμαρτυρηθεί για τα σύμβολα σταθερών $Rm11, Rm12$ κλπ. που μοντελοποιούν τα τετραγωνάκια.

Ένας καλύτερος τρόπος για να μοντελοποιήσουμε το πλαίσιο είναι να ορίσουμε το **δυαδικό σύμβολο συνάρτησης (binary function symbol)** $Room(x, y)$ όπου x και y είναι συντεταγμένες και να γράφουμε κατάλληλους τύπους γι αυτό.

Δοκιμάστε το σαν άσκηση!

Παράδειγμα Ερμηνείας

Τώρα μπορούμε να δώσουμε μια ερμηνεία I για τα σύμβολα του λεξιλογίου η οποία παριστάνει το στιγμιότυπο του κόσμου του Wumpus που φαίνεται στην παραπάνω εικόνα:

- Το **πεδίο** της I είναι τα αντικείμενα που βλέπουμε στην εικόνα. Ιδανικά θα έπρεπε να τα ζωγραφίσουμε! Επειδή όμως αυτό είναι δύσκολο, τα παριστάνουμε με την αντίστοιχη Αγγλική λέξη γραμμένη με **μικρά γράμματα**:

  $|I| = \{agent,\ wumpus,\ gold,\ breeze,\ stench,\ rm11,\ \ldots, rm44\}.$

  Μια άλλη καλή ιδέα θα ήταν να τα γράφουμε στα Ελληνικά ώστε να μην τα μπερδεύουμε με τα σύμβολα της λογικής (σταθερές, συναρτήσεις και κατηγορήματα) που χρησιμοποιούμε και τα οποία είναι στα Αγγλικά.

Παράδειγμα Ερμηνείας

- Η I κάνει τις εξής αντιστοιχίσεις στα σύμβολα σταθερών:

$$Agent^I = agent,\ Wumpus^I = wumpus,\ Gold^I = gold,$$

$$Breeze^I = breeze,\ Stench^I = stench,$$

$$Rm11^I = rm11,\ \ldots, Rm44^I = rm44$$

Προσοχή: *agent* είναι ένα στοιχείο του πεδίου της ερμηνείας, δηλαδή ο πράκτορας της παραπάνω εικόνας, ενώ *Agent* είναι ένα σύμβολο σταθεράς που χρησιμοποιούμε για να αναφερθούμε στον πράκτορα. Όμοιως για τα υπόλοιπα σύμβολα.

Παράδειγμα Ερμηνείας

- Η I αντιστοιχίζει στο μοναδιαίο σύμβολο συνάρτησης $NorthOf$ τη συνάρτηση $NorthOf^I : |I| \rightarrow |I|$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$NorthOf^I(rm11) = rm21,$$

$$NorthOf^I(rm21) = rm22, \ldots, NorthOf^I(rm34) = rm44$$

- Η I αντιστοιχίζει στα σύμβολα μοναδιαίων συναρτήσεων $SouthOf, WestOf, EastOf$ τις συναρτήσεις $SouthOf^I, WestOf^I, EastOf^I$ οι οποίες ορίζονται αντίστοιχα με το $NorthOf^I$.

Παράδειγμα Ερμηνείας

- Η I αντιστοιχίζει στο μοναδιαίο σύμβολο κατηγορήματος $Bottomless$ την παρακάτω μοναδιαία σχέση:

$$\{\langle rm13\rangle, \langle rm33\rangle, \langle rm44\rangle\}$$

- Η I αντιστοιχίζει στο δυαδικό σύμβολο κατηγορήματος $Location$ την ακόλουθη δυαδική σχέση:

$$\{\langle agent, rm11\rangle, \langle wumpus, rm31\rangle, \langle gold, rm32\rangle\}$$

Παράδειγμα Ερμηνείας

- Η I αντιστοιχίζει στο δυαδικό σύμβολο κατηγορήματος $Percept$ την ακόλουθη δυαδική σχέση:

$$\{\langle rm12, breeze\rangle, \langle rm14, breeze\rangle, \langle rm21, stench\rangle, \langle rm23, breeze\rangle, \langle rm32, breeze\rangle, \langle rm32, stench\rangle, \langle rm34, breeze\rangle, \langle rm41, stench\rangle, \langle rm43, breeze\rangle\}$$

Η Έννοια της Ανάθεσης Μεταβλητών

Επειδή οι τύποι της λογικής πρώτης τάξης μπορούν να περιέχουν ελεύθερες μεταβλητές, θα χρειαστούμε την έννοια της ανάθεσης μεταβλητών για να μιλήσουμε για την ικανοποίηση ενός τύπου από μια ερμηνεία.

