



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 4: Μετατροπή Αναλογικών Σημάτων σε  
Ψηφιακά

Μαθιόπουλος Παναγιώτης  
Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

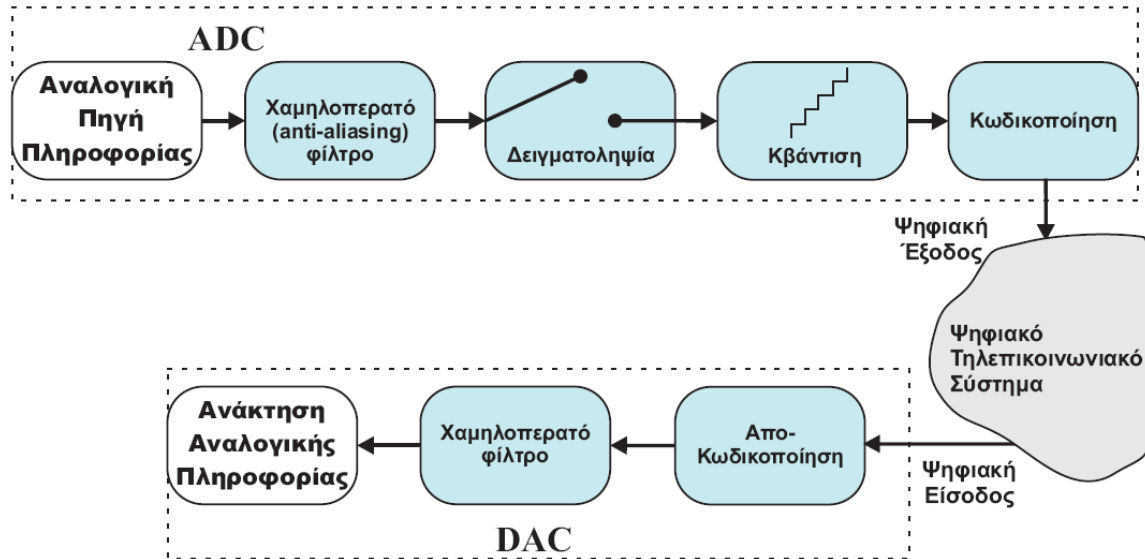
# Περιγραφή ενότητας

- Δειγματοληψία: Ιδανική Δειγματοληψία, Δειγματοληψία παλμού, Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής, Δειγματοληψία ζωνοπερατού σήματος
- Κβάντιση: Ομοιόμορφη κβάντιση, Θόρυβος κβάντισης, Μη-ομοιόμορφη κβάντιση
- Τεχνικές Μετατροπής Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό: Παλμοδωδική Διαμόρφωση (Pulse Code Modulation-PCM), Διαφορική Παλμοκωδική Διαμόρφωση (Differential Pulse Code Modulation-DPCM), Διαμόρφωση Δέλτα (Delta Modulation)
- Κωδικοποίηση: Κώδικες, Αντίστοιχα bits σε κυματομορφές



# Μετατροπή Αναλογικών Σημάτων σε Ψηφιακά

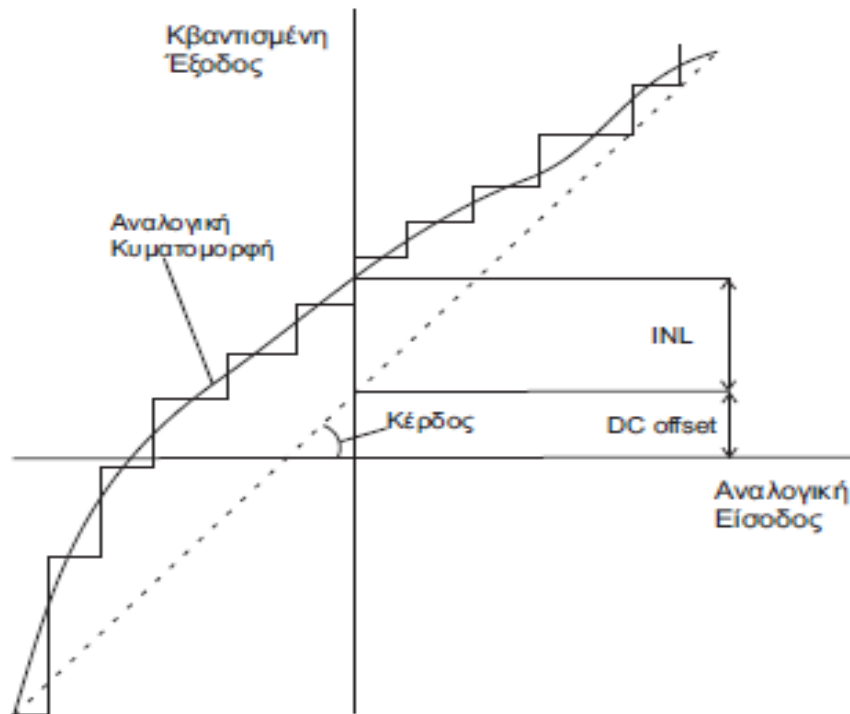
# Σύστημα ADC και DAC



- Το Χαμηλοπερατό φίλτρο, γνωστό και ως *anti-aliasing*, περιορίζει το φάσμα του αναλογικού σήματος, ώστε σε συνδυασμό με τη συχνότητα δειγματοληψίας να ικανοποιείται η συνθήκη του *Nyquist*, η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια.
- Ο Δειγματολήπτης (*Sampler*) μετατρέπει το αναλογικό σήμα συνεχούς χρόνου στο αντίστοιχο σήμα διακριτού χρόνου.
- Ο Κβαντιστής (*Quantizer*), έχοντας σαν είσοδο το διακριτό σήμα της εξόδου του δειγματολήπτη, προσεγγίζει τις διακριτές τιμές με συγκεκριμένα επίπεδα πλάτους.
- Ο Κωδικοποιητής (*Coder*) μετατρέπει την ακολουθία των επιπέδων πλάτους της εξόδου του κβαντιστή σε δυαδικές κωδικολέξεις (*codewords*).

# ADC (Analog-to-Digital Converter)

Στο Σχήμα 5.2 σχεδιάζεται η χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου ενός ADC και σημειώνονται κάποιες από τις παραπάνω παραμέτρους.



Σχήμα 5.2: Χαρακτηριστική του ADC

# Δειγματοληψία - Θεώρημα ή Συνθήκη Nyquist

**Θεώρημα 5.2.1.** Έστω σήμα βασικής ζώνης  $m(t)$  με φάσμα  $M(f)$  για το οποίο ισχύει

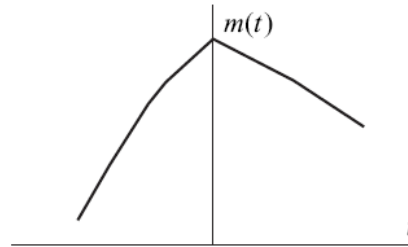
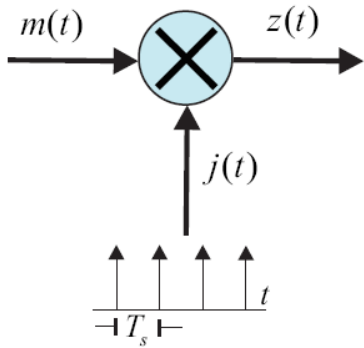
$$M(f) = 0, \quad |f| > W. \quad (5.3)$$

Αν  $m(kT_s)$  είναι τα δείγματα του  $m(t)$  τα οποία λαμβάνονται με συχνότητα  $f_s = \frac{1}{T_s}$  (δηλαδή σε ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα  $T_s$ ), τότε είναι δυνατή η ακριβής ανάκτηση του  $m(t)$  από τα δείγματα  $m(kT_s)$  αν ισχύει

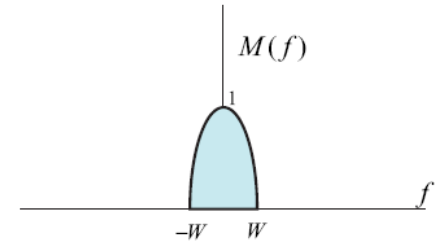
$$T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2W} \quad (5.4)$$



# Ιδανική Δειγματοληψία (Ideal Sampling)



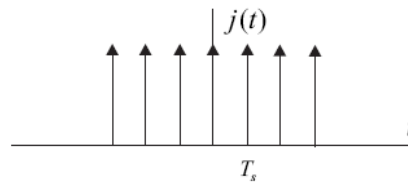
(α)



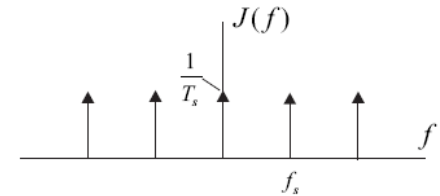
(β)

$$j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$\mathcal{F}[j(t)] = J(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

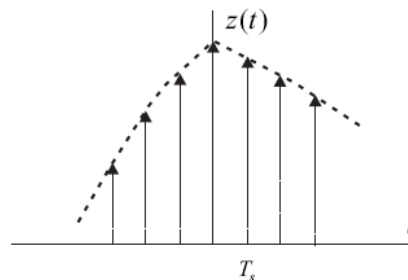


(γ)



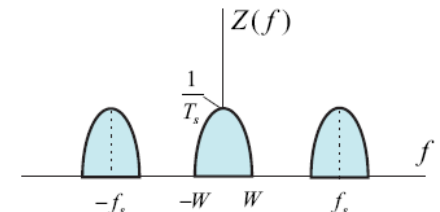
(δ)

$$z(t) = m(t) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

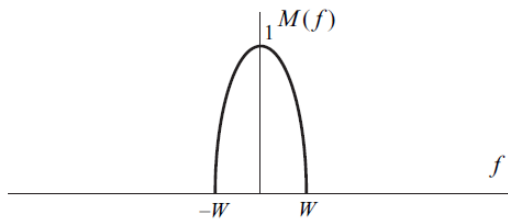


$$Z(f) = M(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

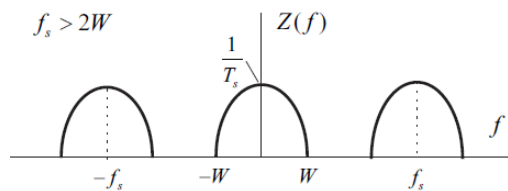
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - \frac{k}{T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s)$$



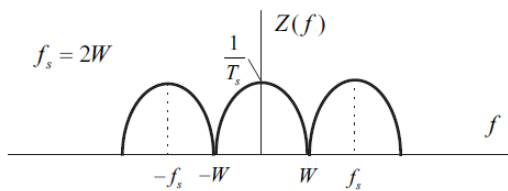
# Ρυθμός Δειγματοληψίας Περιπτώσεις



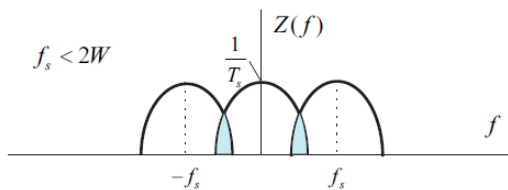
(α)



(β)



(γ)



Ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας  
Ρυθμός Nyquist

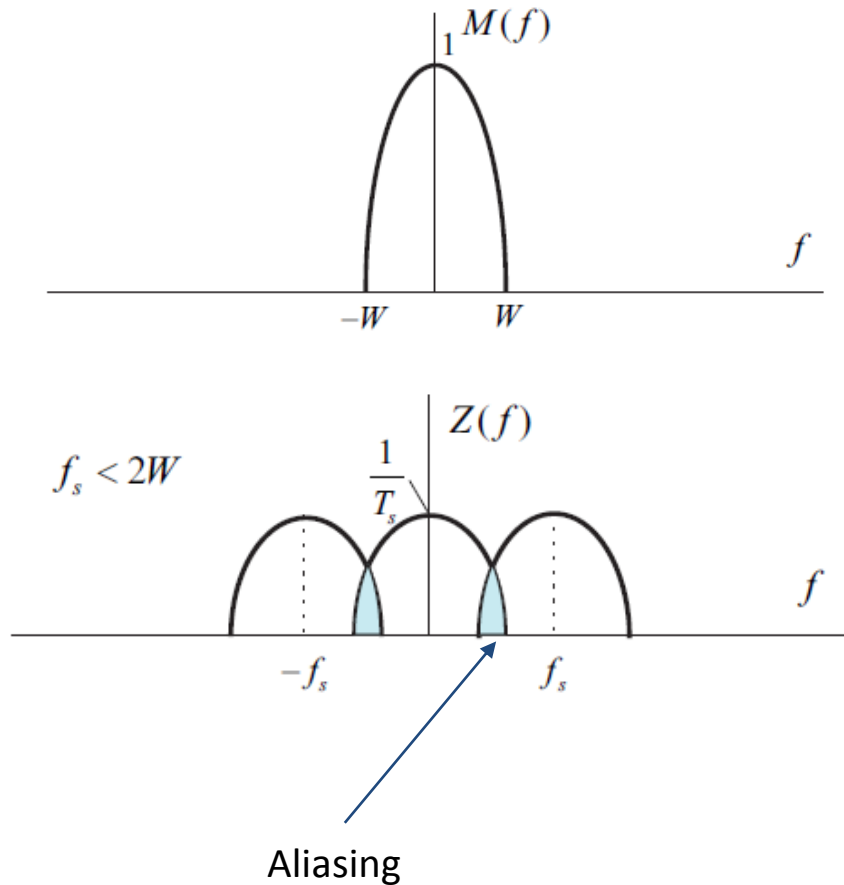
$$f_s = \frac{1}{T_s} = 2W,$$

Ανάκτηση στο δέκτη  
με χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H(f) = \begin{cases} T_s, & f \in [-W, W] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



# Ρυθμός Δειγματοληψίας

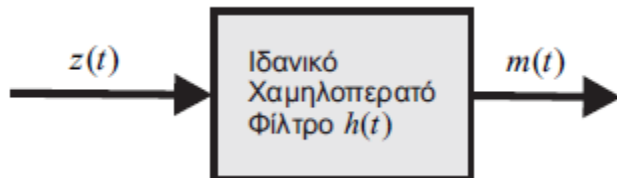


Το σήμα φιλτράρεται πριν την δειγματοληψία με ένα χαμηλοπερατό ή ζωνοπερατό φίλτρο (anti-aliasing), ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist.

# Παράδειγμα 5.1 (1)

## Παράδειγμα 5.1

Το αναλογικό σήμα πληροφορίας  $m(t)$  μπορεί να ανακτηθεί μέσω των δειγμάτων του, αν χρησιμοποιηθεί στον DAC ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο εύρους ζώνης  $W$  και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι  $f_s \geq 2W$ . Να περιγράψετε τη διαδικασία ανάκτησης στα πεδία της συχνότητας και του χρόνου.



$$W_l = \frac{f_s}{2}, \quad W \leq W_l \leq f_s - W.$$

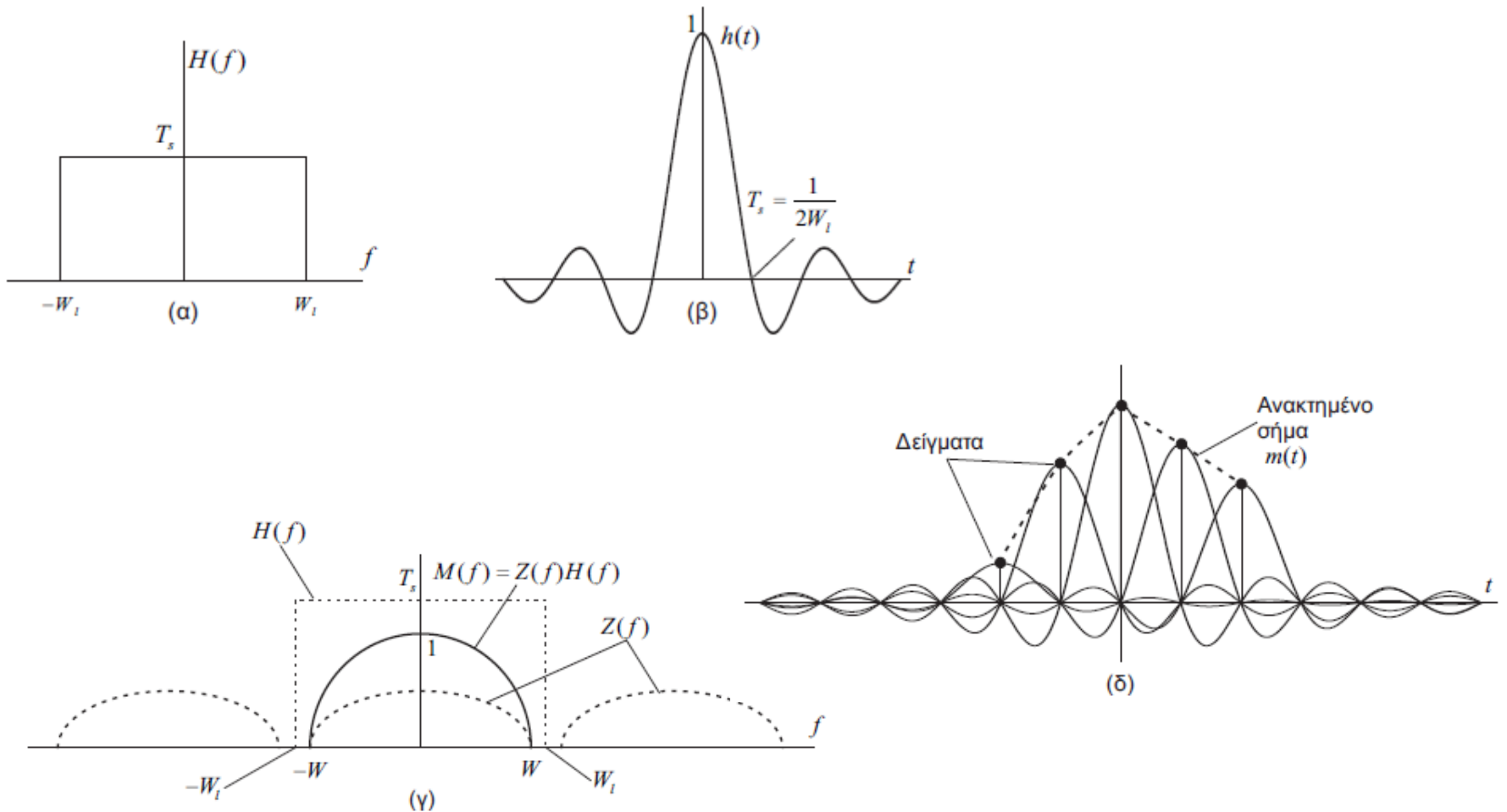
$$M(f) = Z(f)H(f),$$

$$m(t) = z(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m(kT_s) \text{sinc} [2W_l(t - kT_s)].$$

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m(kT_s) \text{sinc} (2Wt - k).$$



# Παράδειγμα 5.1 (2)



# Παράδειγμα 5.2

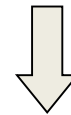
## Παράδειγμα 5.2

Να υπολογιστεί ο ρυθμός δειγματοληψίας Nyquist για το αναλογικό σήμα

$$m(t) = \text{sinc}100t (\text{sinc}500t)^2. \quad (5.16)$$

$$\text{sinc}100t \quad \longrightarrow \quad |f| \leq 50 \text{ Hz}$$

$$(\text{sinc}500t)^2 = \text{sinc}500t \text{ sinc}500t$$



$$|f| \leq 500 \text{ Hz}$$

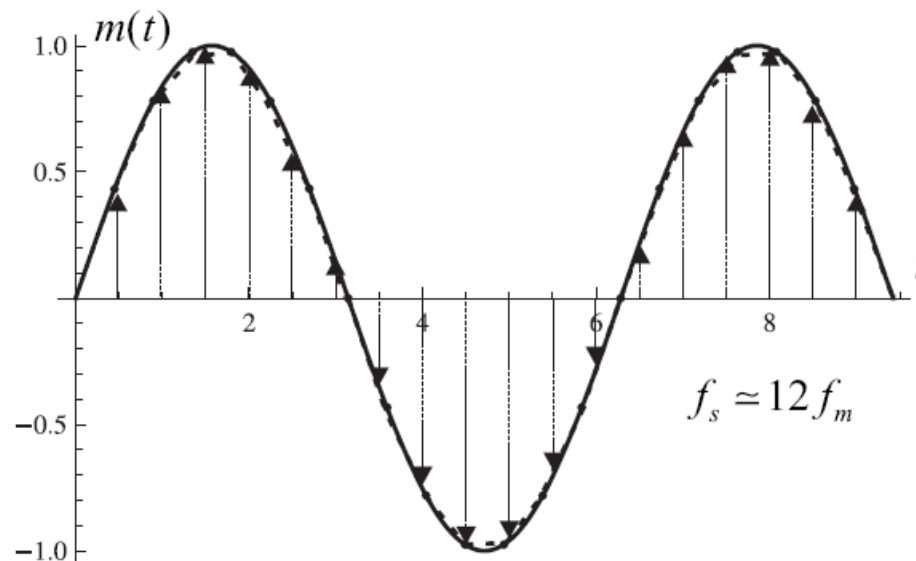
$$f_s = 2W = 1100 \text{ samples/sec.}$$



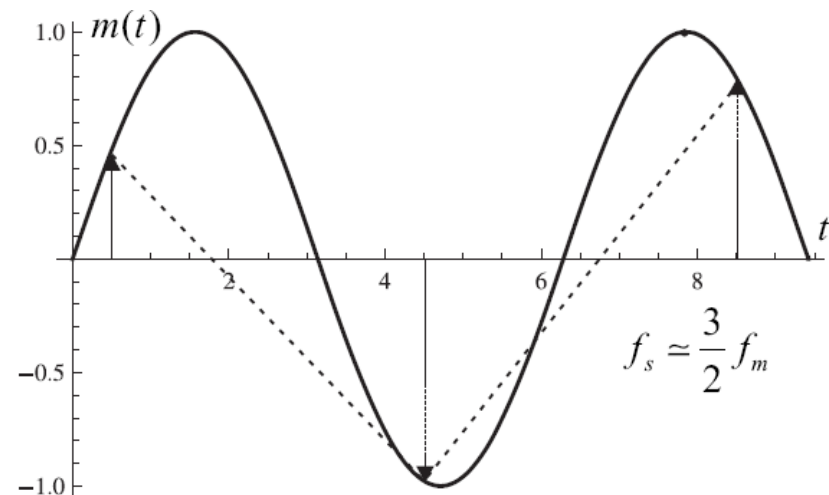
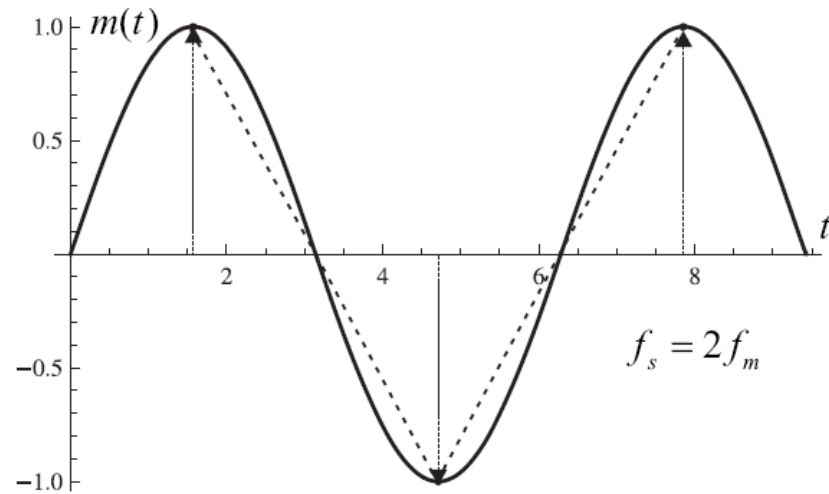
# Παράδειγμα 5.3 (1)

## Παράδειγμα 5.3

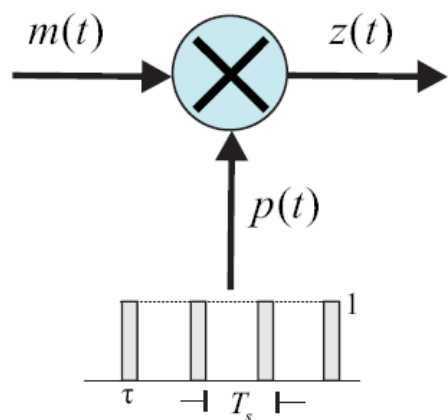
Έστω ημιτονοειδές σήμα  $m(t)$  με συχνότητα  $f_m$  και πλάτος της αρεσχείας σας. Αν το  $m(t)$  δειγματοληπτείται με συχνότητα  $f_s$ , να δείξετε γραφικά και να σχολιάσετε τις περιπτώσεις που ικανοποιείται ή όχι η συνθήκη Nyquist.



