



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 5: Ψηφιακή εκπομπή και λήψη

Μαθιόπουλος Παναγιώτης

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Περιγραφή ενότητας

- Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα ψηφιακών επικοινωνιών, Κριτήρια Αξιολόγησης ψηφιακών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων.
- Δομή και Λειτουργία Ψηφιακού Τηλεπικοινωνιακού Συστήματος: Πομπός, Κανάλι, Δέκτης.
- Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων: Σήματα και διανύσματα, Ορθογώνια αναπαράσταση σημάτων, Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt, Αστερισμοί (Constellations).
- Ψηφιακή Εκπομπή
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Gaussian Θορύβου
- Ψηφιακός Δέκτης: Αποδιαμόρφωση, Βέλτιστη ανίχνευση σε AWGN.
- Πιθανότητα Σφάλματος σε Κανάλι AWGN: Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου, Πιθανότητα σφάλματος bit, Κωδικοποίηση Gray.



Ψηφιακή εκπομπή και λήψη

Εισαγωγή (1)

- Οι Ψηφιακές Επικοινωνίες (Digital Communications) καλύπτουν σήμερα το μεγαλύτερο μέρος των τηλεπικοινωνιακών υπηρεσιών ενώ προβλέπεται να επικρατήσουν πλήρως τα επόμενα χρόνια σε βάρος των αναλογικών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων.



Εισαγωγή (2)

Βασικές διαφορές:

- Στα αναλογικά τηλεπικοινωνιακά συστήματα η πληροφορία με τη μορφή αναλογικού σήματος αποτυπώνεται στο πλάτος ή τη γωνία του φέροντος, παράμετροι οι οποίες μπορούν θεωρητικά να λάβουν άπειρο αριθμό τιμών-καταστάσεων.
- Στα ψηφιακά τηλεπικοινωνιακά συστήματα η πληροφορία μετατρέπεται από αναλογική σε ψηφιακή μορφή (αν δεν είναι ήδη, όπως για παράδειγμα σε επικοινωνίες υπολογιστών) και κατόπιν –αφού υποστεί κατάλληλη επεξεργασία- ακολουθεί η αντιστοίχιση του ψηφιακού σήματος σε πεπερασμένο αριθμό αναλογικών κυματομορφών προς εκπομπή, οι οποίες ονομάζονται σύμβολα (symbols).



Πλεονεκτήματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

- Αντοχή στον θόρυβο.
- Κρυπτογράφηση.
- Ευκολότερος σχεδιασμός, χαμηλό κόστος και μικρό μέγεθος.
- Ευελιξία.
- Τεχνικές πολλαπλής προσπέλασης με διαίρεση χρόνου (TDMA) ή/και διαίρεση κώδικα (CDMA).
- Αξιόπιστη επεξεργασία σήματος.
- Υπηρεσίες πολυμέσων.
- Αποθήκευση και ανάκτηση της πληροφορίας.



Μειονεκτήματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

- Το μοναδικό ίσως μειονέκτημα των ψηφιακών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων έναντι των αναλογικών είναι η ανάγκη για ακριβή συγχρονισμό μεταξύ του πομπού και του δέκτη. Αν και συγχρονισμός απαιτείται και στα αναλογικά συστήματα, ελλιπής συγχρονισμός ή έλλειψη συγχρονισμού σε ψηφιακά συστήματα οδηγεί σε σφάλματα κατά την ανίχνευση των συμβόλων στο δέκτη και επομένως σε υποβάθμιση της ποιότητας επικοινωνίας.



Κριτήρια αξιολόγησης συστημάτων (1)

- **Λόγος σήματος-προς-θόρυβο (SNR ή S/N):**

$$\text{SNR} = \frac{P_r}{P_N} \quad \text{ASNR} = \mathbb{E}[\text{SNR}]$$

- **Λόγος σήματος-προς-παρεμβολή συν θόρυβο:**
Στην πράξη εκτός από το θόρυβο ένας άλλος σημαντικός παράγοντας υποβάθμισης της ποιότητας της επικοινωνίας είναι η παρεμβολή (interference). Αυτή οφείλεται σε χρήστες του ίδιου τηλεπικοινωνιακού συστήματος.

$$\text{SINR} = \frac{P_r}{P_N + P_I} \quad \text{ASINR} = \mathbb{E}[\text{SINR}]$$



Κριτήρια αξιολόγησης συστημάτων (2)

- **Ρυθμός σφάλματος bit ή συμβόλου:** Bit Error Rate-BER ή Symbol Error Rate-SER.
- **Αποδοτικότητα Ισχύος:** Ορίζεται ως το SNR που απαιτείται για την επίτευξη συγκεκριμένης επίδοσης της πιθανότητας σφάλματος bit ή συμβόλου.
- **Φασματική Αποδοτικότητα:** $N_{BW} = \frac{R}{W}$, bps/Hz,
- **Ρυθμός Μετάδοσης Πληροφορίας:** Ο Ρυθμός Μετάδοσης Πληροφορίας (Bit Rate) ή Χωρητικότητα Καναλιού (Channel Capacity) δίνεται από την σχέση Shannon-Hartley

$$C = W \log_2(1 + \text{SNR}), \text{ bps}$$



Κριτήρια αξιολόγησης συστημάτων (3)