Ορισμός. Μια **ανάθεση μεταβλητών (variable assignment)** είναι μια συνάρτηση $s : Vars \rightarrow |I|$ όπου $Vars$ είναι ένα σύνολο μεταβλητών και I μια ερμηνεία.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση s που είναι τέτοια ώστε

$$s(x) = rm11 \quad \text{και} \quad s(y) = rm21$$

είναι μια ανάθεση μεταβλητών.

Η Έννοια της Ανάθεσης Μεταβλητών: Διαίσθηση

Όταν χρησιμοποιούμε μια ανάθεση μεταβλητών, αυτή μας δίνει τα αντικείμενα του κόσμου τα οποία παριστάνουν οι διάφορες ελεύθερες μεταβλητές ενός τύπου.

Αν ένας τύπος δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές, τότε η έννοια της ανάθεσης μεταβλητών δεν είναι απαραίτητη για να μιλήσουμε για την ικανοποίηση του τύπου αυτού όπως θα δούμε παρακάτω.

Ανάθεση Μεταβλητών: Μια Επέκταση

Θα χρειαστεί να **επεκτείνουμε την έννοια της ανάθεσης μεταβλητών ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους όρους του λεξιλογίου.**

Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$\overline{s} : \ Terms \rightarrow |I|$$

από το σύνολο όλων των όρων $Terms$ στο πεδίο της ερμηνείας $|I|$.

Η συνάρτηση $\overline{s}$ είναι **επέκταση** της s, και αντιστοιχίζει κάθε όρο σε ένα στοιχείο του πεδίου (διαισθητικά: αντιστοιχίζει κάθε όρο στο αντικείμενο του κόσμου που παριστάνει ο όρος αυτός).

Notation vs. Denotation

Στην Αγγλική βιβλιογραφία θα συναντήσετε συχνά την ορολογία **notation** και **denotation**.

Οταν γράφουμε ένα όρο, π.χ. $FatherOf(WifeOf(John))$, αυτός είναι ο συμβολισμός μας (notation) για να αναφερθούμε στον πεθερό του John.

Το αντικείμενο του κόσμου που παριστάνει ο όρος $FatherOf(WifeOf(John))$ λέγεται denotation του όρου αυτού. Δηλαδή, η συνάρτηση $\overline{s}$ μας δίνει denotations (ομοίως, οι αντιστοιχίσεις που καθορίζουν μια ερμηνεία).

Ανάθεση Μεταβλητών: Μια Επέκταση

Τυπικά, η $\overline{s} : Terms \rightarrow |I|$ ορίζεται ως εξής:

- Για κάθε μεταβλητή x, $\overline{s}(x) = s(x)$.
- Για κάθε σύμβολο σταθεράς c, $\overline{s}(c) = c^I$.
- Αν $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι και F είναι ένα n-αδικό σύμβολο συνάρτησης, τότε

$$\overline{s}(F(t_1, \ldots, t_n)) = F^I(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)).$$

Παράδειγμα

Έστω η ανάθεση μεταβλητών s που είναι τέτοια ώστε

$$s(x) = rm11 \quad \text{και} \quad s(y) = rm21.$$

Τότε, για την ερμηνεία I που περιγράφει τον κόσμο του Wumpus, από τον ορισμό της $\overline{s}$ έχουμε:

$$\overline{s}(x) = s(x) = rm11, \;\; \overline{s}(y) = s(y) = rm21,$$

$$\overline{s}(Rm11) = Rm11^I = rm11, \;\; \overline{s}(Agent) = Agent^I = agent,$$

$$\overline{s}(NorthOf(x)) = NorthOf^I(\overline{s}(x)) = NorthOf^I(s(x)) =$$

$$NorthOf^I(rm11) = rm21$$

Η Έννοια της Ικανοποίησης (Satisfaction)

Έστω ϕ ένας καλά ορισμένος τύπος της λογικής πρώτης τάξης, I μια ερμηνεία και $s : Vars \to |I|$ μια ανάθεση μεταβλητών.

Θα ορίσουμε αναδρομικά τι σημαίνει η I να **ικανοποιεί τον τύπο** ϕ **με ανάθεση μεταβλητών** s. Αυτό συμβολίζεται ως εξής:

$$\models_I \phi[s] \;\; \text{ή} \;\; I \models \phi[s]$$

Παρατήρηση: Σε σύγκριση με την προτασιακή λογική, εδώ έχουμε επιπλέον την έννοια της ανάθεσης μεταβλητών.

Διαισθητικά: Η έκφραση $\models_I \phi[s]$ σημαίνει ότι η κατάσταση που περιγράφεται από την ϕ ισχύει στον κόσμο που περιγράφει η ερμηνεία I με την υπόθεση ότι οποιαδήποτε ελεύθερη μεταβλητή x της ϕ αντιπροσωπεύει το στοιχείο $s(x)$ του $|I|$.