# Παράδειγμα 5.3 (2)



# Δειγματοληψία παλμού (Pulse Sampling) ή Πρακτική Δειγματοληψία

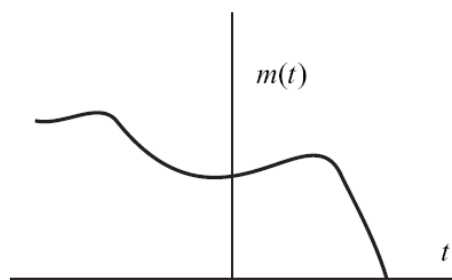


$$Z(f) = M(f) * P(f) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(kf_s\tau) M(f - kf_s)$$

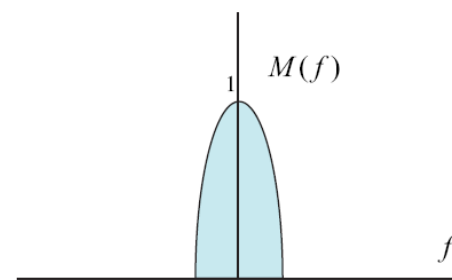
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_p(t - kT_s)$$

$$y_p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

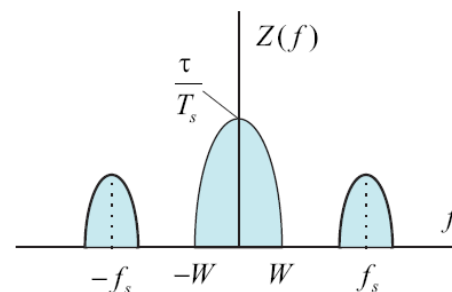
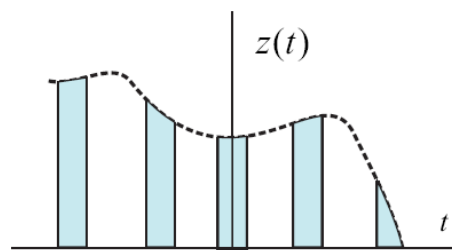
$$P(f) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(kf_s\tau) \delta(f - kf_s)$$



(α)

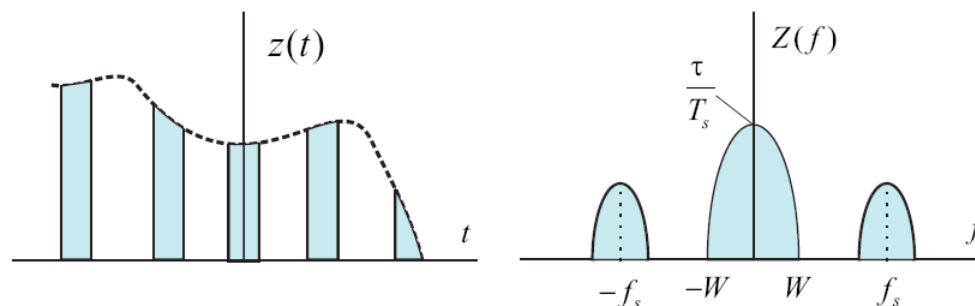


(β)



# Δειγματοληψία παλμού (Pulse Sampling)

## Συμπεράσματα



- Το φάσμα της εξόδου του δειγματολήπτη παλμού έχει παρόμοια μορφή με αυτό του ιδανικού δειγματολήπτη. Η διαφορά είναι ότι τα αντίγραφα του φάσματος του σήματος εισόδου πολλαπλασιάζονται με ένα παράγοντα  $\text{sinc}(kf_s\tau)$ , ο οποίος δεν είναι σταθερός (στην ιδανική δειγματοληψία είναι μονάδα) αλλά μειώνεται με αύξηση του  $k$ .

Όμως επειδή ο παράγοντας αυτός δε μεταβάλλεται με τη συχνότητα δεν προκαλείται παραμόρφωση στα αντίγραφα του  $M(f)$  που αποτελούν το  $Z(f)$

- Όταν ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist, δηλαδή  $f_s \geq 2W$ , είναι δυνατή η ανάκτηση του αναλογικού σήματος  $m(t)$  στον DAC μέσω ενός χαμηλοπερατού φίλτρου όπως και στην περίπτωση της ιδανικής δειγματοληψίας.





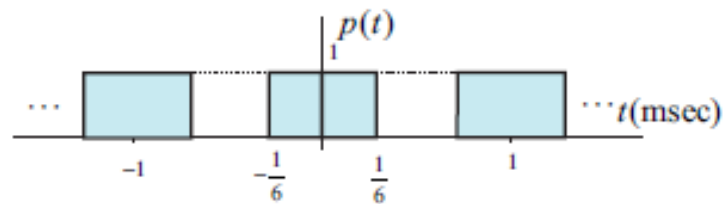
# Παράδειγμα 5.4 (1)

## Παράδειγμα 5.4

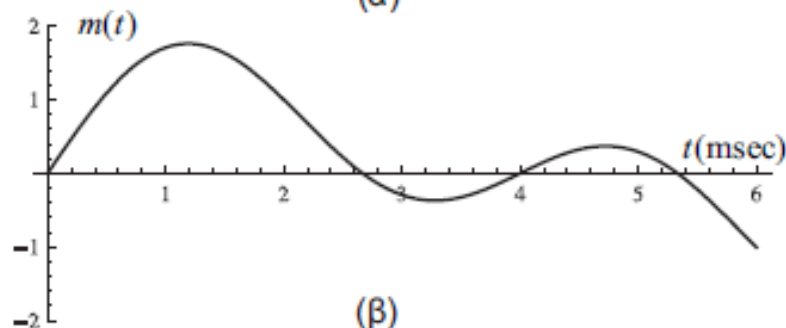
Αν το αναλογικό σήμα

$$m(t) = 2 \cos 800\pi t + \cos 1400\pi t \quad (5.24)$$

δειγματοληπτείται με την ακολουθία παλμών  $p(t)$  του Σχήματος 5.11α, να βρεθεί το φασματικό περιεχόμενο του σήματος εξόδου του δειγματολήπτη στην περιοχή 2.5 KHz έως 3.5 KHz.



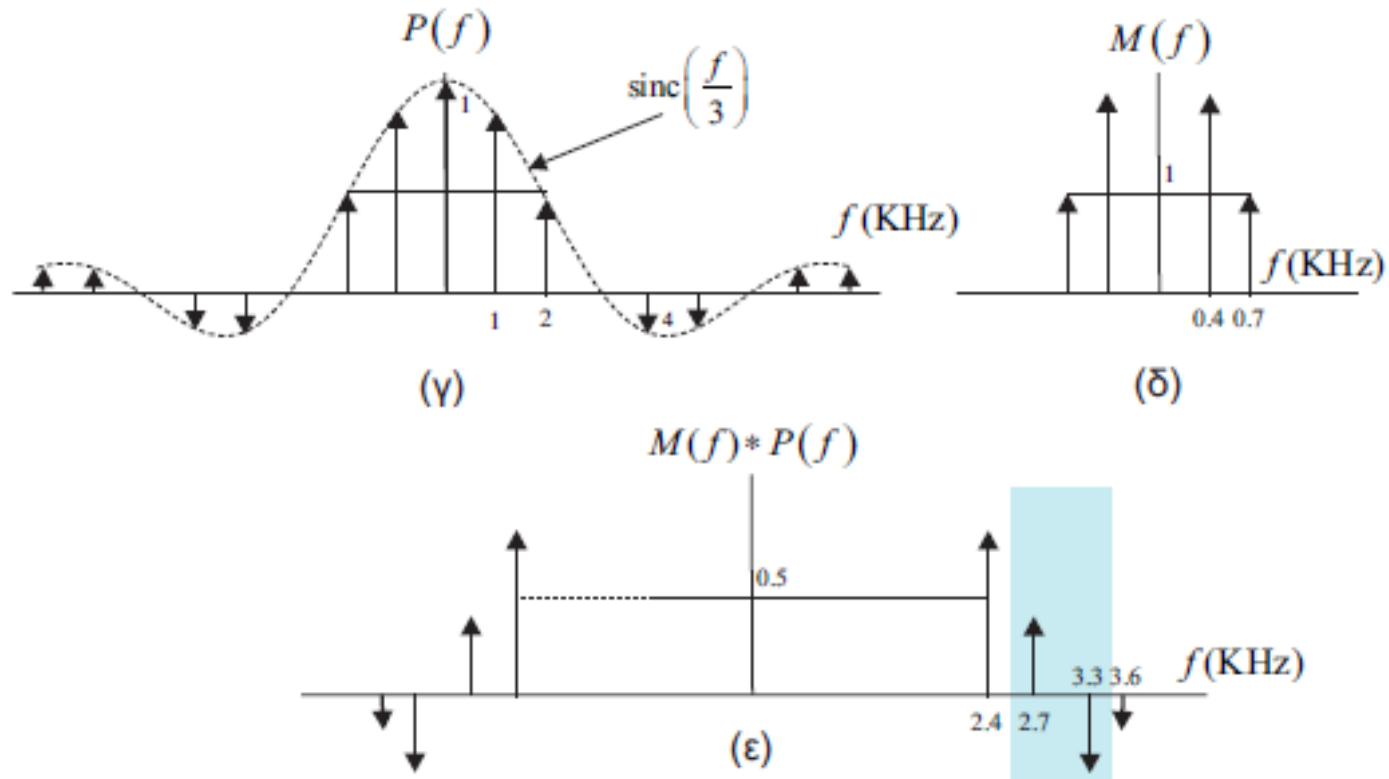
(α)



(β)

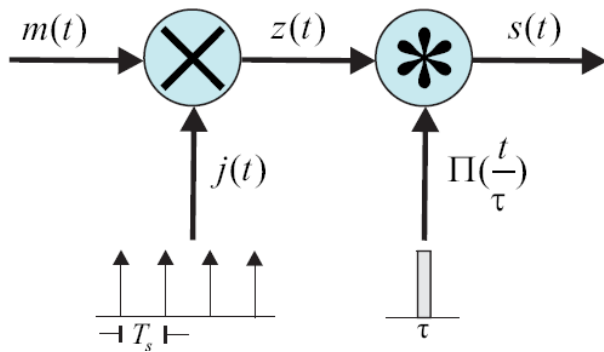


# Παράδειγμα 5.4 (2)



Σχήμα 5.11: Φασματικό περιεχόμενο εξόδου δειγματολήπτη για το Παράδειγμα 5.4

# Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής (Flat-top sampling)