Η Έννοια της Ικανοποίησης

Ο αναδρομικός ορισμός της έννοιας της ικανοποίησης αρχίζει με την περίπτωση των ατομικών τύπων.

Ατομικοί τύποι. Ο ορισμός της ικανοποίησης για τους ατομικούς τύπους έχει ως εξής:

- Για **ατομικούς τύπους που περιέχουν το σύμβολο της ισότητας** δηλ. για τύπους της μορφής $t_1 = t_2$ όπου t_1, t_2 είναι όροι:

$$\models_I t_1 = t_2 \; [s] \;\; \text{ανν} \;\; \overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$$

Διαισθητικά: $\models_I t_1 = t_2 \; [s]$ ανν οι εκφράσεις $\overline{s}(t_1)$ και $\overline{s}(t_2)$ αποτιμούνται στο ίδιο στοιχείο του πεδίου της I.

Η Έννοια της Ικανοποίησης

- Για **ατομικούς τύπους που περιέχουν άλλα σύμβολα κατηγορημάτων** δηλ. για τύπους της μορφής $P(t_1, \ldots, t_n)$ όπου P είναι ένα n-αδικό σύμβολο κατηγορήματος και $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι:

$$\models_I P(t_1, \ldots, t_n)[s] \ \text{ ανν } \ \langle \overline{s}(t_1),\ \ldots,\ \overline{s}(t_n) \rangle \in P^I.$$

Διαισθητικά: $\models_I P(t_1, \ldots, t_n)[s]$ ανν τα αντικείμενα του πεδίου της I στα οποία αποτιμούνται οι εκφράσεις $\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)$ βρίσκονται στη σχέση που παριστάνει η έκφραση P^I.

Η Έννοια της Ικανοποίησης

Λοιπές κατηγορίες καλά ορισμένων τύπων (wffs):

- $\models_I \neg\phi[s]$ ανν $\not\models_I \phi[s]$ (δηλαδή ανν δεν ισχύει η σχέση $\models_I \phi[s]$).
- $\models_I (\phi \wedge \psi)[s]$ ανν $\models_I \phi[s]$ και $\models_I \psi[s]$.
- $\models_I (\phi \vee \psi)[s]$ ανν $\models_I \phi[s]$ ή $\models_I \psi[s]$.
- $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$ ανν $\not\models_I \phi[s]$ ή $\models_I \psi[s]$.
- $\models_I (\phi \Leftrightarrow \psi)[s]$ ανν $\models_I \phi[s]$ και $\models_I \psi[s]$, ή $\not\models_I \phi[s]$ και $\not\models_I \psi[s]$.

Παρατήρηση: Οι ορισμοί εδώ είναι αντίστοιχοι με αυτούς της προτασιακής λογικής.

Η Έννοια της Ικανοποίησης

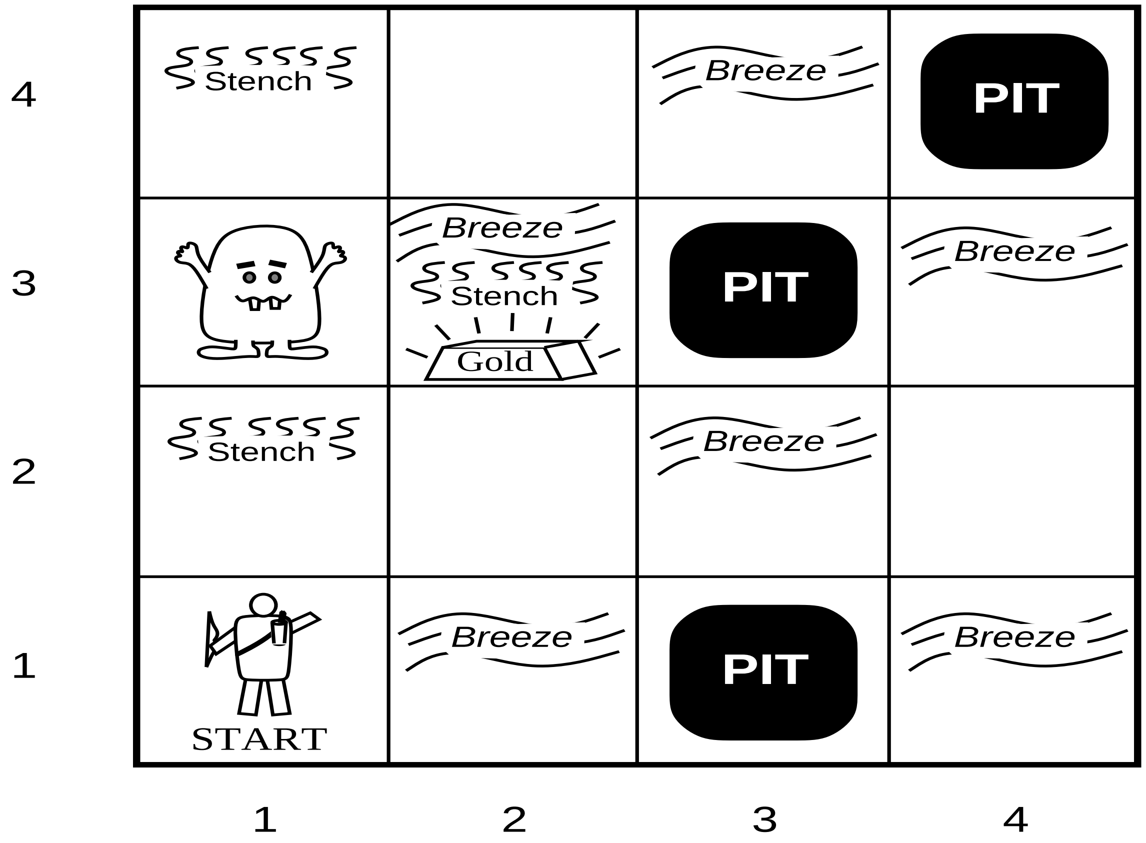
- $\models_I (\forall x)\phi\ [s]$ ανν για κάθε $d \in |I|$, έχουμε $\models_I \phi[s(x|d)]$.

  Η **συνάρτηση** $s(x|d)$ είναι μια **ανάθεση μεταβλητών** που είναι ίδια με την s με την διαφορά ότι αναθέτει στη μεταβλητή x το στοιχείο d του πεδίου. Τυπικά, η συνάρτηση $s(x|d)$ ορίζεται ως εξής:

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{αν } y \neq x \\ d & \text{αν } y = x \end{cases}$$

- $\models_I (\exists x)\phi\ [s]$ ανν υπάρχει $d \in |I|$ τέτοιο ώστε $\models_I \phi[s(x|d)]$.

Παράδειγμα: Ο Κόσμος του Wumpus



Παραδείγματα Ικανοποίησης

- $\models_I x = y\ [s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s που αντιστοιχίζει τα x και y στο ίδιο στοιχείο του πεδίου (π.χ., $s(x) = s(y) = wumpus$). Γιατί;

  Επειδή αν $s(x) = s(y) = wumpus$ τότε $\overline{s}(x) = s(x) = wumpus$ και $\overline{s}(y) = s(y) = wumpus$.

- $\models_I Agent = Agent\ [s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s.

  Αυτό είναι προφανές.

Παράδειγμα

- $\models_I Rm21 = NorthOf(Rm11)\ [s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s. Γιατί;

  Επειδή $\overline{s}(Rm21) = Rm21^I = rm21$ και

  $$\overline{s}(NorthOf(Rm11)) = NorthOf^I(\overline{s}(Rm11)) =$$

  $$= NorthOf^I(Rm11^I) = NorthOf^I(rm11) = rm21.$$

- $\models_I Rm21 = NorthOf(x)\ [s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s τέτοια ώστε $s(x) = rm11$. Γιατί;

  Επειδή $\overline{s}(Rm21) = Rm21^I = rm21$ και

  $$\overline{s}(NorthOf(x)) = NorthOf^I(\overline{s}(x)) =$$

  $$NorthOf^I(s(x)) = NorthOf^I(rm11) = rm21.$$

Παράδειγμα

- $\models_I Bottomless(x)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s τέτοια ώστε $s(x) = rm13$ ή $s(x) = rm33$ ή $s(x) = rm44$. Γιατί;

  Επειδή αν $s(x) = rm13$ τότε

  $$\langle \overline{s}(x) \rangle = \langle s(x) \rangle = \langle rm13 \rangle \in Bottomless^I.$$

  Αντίστοιχα και για τις άλλες περιπτώσεις.

- $\models_I Location(Agent, Rm11)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s. Γιατί;

  Επειδή

  $$\langle \overline{s}(Agent), \overline{s}(Rm11) \rangle = \langle Agent^I, Rm11^I \rangle = \langle agent, rm11 \rangle \in Location^I.$$

Παράδειγμα

- $\models_I \neg Location(Gold, Rm44)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s. Γιατί;

  Επειδή

  $$\langle \overline{s}(Gold), \overline{s}(Rm44)\rangle = \langle Gold^I, Rm44^I\rangle = \langle gold, rm44\rangle \notin Location^I$$

  οπότε $\not\models_I Location(Gold, Rm44)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s.

- $\models_I Location(Gold, Rm32) \vee Location(Gold, Rm44)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s. Γιατί;

  Επειδή

  $$\langle \overline{s}(Gold), \overline{s}(Rm32)\rangle = \langle Gold^I, Rm32^I\rangle = \langle gold, rm32\rangle \in Location^I$$

  οπότε $\models_I Location(Gold, Rm32)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s.