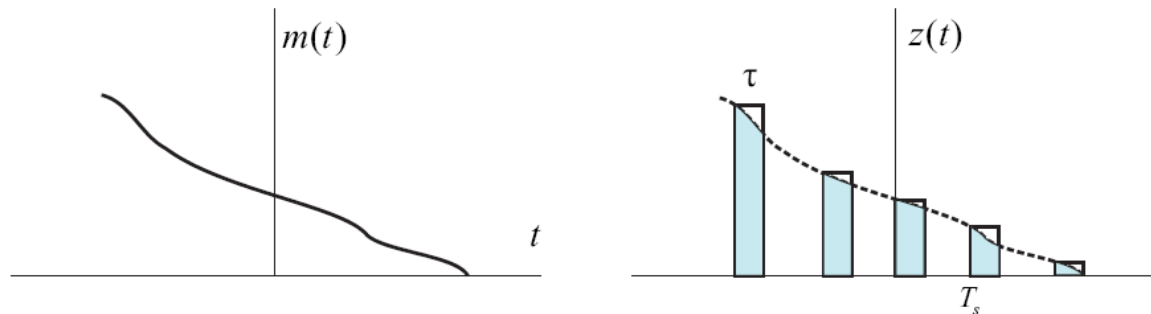
$$j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$z(t) = x(t) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

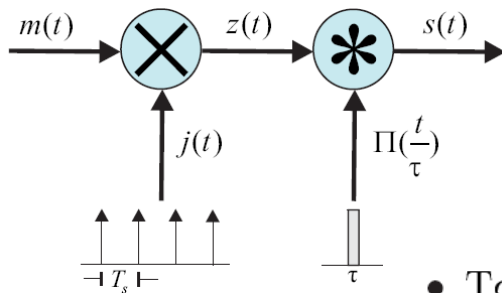
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_p(t - kT_s)$$

$$s(t) = [m(t) j(t)] * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$S(f) = \frac{\tau \text{sinc}(f\tau)}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s)$$



# Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής (Flat-top sampling) Πεδίο συχνότητας



$$S(f) = \frac{\tau \text{sinc}(f\tau)}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s)$$



- Το φάσμα του  $s(t)$  αποτελείται από παραμορφωμένα αντίγραφα του φάσματος του αναλογικού σήματος, επαναλαμβανόμενα στις συχνότητες  $\pm f_s$ .
- Η παραμόρφωση οφείλεται στον πολλαπλασιασμό στο πεδίο συχνοτήτων με τον παράγοντα  $\tau \text{sinc} f\tau$ , ο οποίος προκαλεί παραμόρφωση του  $s(t)$ .
- Για την ανάκτηση του αναλογικού σήματος στον DAC χωρίς παραμόρφωση απαιτείται επιπλέον του χαμηλοπερατού φίλτρου και ένα φίλτρο με απόκριση συχνότητας,

$$H(f) = \frac{1}{\tau \text{sinc} f\tau}, \quad (1.25)$$

προκειμένου να αντισταθμιστεί ο όρος  $\tau \text{sinc} f\tau$  στην (1.24). Η χρησιμοποίηση αυτού του φίλτρου ονομάζεται *ισοστάθμιση (equalising)*.



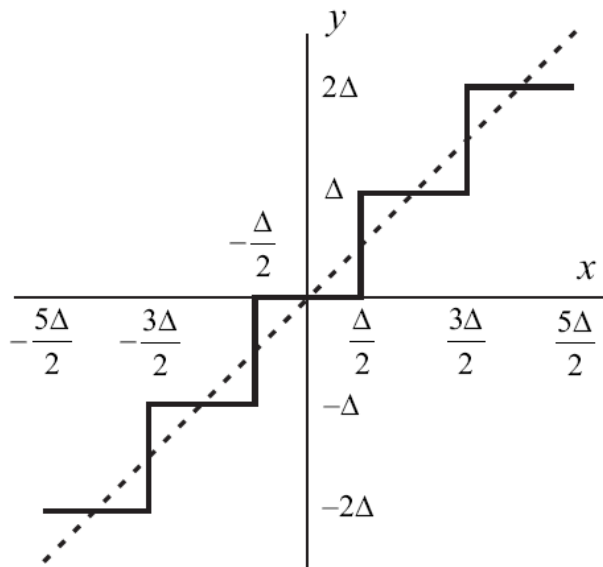
# Κβάντιση (Quantization)

*Κβάντιση (Quantization)* είναι η διαδικασία μετατροπής των δειγμάτων (τιμών) της εξόδου του δειγματολήπτη σε ακολουθία διακριτών τιμών, οι οποίες ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο επιπέδων πλάτους. Αν τα επίπεδα αυτά είναι ισαπέχοντα τότε η κβάντιση ονομάζεται *ομοιόμορφη (uniform)* ενώ στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται *μη-ομοιόμορφη (non-uniform)*.

Η κβάντιση είναι μια διαδικασία που θεωρητικά οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας. Έτσι, κρίσιμο σημείο στη σχεδίαση του κβαντιστή είναι η πληροφορία που θα χαθεί να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο “χρήσιμη” στο δέκτη.



# Ομοιόμορφη Κβάντιση (mid-tread)

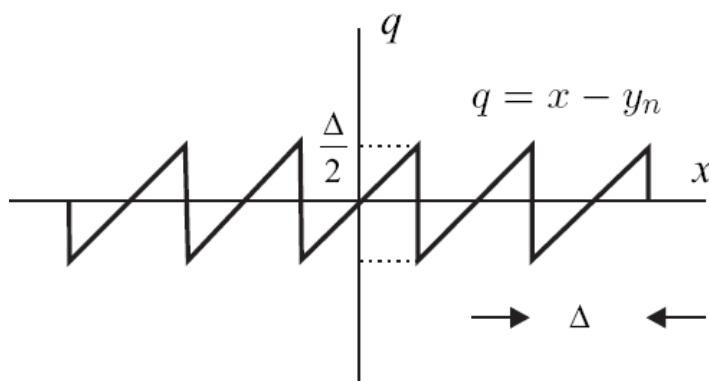


$$L = 2^R \Rightarrow \Delta = \frac{V_{pp}}{2^R}$$

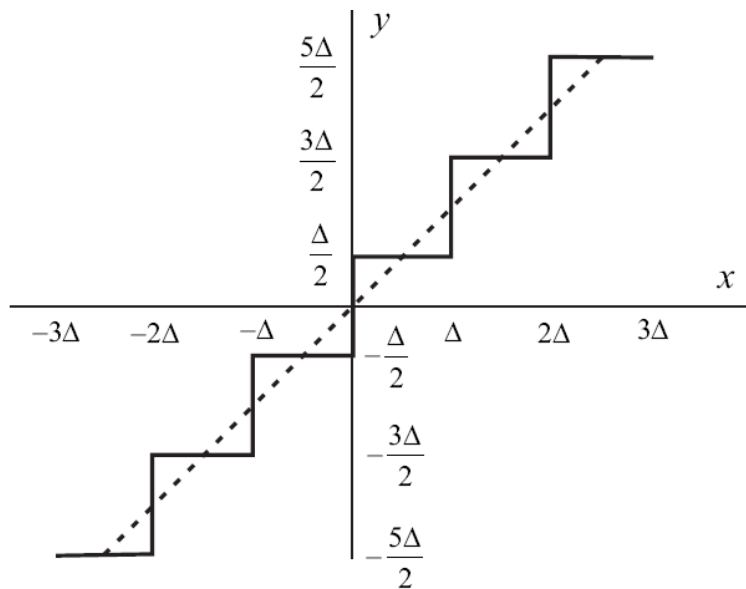
Βήμα

$$x \in \left\{ \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta \right\} \Rightarrow y = n\Delta$$

$$n = -\frac{L}{2}, -\frac{L}{2} + 1, \dots, \frac{L}{2} - 2, \frac{L}{2} - 1$$

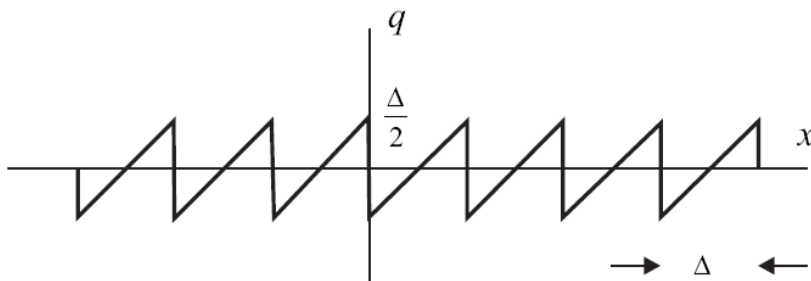


# Ομοιόμορφη Κβάντιση (mid-rise)



$$x \in \{(n-1)\Delta, n\Delta\} \Rightarrow y = (n - \frac{1}{2})\Delta$$

$$n = -\frac{L}{2} + 1, -\frac{L}{2} + 2, \dots, \frac{L}{2} - 1, \frac{L}{2}$$



# Παράδειγμα 5.5

## Παράδειγμα 5.5

Αν η είσοδος ενός κβαντιστή με επίπεδα κβάντισης  $0, \pm 2$  και  $\pm 4$ , είναι ένα τυχαίο αναλογικό σήμα της αρεσκειάς σας και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι πολύ μεγάλη, να σχεδιάσετε την έξοδο αυτού καθώς και το σφάλμα του κβαντιστή συναρτήσει του χρόνου.

## Απάντηση

Η κβάντιση ενός τυχαίου αναλογικού σήματος  $m(t)$  με επίπεδα κβάντισης  $0, \pm 2$  και  $\pm 4$  σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.16α.

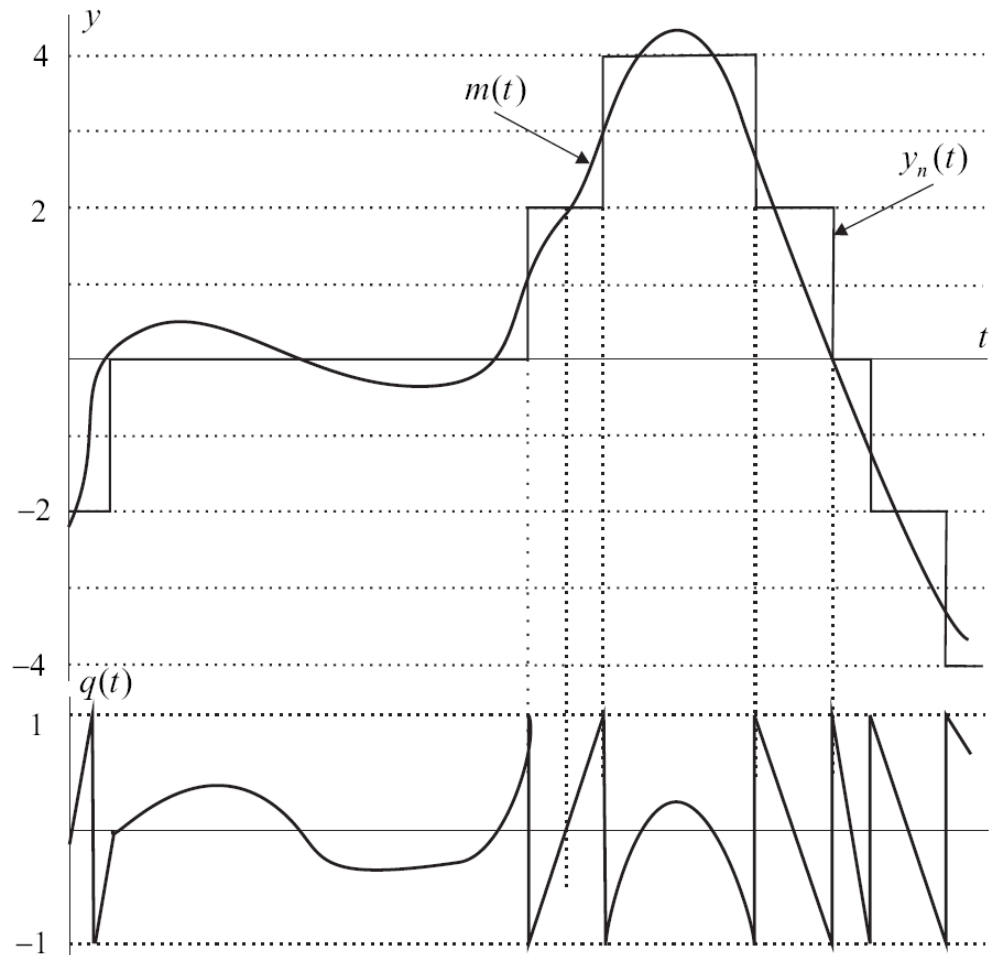
Στο Σχήμα 5.16β φαίνεται το σφάλμα κατά την κβάντιση