Παράδειγμα

- $\models_I (\exists x)Location(x, Rm11)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s. Γιατί;

  Επειδή

  $$\langle \overline{s}(Agent), \overline{s}(Rm11)\rangle = \langle Agent^I, Rm11^I\rangle = \langle agent, rm11\rangle \in Location^I$$

  οπότε $\models_I Location(x, Rm11)[s(x|agent)]$.

- $\not\models_I (\forall x)Location(Wumpus, x)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s. Γιατί;

  Επειδή

  $$\langle \overline{s}(Wumpus), \overline{s}(Rm11)\rangle = \langle Wumpus^I, Rm11^I\rangle =$$

  $$\langle wumpus, rm11\rangle \notin Location^I$$

  οπότε $\not\models_I Location(Wumpus, x)[s(x|rm11)]$.

Ο Ρόλος της Ανάθεσης Μεταβλητών

Όταν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μια ερμηνεία ικανοποιεί ένα τύπο ϕ με ανάθεση μεταβλητών s, δεν χρειαζόμαστε όλη την (πιθανά άπειρη σε μέγεθος) πληροφορία που μας δίνει η s.

Αυτό που μας ενδιαφέρει ειναι οι τιμές της συνάρτησης s για τις (πεπερασμένου πλήθους) μεταβλητές που είναι ελεύθερες στην s. Μάλιστα αν η ϕ είναι πρόταση, τότε η s δεν έχει καμιά σημασία. Αυτό διατυπώνεται τυπικά από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα. Έστω αναθέσεις μεταβλητών $s_1, s_2 : Vars \to |I|$ που συμφωνούν σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου ϕ (αν υπάρχουν τέτοιες μεταβλητές). Τότε

$$\models_I \phi[s_1] \text{ ανν } \models_I \phi[s_2].$$

Ανάθεση Μεταβλητών και Προτάσεις

Το παραπάνω θεώρημα έχει το εξής πόρισμα.

Πόρισμα. Έστω η πρόταση ϕ και η ερμηνεία I. Τότε είτε:
(α) η I ικανοποιεί την ϕ με κάθε ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$, ή
(β) η I δεν ικανοποιεί την ϕ με οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών.

Το παραπάνω πόρισμα μας επιτρέπει να αγνοούμε τις αναθέσεις μεταβλητών όταν μιλάμε για ικανοποίηση **προτάσεων.** Έτσι αν η ϕ είναι μια πρόταση και I μια ερμηνεία, μπορούμε απλά να λέμε ότι η I **ικανοποιεί (ή δεν ικανοποιεί)** την ϕ και γράφουμε απλώς $\models_I \phi$ (ή $\not\models_I \phi$).

Η Έννοια της Ικανοποιησιμότητας

Ορισμός. Ένας τύπος ϕ λέγεται **ικανοποιήσιμος (satisfiable)** ανν υπάρχει μια ερμηνεία I και μια ανάθεση μεταβλητών s τέτοιες ώστε $\models_I \phi[s]$. Διαφορετικά, ο τύπος λέγεται **μη ικανοποιήσιμος (unsatisfiable)**.

Παραδείγματα: Οι τύποι

$$Location(Wumpus, Rm31),\ Location(Agent, Rm11),\ (\exists x)R(y,x)$$

είναι ικανοποιήσιμοι.

Οι τύποι

$$P(x) \wedge \neg P(x),\ (\forall x)P(x) \wedge \neg P(A)$$

είναι μη ικανοποιήσιμοι.

Μπορείτε να δώσετε ένα αλγόριθμο που να αποφασίζει αν ένας δοσμένος τύπος ϕ είναι ικανοποιήσιμος;

Αληθείς Προτάσεις – Μοντέλα

Ορισμός. Έστω μια πρόταση ϕ και μια ερμηνεία I. Αν η I ικανοποιεί την ϕ τότε θα λέμε ότι η ϕ είναι **αληθής** στην I ή ότι η I είναι **μοντέλο** της ϕ.

Παράδειγμα: Η ερμηνεία I που ορίστηκε στο παράδειγμα του κόσμου του Wumpus είναι μοντέλο των παρακάτω προτάσεων:

$$Location(Wumpus, Rm31),\ \ Location(Agent, Rm11),$$

$$(\exists x)Percept(Breeze, x)$$

Ορισμός. Μια ερμηνεία I είναι ένα **μοντέλο** ενός συνόλου προτάσεων KB ανν είναι μοντέλο κάθε πρότασης που περιέχεται στο σύνολο KB.

Η Έννοια της Λογικής Κάλυψης (Entailment)

Ορισμός. Έστω ψ και ϕ τύποι. Θα λέμε ότι ο ψ **καλύπτει λογικά** τον ϕ ή οτι ο ϕ **έπεται λογικά** από τον ψ (συμβολισμός: $\psi \models \phi$), ανν για κάθε ερμηνεία I και ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$ τέτοια ώστε $\models_I \psi[s]$, έχουμε επίσης ότι $\models_I \phi[s]$.

Παραδείγματα

$$Happy(John) \wedge (\forall x)(Happy(x) \Rightarrow Laughs(x)) \models Laughs(John)$$

$$WellPaid(John) \wedge (\neg WellPaid(John) \vee Happy(John)) \models Happy(John)$$

Η Έννοια της Λογικής Κάλυψης

Με όμοιο τρόπο ορίζουμε την έννοια της λογικής κάλυψης αν αντί για την ψ έχουμε ένα σύνολο τύπων της λογικής πρώτης τάξης (που αποτελούν, ας πούμε, τη βάση γνώσης μας).

Ορισμός. Έστω KB ένα σύνολο τύπων, και ϕ ένας τύπος. Τότε η KB **καλύπτει λογικά** τον ϕ ή ο ϕ **έπεται λογικά** από την KB (συμβολισμός: $KB \models \phi$), ανν για κάθε ερμηνεία I και ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$ τέτοια ώστε η I να ικανοποιεί κάθε μέλος της KB με ανάθεση μεταβλητών s, η I ικανοποιεί επίσης τον ϕ με ανάθεση μεταβλητών s.

Παραδείγματα

$$\{\ Happy(John),\ (\forall x)(Happy(x) \Rightarrow Laughs(x))\ \} \models Laughs(John)$$

$$\{\ WellPaid(John),\ \neg WellPaid(John) \vee Happy(John)\ \} \models Happy(John)$$

Μπορείτε να δώσετε έναν αλγόριθμο που να αποφασίζει αν ένα σύνολο τύπων καλύπτει λογικά ένα άλλο τύπο;

Η Έννοια της Εγκυρότητας

Ορισμός. Ένας τύπος ϕ είναι **έγκυρος (valid)** ανν για κάθε ερμηνεία I και κάθε ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$, η I ικανοποιεί τον ϕ με ανάθεση μεταβλητών s.

Παραδείγματα: Οι προτάσεις

$$P(A) \vee \neg P(A),\ P(A) \Rightarrow P(A),\ (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$$

είναι έγκυρες.

Μπορείτε να δώσετε έναν αλγόριθμο που να αποφασίζει αν ένας τύπος είναι έγκυρος;

Η Έννοια της Ισοδυναμίας

Ορισμός. Δύο τύποι ϕ και ψ λέγονται **λογικά ισοδύναμοι (logically equivalent)** (συμβολισμός: $\phi \equiv \psi$) ανν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$.

Μερικά Βασικά Θεωρήματα

Θα δώσουμε τώρα μερικά βασικά θεωρήματα που συσχετίζουν τις έννοιες της ικανοποιησιμότητας, της λογικής κάλυψης, της εγκυρότητας και της ισοδυναμίας.

Στα παρακάτω θεωρήματα, υποθέτουμε ότι οι ϕ και ψ είναι τυχαίοι τύποι της λογικής πρώτης τάξης.

Θεώρημα. $\phi \models \psi$ ανν ο τύπος $\phi \Rightarrow \psi$ είναι έγκυρος.

Απόδειξη

'Μόνο αν'

Έστω μια τυχαία ερμηνεία I και μια τυχαία ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$. Θα αποδείξουμε ότι $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$.

Θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν $\models_I \phi[s]$ ή όχι.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $\models_I \phi[s]$. Αφού $\phi \models \psi$, έχουμε και $\models_I \psi[s]$. Έτσι, από τον ορισμό της ικανοποίησης για τη συνεπαγωγή, έχουμε $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\not\models_I \phi[s]$. Από τον ορισμό της ικανοποίησης για τη συνεπαγωγή, μπορούμε απευθείας να συμπεράνουμε $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$.

Απόδειξη

'Αν'

Έστω μια τυχαία ερμηνεία I και μια τυχαία ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι $\models_I \phi[s]$. Θα αποδείξουμε ότι $\models_I \psi[s]$.

Αφού η $\phi \Rightarrow \psi$ είναι έγκυρη, έχουμε $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$. Επίσης αφού ξέρουμε ότι $\models_I \phi[s]$, θα πρέπει να ισχύει $\models_I \psi[s]$.

Οπότε, από τον ορισμό της λογικής κάλυψης, έχουμε $\phi \models \psi$.