$$q(t) = m(t) - y_n(t), \quad (5.39)$$





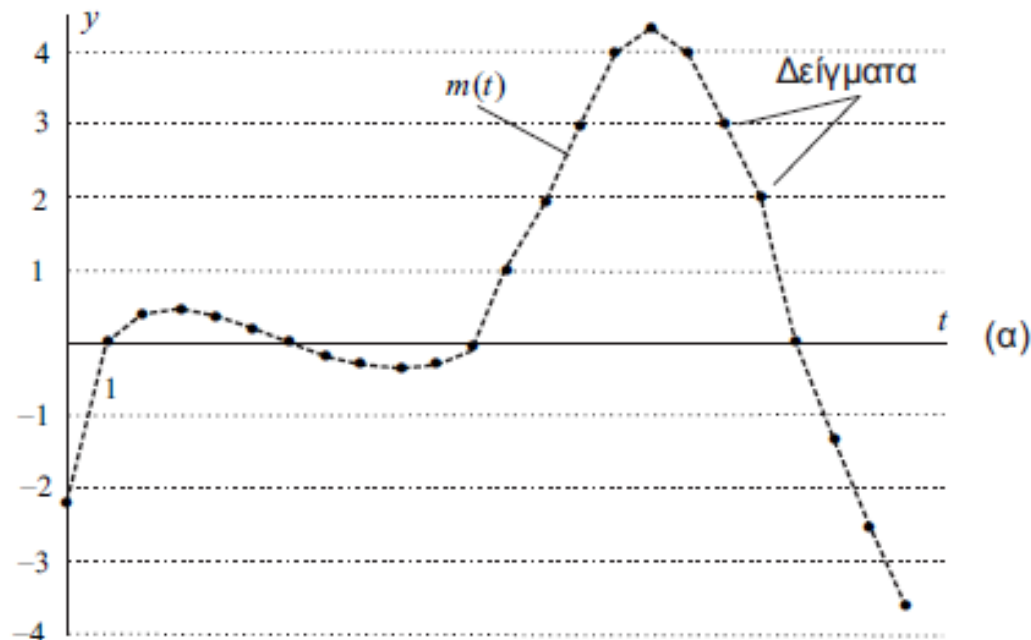
# Ομοιόμορφη Κβάντιση - Παράδειγμα 5.5



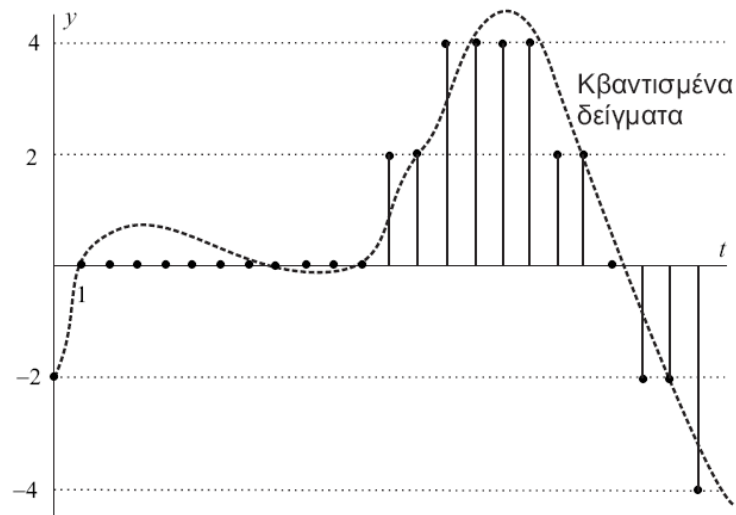
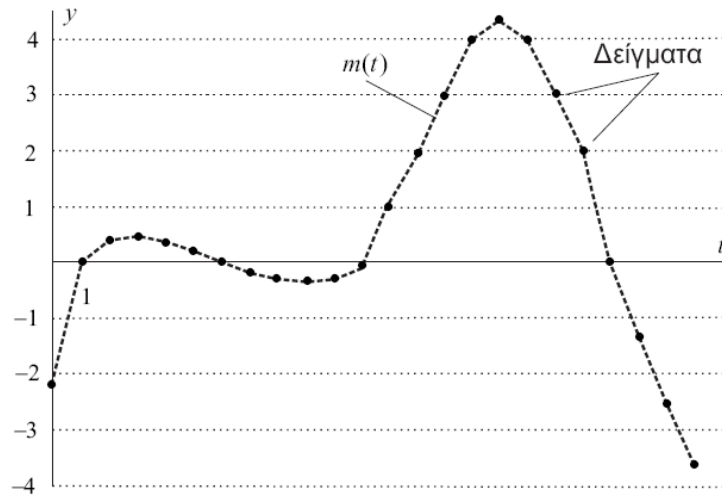
# Παράδειγμα 5.6 (1)

## Παράδειγμα 5.6

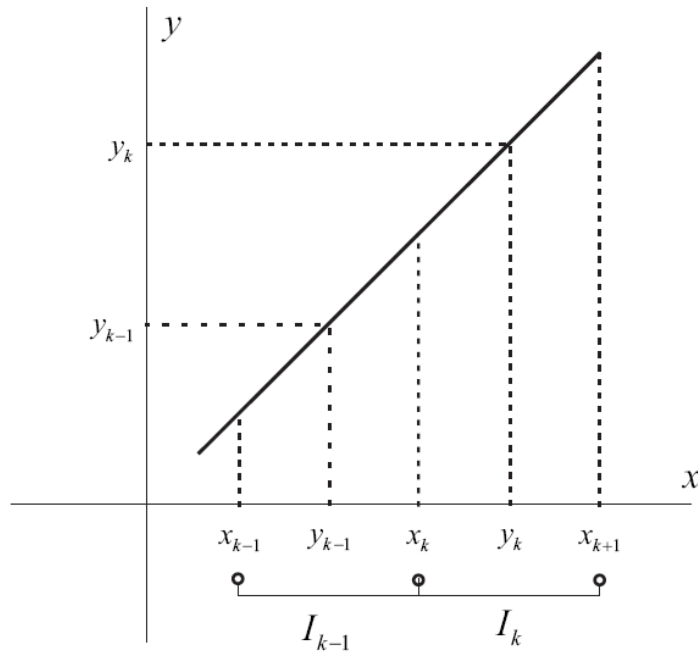
Αν είσοδος στον κβαντιστή του παραδείγματος 5.5 είναι οι δειγματοληπτημένες τιμές του σήματος με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = 1 \text{ Hz}$ , να σχεδιαστούν οι τιμές αυτές και η έξοδος του κβαντιστή.



# Παράδειγμα 5.6 (2)



# Θόρυβος Κβάντισης



$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & q \in \{-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\} \\ 0, & \text{αλλοού,} \end{cases}$$

$$\sigma_Q^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} q^2 dq = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{12} \frac{V_{pp}^2}{2^{2K}}$$

$$(\text{SNR})_{o,q} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Q^2}$$



$$(\text{SNR})_{o,q} = \frac{12\sigma_X^2}{\Delta^2}$$

$$I_k = \{x_k < x \leq x_{k+1}\}, k = 1, 2, \dots, L$$

$$y = y_k \text{ αν } x \in I_k \Rightarrow y_k = x + q, x \in I_k$$

Σφάλμα  $|q| \leq \frac{\Delta}{2}$

# Παράδειγμα 5.7

## Παράδειγμα 5.7

Ένα σήμα πληροφορίας  $x(t)$  μοντελοποιείται σαν δείγμα μιας Gaussian τυχαίας διαδικασίας  $X(t)$ . Το  $x(t)$  εισάγεται σε κβαντιστή με επίπεδο υπερφόρτωσης  $\pm 4\sigma_X$ , όπου  $\sigma_X^2$  είναι η διακύμανση της  $X(t)$ .

Αν η έξοδος του κβαντιστή είναι κωδικολέξη αποτελούμενη από  $R$  bits να βρεθεί μία έκφραση για το  $(\text{SNR})_{o,q}$ .

$$L = 2^R.$$

$$\Delta = \frac{2(|\pm 4\sigma_X|)}{L} = \frac{8\sigma_X}{2^R}.$$

$$(\text{SNR})_{o,q} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Q^2} = \frac{12\sigma_X^2}{\Delta^2} = \frac{12\sigma_X^2 2^{2R}}{64\sigma_X^2} = \frac{3}{16} 2^{2R}$$

$$(\text{SNR})_{o,q} = [6.02R - 7.2] \text{ dB}$$



# Παράδειγμα 5.8 (1)

## Παράδειγμα 5.8

Για ένα ημιτονοειδές σήμα  $x(t)$  με πλάτος  $A$  να υπολογιστεί το  $(\text{SNR})_{\text{o,q}}$  αν η έξοδος του κβαντιστή είναι κωδικολέξη αποτελούμενη από  $R$  bits.

$$\Delta = \frac{V_{pp}}{2R} = \frac{2A}{2R}$$

$$\mathcal{P}_x = \sigma_X^2 = \frac{A^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} (\text{SNR})_{\text{o,q}} &= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Q^2} = \frac{12\sigma_X^2}{\Delta^2} = 12 \frac{A^2}{2} \frac{2^{2R}}{4A^2} \\ &= \frac{3 \times 2^{2R}}{2} = [6.02R + 1.8] \text{ dB}. \end{aligned}$$



# Παράδειγμα 5.8 (2)

$$(\text{SNR})_{o,q} = [6.02R + \zeta] \text{dB.}$$

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{2^R}$$

$$x_{\max} = \max |x(t)| = \frac{V_{PP}}{2}$$

$$\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 2^{2R}}$$

$$(\text{SNR})_{o,q} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Q^2} = 3 \times 2^{2R} \left( \frac{\sigma_X}{x_{\max}} \right)^2$$

$$(\text{SNR})_{o,q} = \left[ 4.77 + 6.02R + 20 \log \frac{\sigma_X}{x_{\max}} \right] = [6.02R + \zeta] \text{dB}$$

$$\zeta = 4.77 + 20 \log \left( \frac{\sigma_X}{x_{\max}} \right)$$



# Παράδειγμα 5.9 (1)

## Παράδειγμα 5.9

Ένας ομοιόμορφος κβαντιστής έχει τη χαρακτηριστική μεταφοράς του Σχήματος 5.19α. Αν τα δείγματα του σήματος εισόδου στον κβαντιστή έχουν ΣΠΠ (Σχήμα 5.19β)

$$f_X(x) = A \left( 1 - \frac{|x|}{4} \right), \quad (5.61)$$

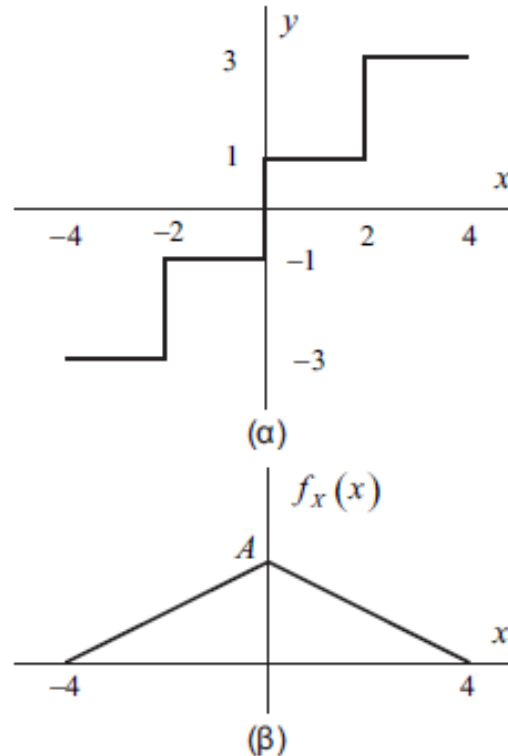
να βρεθεί η τιμή του  $A$  και η διακύμανση του θορύβου κβάντισης  $\sigma_Q^2$ . Επίσης να εξεταστεί αν ισχύει ότι

$$\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (5.62)$$





# Παράδειγμα 5.9 (2)



Σχήμα 5.19: (α) Συνάρτηση μεταφοράς χβαντιστή, (β) ΣΠΠ των δειγμάτων (Παράδειγμα 5.9)