Μερικά Βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα. Ο τύπος ϕ είναι μη ικανοποιήσιμος ανν ο τύπος $\neg\phi$ είναι έγκυρος. Απόδειξη;

Θεώρημα. $\phi \models \psi$ ανν ο τύπος $\phi \wedge \neg\psi$ είναι μη ικανοποιήσιμος. Απόδειξη;

Θεώρημα. $\phi \equiv \psi$ ανν ο τύπος $\phi \Leftrightarrow \psi$ είναι έγκυρος. Απόδειξη;

Μερικές Σημαντικές Λογικές Ισοδυναμίες

Έστω τύποι ϕ και ψ. Τότε:

1. $\neg(\phi \land \psi) \equiv \neg\phi \lor \neg\psi$
2. $\neg(\phi \lor \psi) \equiv \neg\phi \land \neg\psi$
3. $\phi \land \psi \equiv \neg(\neg\phi \lor \neg\psi)$
4. $\phi \lor \psi \equiv \neg(\neg\phi \land \neg\psi)$
5. $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \lor \psi$
6. $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \phi)$

Αποδείξεις;

Απόδειξη της $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$

Αρχικά ας αποδείξουμε ότι

$$\phi \Rightarrow \psi \models \neg\phi \vee \psi.$$

Έστω μια τυχαία ερμηνεία I και μια τυχαία ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$.

Ας υποθέσουμε ότι $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$. Θα αποδείξουμε ότι $\models_I (\neg\phi \vee \psi)[s]$.

Από τον ορισμό της ικανοποίησης για τη συνεπαγωγή, έχουμε $\not\models_I \phi[s]$ ή $\models_I \psi[s]$.

Αν $\not\models_I \phi[s]$, τότε από τον ορισμό της ικανοποίησης για την άρνηση, έχουμε $\models_I \neg\phi[s]$. Οπότε, από τον ορισμό της ικανοποίησης για τη διάζευξη, έχουμε $\models_I (\neg\phi \vee \psi)[s]$.

Αν $\models_I \psi[s]$, τότε από τον ορισμό της ικανοποίησης για τη διάζευξη, επίσης έχουμε $\models_I (\neg\phi \vee \psi)[s]$.

Απόδειξη

Ας αποδείξουμε τώρα ότι:

$$\neg\phi \vee \psi \models \phi \Rightarrow \psi.$$

Έστω μια τυχαία ερμηνεία I και μια τυχαία ανάθεση μεταβλητών $s : Vars \rightarrow |I|$.

Ας υποθέσουμε ότι $\models_I (\neg\phi \vee \psi)[s]$. Θα αποδείξουμε ότι $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$.

Από τον ορισμό της ικανοποίησης για τη διάζευξη, έχουμε $\models_I \neg\phi[s]$ ή $\models_I \psi[s]$. Θα θεωρήσουμε τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις.

Αν $\models_I \neg\phi[s]$, τότε από τον ορισμό της ικανοποίησης για την άρνηση, έχουμε $\not\models_I \phi[s]$. Οπότε, από τον ορισμό της ικανοποίησης για την συνεπαγωγή, έχουμε $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$.

Αν $\models_I \psi[s]$ τότε μπορούμε να συμπεράνουμε $\models_I (\phi \Rightarrow \psi)[s]$ απευθείας από τον ορισμό της ικανοποίησης για την συνεπαγωγή.

Μερικές Σημαντικές Λογικές Ισοδυναμίες

1. $(\forall x)\phi \equiv \neg(\exists x)\neg\phi$
2. $(\exists x)\phi \equiv \neg(\forall x)\neg\phi$
3. $(\forall x)\neg\phi \equiv \neg(\exists x)\phi$
4. $(\exists x)\neg\phi \equiv \neg(\forall x)\phi$

Αποδείξεις;

Μερικές Σημαντικές Λογικές Ισοδυναμίες

1. $(\exists x)(\phi \vee \psi) \equiv (\exists x)\phi \vee (\exists x)\psi$
2. $(\exists x)(\phi \wedge \psi) \models (\exists x)\phi \wedge (\exists x)\psi$
3. $(\forall x)\phi \vee (\forall x)\psi \models (\forall x)(\phi \vee \psi)$
4. $(\forall x)(\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi$

Αποδείξεις;

Μια από τις Αποδείξεις

Αποδείξτε ότι

$$(\exists x)(\phi(x) \land \psi(x)) \models (\exists x)\phi(x) \land (\exists x)\psi(x).$$