# Παράδειγμα 5.9 (3)

Απάντηση

Επειδή η  $f_X(x)$  είναι ΣΠΠ θα ισχύει

$$\int_{-4}^4 f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-4}^4 A \left(1 - \frac{|x|}{4}\right) dx = 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \quad (5.63)$$

Έτσι η  $f_X(x)$  θα είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|x|}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{|x|}{16}, & |x| \leq 4 \\ 0, & \text{άλλοι} \end{cases} \quad (5.64)$$

Η διακύμανση του θαρούβου κβάντισης για  $x \geq 0$  θα είναι

$$\sigma_{Q_1}^2 = \int_0^2 f_X(x)(x-1)^2 dx + \int_2^4 f_X(x)(x-3)^2 dx \quad (5.65)$$

και μετά από πράξεις  $\sigma_{Q_1}^2 = \frac{1}{6}$ .

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι όταν  $x < 0$  η διακύμανση θα είναι

$$\sigma_{Q_2}^2 = \sigma_{Q_1}^2 = \frac{1}{6} \quad (5.66)$$



# Παράδειγμα 5.9 (4)

και η συνολική διακύμανση

$$\sigma_Q^2 = \sigma_{Q_2}^2 + \sigma_{Q_1}^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \quad (5.67)$$

Επειδή υπάρχουν τέσσερα επίπεδα κβάντισης θα ισχύει  $\Delta = \frac{V_{pp}}{4} = 2$ ,  
οπότε

$$\frac{\Delta^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \quad (5.68)$$

Έτσι, από τις (5.67) και (5.68) θα ισχύει

$$\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (5.69)$$



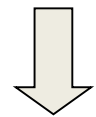
# Μη-ομοιόμορφη Κβάντιση (1)

$$(\text{SNR})_{o,q} = \frac{12\sigma_X^2}{\Delta^2}$$

Πρόβλημα με αυξομείωση της έντασης

Ομοιόμορφη Κβάντιση

Μη-ομοιόμορφη Κβάντιση



COMpressor  
Συμπιεστής

exPANDER  
Διαστολέας

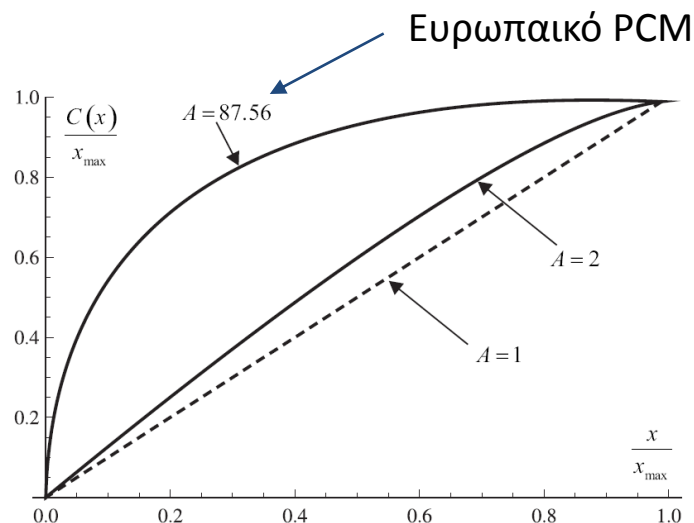
⇒ COMPANDER



# Μη-ομοιόμορφη Κβάντιση (2)

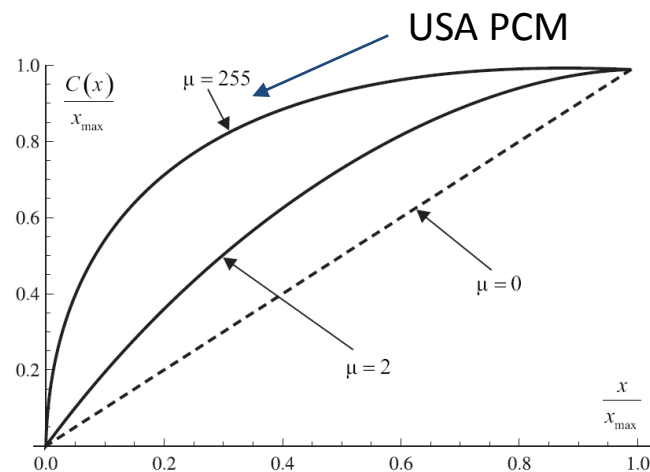
**A-law COMPANDER:**

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\log A} \operatorname{sgn}(x), & 0 \leq \frac{|x|}{x_{\max}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{\max} \left[ \frac{1+\log\left(\frac{A|x|}{x_{\max}}\right)}{1+\log A} \right] \operatorname{sgn}(x), & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{\max}} \leq 1 \end{cases}$$



**μ-law COMPANDER:**

$$C(x) = x_{\max} \left[ \frac{\log\left(1 + \mu \frac{|x|}{x_{\max}}\right)}{\log(1 + \mu)} \right] \operatorname{sgn}(x)$$



# Παράδειγμα 5.10 (1)

## Παράδειγμα 5.10

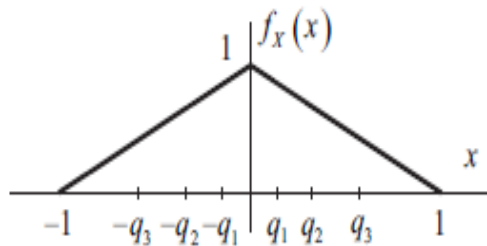
Τα δείγματα ενός αναλογικού σήματος εκφράζονται με μία τυχαία μεταβλητή  $X$  με ΣΠΠ  $f_X(x)$  αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 5.23. Τα δείγματα εισάγονται σε μη-ομοιόμορφο κβαντιστή με επίπεδα  $\pm q_1, \pm q_2$  και  $\pm q_3$ , τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$$\begin{aligned} \int_{-q_3}^{-q_2} f_X(x) dx &= \int_{-q_2}^{-q_1} f_X(x) dx = \dots \\ &= \int_{q_1}^{q_2} f_X(x) dx = \int_{q_2}^{q_3} f_X(x) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Να βρεθούν τα  $q_1, q_2$  και  $q_3$  και να προταθεί μία χαρακτηριστική συμπίεσης η οποία να προηγείται ενός ομοιόμορφου κβαντιστή έτσι ώστε να ικανοποιείται η (5.75). Επίσης, να εξετάσετε αν η προτεινόμενη χαρακτηριστική είναι μοναδική.



# Παράδειγμα 5.10 (2)



Σχήμα 5.23: ΣΠΠ του Παραδείγματος 5.10

Απάντηση

Από το Σχήμα (5.23) προκύπτει

$$\int_{-q_1}^{q_1} f_X(x) dx = 2 \int_0^{q_1} f_X(x) dx = \frac{1}{6}. \quad (5.76)$$

Έτσι

$$\int_0^{q_1} (1-x) dx = \frac{1}{12} \Rightarrow q_1 = 0.087. \quad (5.77)$$

Παρόμοια θα ισχύει

$$\int_{0.087}^{q_2} f_X(x) dx = \frac{1}{6} \quad (5.78)$$

και

$$\int_{q_2}^{q_1} f_X(x) dx = \frac{1}{6}. \quad (5.79)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.78) και (5.79), λαμβάνεται τελικά  $q_2 = 0.292$  και  $q_3 = 0.591$ .



# Παράδειγμα 5.10 (3)

Η χαρακτηριστική συμπίεσης  $C(x)$  λειτουργεί ουσιαστικά ως μετατροπέας των  $L = 6$  μη-ομοιόμορφων διαστημάτων (τα οποία αντιστοιχούν στα επίπεδα  $\pm q_1, \pm q_2$  και  $\pm q_3$ ) σε  $L = 6$  ομοιόμορφα διαστήματα με πλάτος

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{L} = \frac{2 \times 1}{6} = \frac{1}{3}. \quad (5.80)$$

Έτσι ένας ομοιόμορφος κβαντιστής mid-rise (βλέπε Σχήμα 5.15) που ακολουθεί μετά την  $C(x)$  θα έχει τα επίπεδα

$$\pm \frac{\Delta}{2} = \pm \frac{1}{6}, \quad \pm \frac{3\Delta}{2} = \pm \frac{3}{6}, \quad \pm \frac{5\Delta}{2} = \pm \frac{5}{6} \quad (5.81)$$

Η  $C(x)$  - όπως αναφέρθηκε προηγουμένως - πρέπει να είναι μία αύξουσα συνάρτηση, με περιττή συμμετρία, δηλαδή  $C(-x) = C(x)$ . Κάθε συνάρτηση  $C(x)$  που ικανοποιεί την αντιστοιχία του Πίνακα 5.1 ικανοποιεί και τις απαιτήσεις του προβλήματος, οπότε η  $C(x)$  δεν είναι μοναδική.

Πίνακας 5.1: Τιμές της  $C(x)$  για το Παράδειγμα 5.10

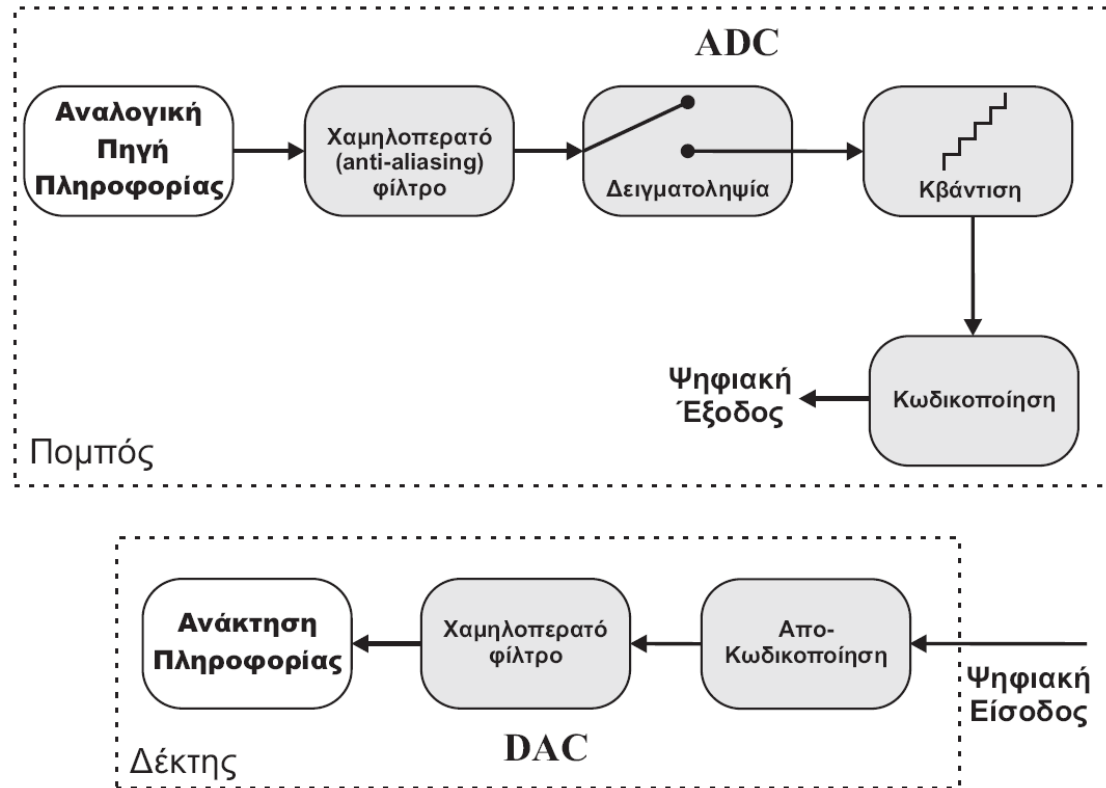
| $x$    | $C(x)$        |
|--------|---------------|
| 0.0087 | $\frac{1}{6}$ |
| 0.292  | $\frac{3}{6}$ |
| 0.591  | $\frac{5}{6}$ |
| 1      | 1             |





# Παλμοκωδική Διαμόρφωση (Pulse Code Modulation-PCM)

- Ψηφιακή τηλεφωνία
- Μουσικά πληκτρολόγια
- Ήχος στους υπολογιστές
- Ψηφιακό video
- Compact Disc
- Blu-ray

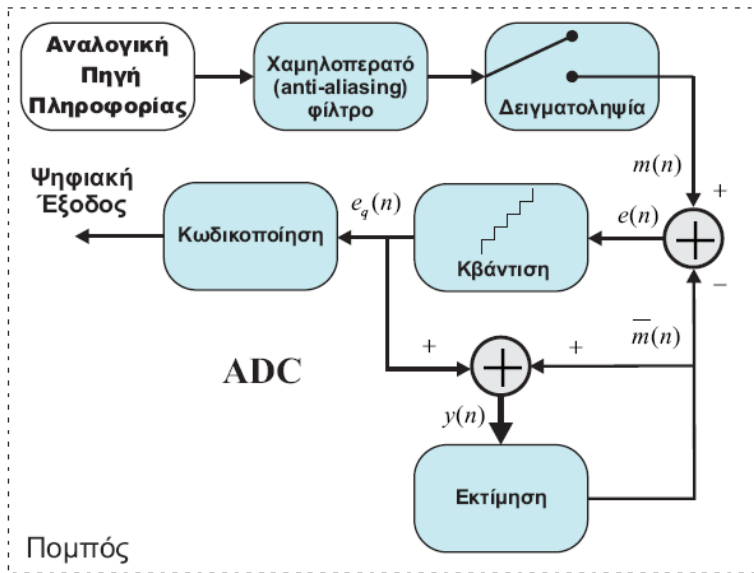


# Διαφορική Παλμοκωδική Διαμόρφωση (Differential Pulse Code Modulation-DPCM) (1)

- Παραλλαγή του PCM
- Περιλαμβάνει δειγματοληψία, κβάντιση και κωδικοποίηση
- Η βασική διαφορά είναι ότι δεν κβαντίζεται η τιμή του δείγματος αλλά η διαφορά αυτής με μια εκτιμώμενη τιμή
- Τα περισσότερα σήματα που συναντώνται στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα παρουσιάζουν μεγάλη συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων



# Διαφορική Παλμοκωδική Διαμόρφωση (Differential Pulse Code Modulation-DPCM) (2)

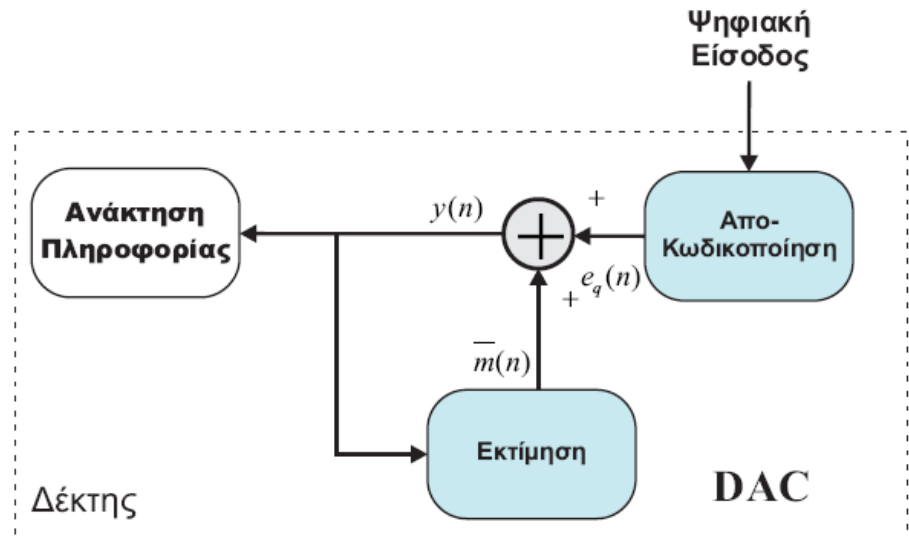


$$m(n) = e(n) + \hat{m}(n)$$

$$y(n) = \hat{m}(n) + e_q(n) = \hat{m}(n) + e(n) + q(n) = m(n) + q(n)$$

$$\hat{m}(n) \simeq m(n)$$

$$\hat{m}(n) = \sum_{i=1}^N a_i m(n - i)$$



# DPCM Πλεονεκτήματα σε σχέση με το PCM (1)

- i) Ο αριθμός των επιπέδων του κβαντιστή είναι μικρότερος. Για παράδειγμα, ένα PCM 8 επιπέδων μετατρέπεται σε DPCM 4 επιπέδων, οπότε αντί για 3 απαιτούνται 2 bits για κωδικοποίηση ενός δείγματος πληροφορίας. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη μετάδοση της ίδιας πληροφορίας με εξοικονόμηση εύρους ζώνης.
- ii) Ο σχεδιασμός του συστήματος απλοποιείται αφού δεν απαιτείται στο δέκτη φίλτρο μετατροπής του ψηφιακού σήματος σε αναλογικό όπως συμβαίνει στο PCM.
- iii) Επειδή στο DPCM λαμβάνεται υπόψη και η φυσική (πέρα από τη στατιστική) σχέση διαδοχικών δειγμάτων, η ανάκτηση του αναλογικού σήματος είναι πιο αξιόπιστη συγκρινόμενη με την αντίστοιχη του DPCM.



# DPCM Πλεονεκτήματα σε σχέση με το PCM (2)

Το μειονέκτημα του DPCM είναι η μεγαλύτερη ευαισθησία του στο θόρυβο από το αντίστοιχο PCM. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ανάκτηση ενός δείγματος στο δέκτη εξαρτάται από τα προηγούμενα δείγματα, με αποτέλεσμα τη διάδοση λαθών που έχουν συμβεί προηγουμένως και στα επόμενα δείγματα.

Το DPCM χρησιμοποιείται σε πρότυπα όπως το *Joint Photographic Experts Group (JPEG)* για την ψηφιοποίηση εικόνας και σαν *Adaptive DPCM (ADPCM)* για τη συμπίεση ήχου.



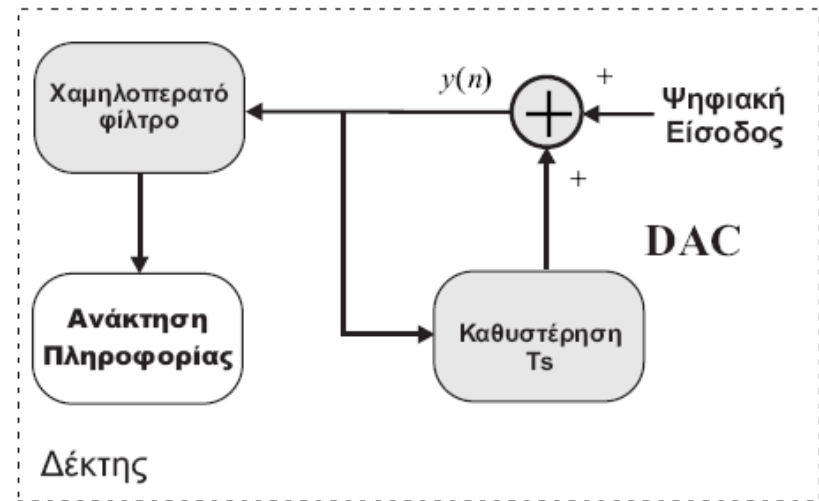
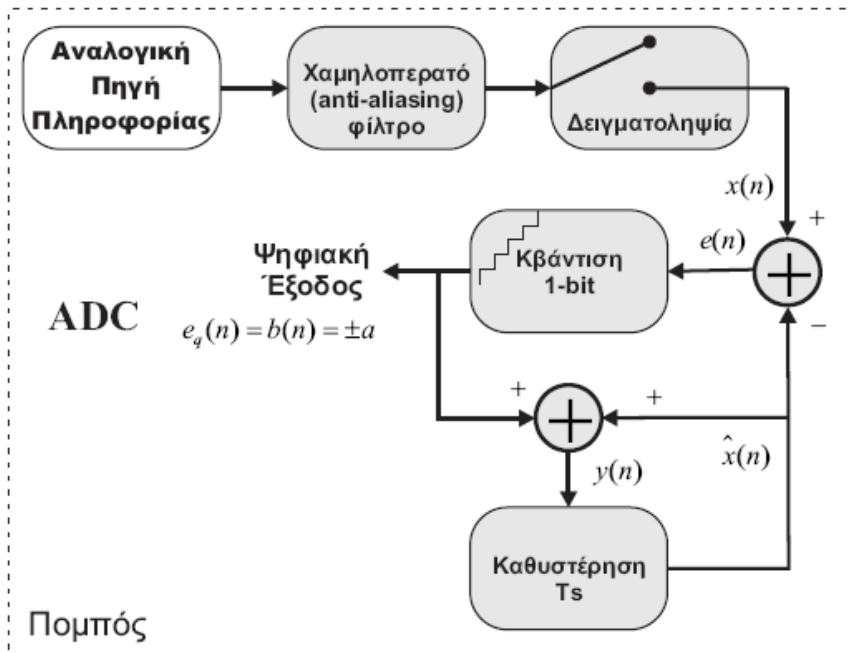
# Διαμόρφωση Δέλτα (Delta Modulation) (1)

Η Διαμόρφωση Δέλτα (*Delta Modulation-DM*) μπορεί να θεωρηθεί σαν ειδική περίπτωση του DPCM η οποία χρησιμοποιεί τον περισσότερο απλό κβαντιστή, τον επονομαζόμενο κβαντιστή δύο επιπέδων ή ενός *bit*.

Το αντίτιμο για τη χρήση του κβαντιστή χαμηλής πολυπλοκότητας είναι η απαίτηση για δειγματοληψία σε μεγάλους ρυθμούς, συνήθως μεγαλύτερους από τη διπλάσια συχνότητα Nyquist, με στόχο την αύξηση της συσχέτισης των γειτονικών δειγμάτων. Με τον τρόπο αυτό υπάρχει πολύ μικρή αλλαγή μεταξύ των δειγμάτων αυτών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ένα DPCM σύστημα με κβαντιστή δύο επιπέδων.



# Διαμόρφωση Δέλτα (Delta Modulation) (2)



# Κωδικοποίηση (Encoding)

Κωδικοποίηση (*Encoding*) είναι η μετατροπή των κβαντισμένων δειγμάτων σε κατάλληλη μορφή για τη μετάδοση από τον πομπό. Η κωδικοποίηση είναι μία διαδικασία που αντιστοιχεί ένα-προς-ένα τα κβαντισμένα δείγματα σε σύμβολα-κωδικολέξεις (*codewords*) ορισμένου μεγέθους.

Η κωδικοποίηση των δειγμάτων υλοποιείται στην πράξη με δυαδικούς (οι κωδικολέξεις περιλαμβάνουν δύο διακριτές τιμές 0 ή 1) ή τετραδικούς (0,1,2 ή 3) κώδικες. Όμως στη μεγάλη πλειοψηφία των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων χρησιμοποιούνται οι πρώτοι.