Απόδειξη: Έστω μια τυχαία ερμηνεία I και μια τυχαία ανάθεση μεταβλητών s, τέτοιες ώστε

$$\models_I (\exists x)(\phi(x) \land \psi(x))[s].$$

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με υπαρξιακό ποσοδείκτη, υπάρχει ένα $d \in |I|$ τέτοιο ώστε

$$\models_I (\phi(x) \land \psi(x))[s(x|d)].$$

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με σύζευξη, έχουμε

Μια από τις Αποδείξεις

$$\models_I \phi(x)[s(x|d)]$$

και

$$\models_I \psi(x)[s(x|d)].$$

Τώρα, από τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με υπαρξιακό ποσοδείκτη και πάλι, έχουμε

$$\models_I (\exists x)\phi(x)[s]$$

και

$$\models_I (\exists x)\psi(x)[s].$$

Τώρα, από τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με σύζευξη, έχουμε:

$$\models_I (\exists x)\phi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)[s].$$

Μερικές Σημαντικές Λογικές Ισοδυναμίες

Αν η μεταβλητή x **δεν** είναι ελεύθερη στον τύπο ϕ, τότε:

1. $(\forall x)\phi \equiv \phi$
2. $(\exists x)\phi \equiv \phi$
3. $(\exists x)(\phi \wedge \psi(x)) \equiv \phi \wedge (\exists x)\psi(x)$
4. $(\exists x)(\phi \vee \psi(x)) \equiv \phi \vee (\exists x)\psi(x)$
5. $(\forall x)(\phi \vee \psi(x)) \equiv \phi \vee (\forall x)\psi(x)$
6. $(\forall x)(\phi \wedge \psi(x)) \equiv \phi \wedge (\forall x)\psi(x)$

Αποδείξεις;

Προχωρημένη Αναπαράσταση Γνώσης

Αν θέλετε να δείτε πώς η λογική πρώτης τάξης μπορεί να εφαρμοστεί για αναπαρασταση γνώσης σε διάφορα πολύπλοκα και ενδιαφέροντα πεδία, δείτε το Κεφάλαιο 10 από το βιβλίο AIMA (δε θα το καλύψουμε στο μάθημα).

Ένα άλλο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι το πεδίο των **πόρων του Παγκόσμιου Ιστού** (HTML σελίδες, υπηρεσίες κλπ.). Αυτό το πεδίο είναι σήμερα αντικείμενο εντατικής μελέτης από τους ερευνητές του **Σημασιολογικού Ιστού (Semantic Web)** χρησιμοποιώντας μοντέρνες γλώσσες και τεχνικές αναπαράστασης γνώσης που βασίζονται σε διάφορες λογικές και στις τεχνολογίες του Ιστού (URIs, XML κλπ.). Τα θέματα αυτά καλύπτονται στο μεταπτυχιακό μάθημα μου Τεχνολογίες Γνώσεων (`http://cgi.di.uoa.gr/~pms509/`).

Μηχανική Γνώσης

Η υποπεριοχή της Τεχνητής Νοημοσύνης που ασχολείται με τεχνικές σχεδιασμού, υλοποίησης, συντήρησης κλπ. βάσεων γνώσεων λέγεται **μηχανική γνώσης (knowledge engineering)** και οι αντίστοιχοι μηχανικοί λέγονται **μηχανικοί γνώσης (knowledge engineers)**.

Αντιπαραβάλλετε με την περιοχή της μηχανικής λογισμικού και τους μηχανικούς λογισμικού.

Λογική: Ο Απειροστικός Λογισμός της Πληροφορικής

Η λογική πρώτης τάξης είναι μια πολύ σημαντική λογική που χρησιμοποιείται σε διάφορες υποπεριοχές της επιστήμης της πληροφορικής. Αλλά υπάρχουν και πολλές άλλες χρήσιμες λογικές:

- Λογικές υψηλότερης τάξης (higher-order logics): second-order logic, third-order logic etc.
- Τροπική λογική (modal logic) (με τελεστές όπως “possible” και “certain”).
- Χρονική λογική (temporal logic) (με τελεστές όπως “in the past”, κτλ.).
- Λογικές γνώσης και πεποίθησης (logics of knowledge and belief).
- Λογικές για τις βάσεις δεδομένων (logics for databases).
- Λογικές περιγραφών (description logics).
- ....

Μελέτη

Κεφάλαιο 8 από το AIMA: Λογική Πρώτης Τάξης

Άλλες τυπικές παρουσιάσεις της λογικής πρώτης τάξης μπορεί να βρει κανείς στα εξής βιβλία:

1. Οποιοδήποτε βιβλίο μαθηματικής λογικής. Το τυπικό υλικο γι΄ αυτές τις διαφάνειες είναι από το βιβλίο:

   H.B. Enderton, "A Mathematical Introduction to Logic", Academic Press, 1972.

   Δείτε την ιστοσελίδα του μαθήματος για άλλα βιβλία λογικής.

2. M.R. Genesereth and N.J. Nilsson, "Logical Foundations of Artificial Intelligence", Morgan Kaufmann, 1987.

3. R.J. Brachman and H.J. Levesque, "Knowledge Representation and Reasoning", Morgan Kaufmann, 2004.