Αν χρησιμοποιηθούν  $R$  bits ανά δείγμα τότε ο μέγιστος αριθμός των δυνατών κωδικολέξεων είναι  $2^R$  οπότε ο απαιτούμενος αριθμός επιπέδων κβάντισης πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του  $2^R$ .





# Κωδικοποίηση

$$N = b_R(2^{R-1}) + b_{R-1}(2^{R-2}) + \dots + b_2(2^1) + b_1(2^0) \implies \text{Φυσικός δυαδικός κώδικας (NBC)}$$

**Folded Binary Code-FBC.** Το πρώτο από αριστερά bit καθορίζει το πρόσημο και τα υπόλοιπα χρησιμοποιούνται για να κωδικοποιήσουν το πλάτος. Ο κώδικας αυτός είναι ανώτερος του φυσικού όσον αφορά την ανίχνευση σφαλμάτων, ιδιαίτερα όταν κωδικοποιείται φωνή.

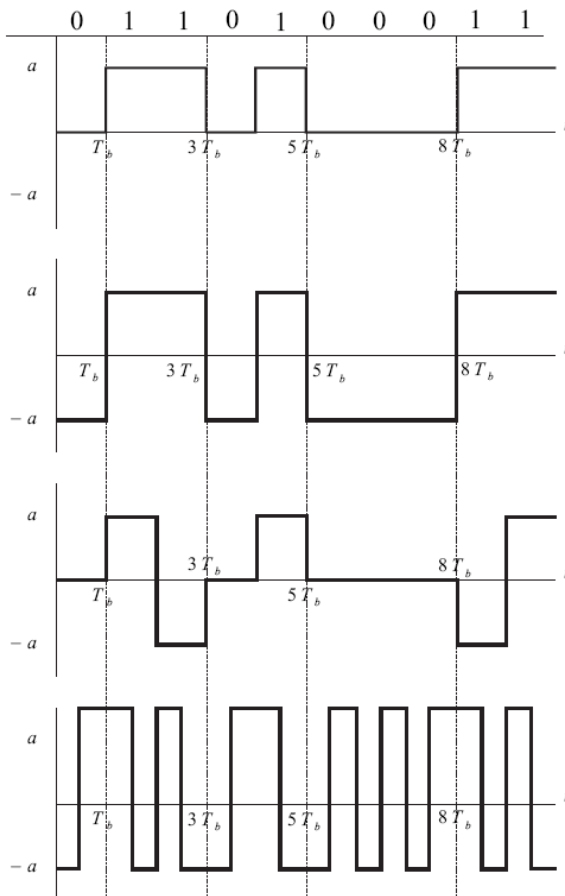
**Inverted Folded Binary Code-IFBC.** Ο κώδικας αυτός προκύπτει από τον FBC με αντιστροφή των bits πλάτους (το 1 αλλάζει σε 0 και το 0 σε 1). Έχει το πλεονέκτημα της μεγάλης συγκέντρωσης σε 1 για σήματα μικρού πλάτους, κατάσταση που εμφανίζεται με μεγάλη πιθανότητα σε περίπτωση κωδικοποίησης φωνής.

**Gray Code-GC.** Με το φυσικό κώδικα μπορούν να αλλάζουν περισσότερα από ένα bits σε κωδικολέξεις ακόμα και αν αυτές αντιστοιχούν σε γειτονικά επίπεδα. Για παράδειγμα κατά τη μετάβαση από το επίπεδο 7 στο 8, αλλάζουν όλα τα bits.

| Επίπεδο | Natural Binary Code |       |       |       | Folded Binary Code |   |   |   | Inverted Folded Binary Code |   |   |   | Gray Code |       |       |       |
|---------|---------------------|-------|-------|-------|--------------------|---|---|---|-----------------------------|---|---|---|-----------|-------|-------|-------|
|         | $b_4$               | $b_3$ | $b_2$ | $b_1$ |                    |   |   |   |                             |   |   |   | $g_4$     | $g_3$ | $g_2$ | $g_1$ |
| 15      | 1                   | 1     | 1     | 1     | 1                  | 1 | 1 | 1 | 1                           | 0 | 0 | 0 | 1         | 0     | 0     | 0     |
| 14      | 1                   | 1     | 1     | 0     | 1                  | 1 | 1 | 0 | 1                           | 0 | 0 | 1 | 1         | 0     | 0     | 1     |
| 13      | 1                   | 1     | 0     | 1     | 1                  | 1 | 0 | 1 | 1                           | 0 | 1 | 0 | 1         | 0     | 1     | 1     |
| 12      | 1                   | 1     | 0     | 0     | 1                  | 1 | 0 | 0 | 1                           | 0 | 1 | 1 | 1         | 0     | 1     | 0     |
| 11      | 1                   | 0     | 1     | 1     | 1                  | 0 | 1 | 1 | 1                           | 1 | 0 | 0 | 1         | 1     | 1     | 0     |
| 10      | 1                   | 0     | 1     | 0     | 1                  | 0 | 1 | 0 | 1                           | 1 | 0 | 1 | 1         | 1     | 1     | 1     |
| 9       | 1                   | 0     | 0     | 1     | 1                  | 0 | 0 | 1 | 1                           | 1 | 1 | 0 | 1         | 1     | 0     | 1     |
| 8       | 1                   | 0     | 0     | 0     | 1                  | 0 | 0 | 0 | 1                           | 1 | 1 | 1 | 1         | 1     | 0     | 0     |
| 7       | 0                   | 1     | 1     | 1     | 0                  | 0 | 0 | 0 | 0                           | 1 | 1 | 1 | 0         | 1     | 0     | 0     |
| 6       | 0                   | 1     | 1     | 0     | 0                  | 0 | 0 | 1 | 0                           | 1 | 1 | 0 | 0         | 1     | 0     | 1     |
| 5       | 0                   | 1     | 0     | 1     | 0                  | 0 | 1 | 0 | 0                           | 1 | 0 | 1 | 0         | 1     | 1     | 1     |
| 4       | 0                   | 1     | 0     | 0     | 0                  | 0 | 1 | 1 | 0                           | 1 | 0 | 0 | 0         | 1     | 1     | 0     |
| 3       | 0                   | 0     | 1     | 1     | 0                  | 1 | 0 | 0 | 0                           | 0 | 1 | 1 | 0         | 0     | 1     | 0     |
| 2       | 0                   | 0     | 1     | 0     | 0                  | 1 | 0 | 1 | 0                           | 0 | 1 | 0 | 0         | 0     | 1     | 1     |
| 1       | 0                   | 0     | 0     | 1     | 0                  | 1 | 1 | 0 | 0                           | 0 | 0 | 1 | 0         | 0     | 0     | 1     |
| 0       | 0                   | 0     | 0     | 0     | 0                  | 1 | 1 | 1 | 0                           | 0 | 0 | 0 | 0         | 0     | 0     | 0     |



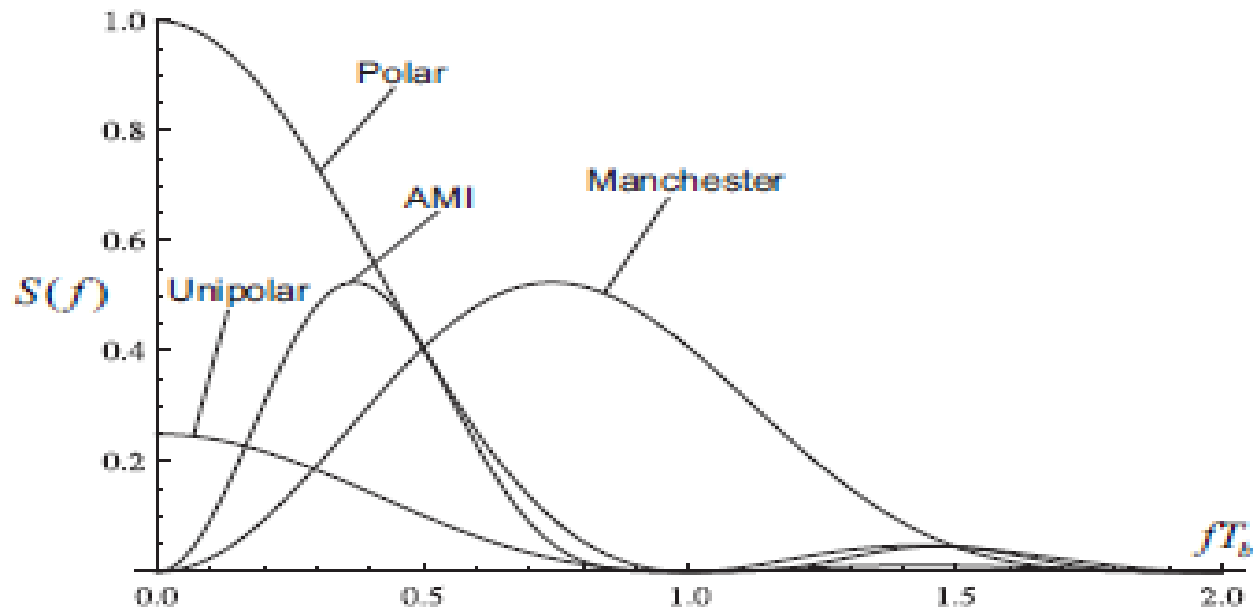
# Αντιστοιχία bits σε κυματομορφές



- **Unipolar** ή **On-Off**. Το 1 αντιστοιχεί σε ένα παλμό ενώ το 0 σε παύση της εκπομπής. Η τεχνική αυτή δημιουργεί DC συνιστώσα η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ανεπιθύμητη.
- **Polar**, όπου χρησιμοποιείται ένας θετικός παλμός για το 1 και ένας αρνητικός για το 0. Εδώ δεν υπάρχει DC συνιστώσα με την προϋπόθεση ότι τα 0 και 1 στην ακολουθία εισόδου φτάνουν με την ίδια πιθανότητα.
- **Bipolar** ή **Alternate Mark Inversion, AMI**. Στην περίπτωση του κώδικα AMI χρησιμοποιούνται εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί παλμοί για το 1 (με την αλλαγή να πραγματοποιείται σε κάθε εμφάνιση του bit 1) ενώ δεν υπάρχει παλμός για το 0. Με τον τρόπο αυτό υπάρχουν τρία επίπεδα:  $+1, 0, -1$ .
- **Manchester**. Το 1 κωδικοποιείται με τη μετάδοση ενός θετικού παλμού για το μισό της περιόδου του συμβόλου και με ένα αρνητικό παλμό για το υπόλοιπο μισό. Για το ψηφίο 0 οι δύο παλμοί μεταδίδονται σε αντίστροφη σειρά.



# Φάσματα (Spectra)



Σχήμα 5.29: Φππ τεχνικών κωδικοποίησης γραμμής NRZ,  $a = 1$



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη [εδώ](#).



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Παναγιώτης Μαθιόπουλος. Παναγιώτης Μαθιόπουλος. «Συστήματα Επικοινωνιών. Μετατροπή Αναλογικών Σημάτων σε Ψηφιακά». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<http://opencourses.uoa.gr/courses/DI114>.





# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

## **Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**

"Η δομή και οργάνωση της παρουσίασης, καθώς και το υπόλοιπο περιεχόμενο, αποτελούν πνευματική ιδιοκτησία του συγγραφέα και του Πανεπιστημίου Αθηνών και διατίθενται με άδεια Creative Commons Αναφορά Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή Έκδοση 4.0 ή μεταγενέστερη.

Οι Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/φωτογραφίες που περιέχονται στην παρουσίαση αποτελούν πνευματική ιδιοκτησία τρίτων. Απαγορεύεται η αναπαραγωγή, αναδημοσίευση και διάθεσή τους στο κοινό με οποιονδήποτε τρόπο χωρίς τη λήψη άδειας από τους δικαιούχους. "