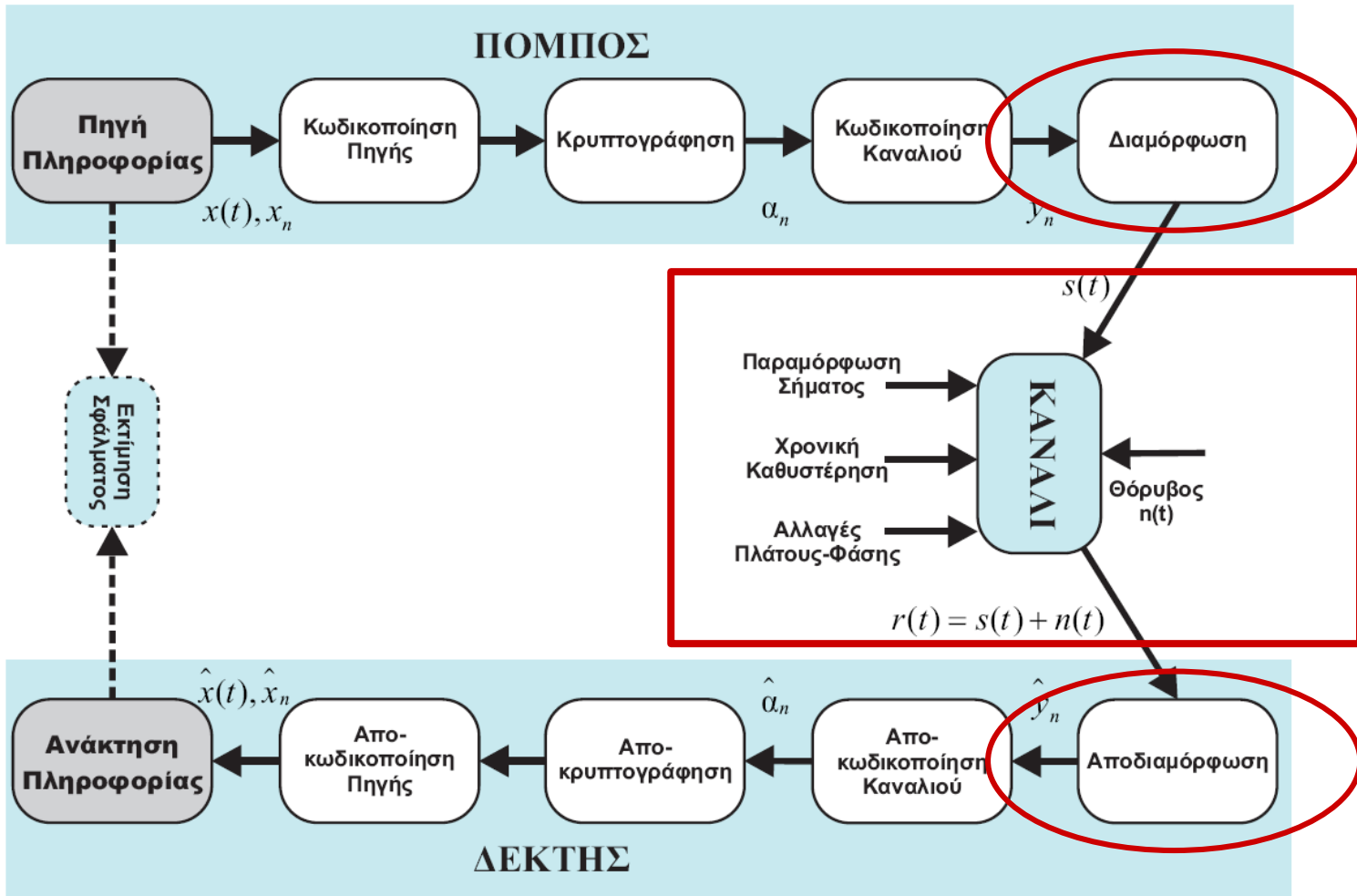
- **Πιθανότητα διακοπής επικοινωνίας:** Η Πιθανότητα Διακοπής της Επικοινωνίας (Outage Probability) ορίζεται ως

$$P_{\text{out}} = \Pr(C < R_t)$$

$$P_{\text{out}} = \Pr(\text{SNR} < \gamma_t)$$



Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας



Πομπός

- Οι λειτουργικές βαθμίδες του πομπού είναι οι εξής:
 - Η Πηγη Πληροφορίας που παρέχει τα δεδομένα προς εκπομπή
 - Κωδικοποίηση πηγής
 - Κρυπτογράφηση
 - Κωδικοποίηση καναλιού
 - Διαμόρφωση



Κανάλι

- Η φθορά στην οποία υπόκειται το σήμα εισόδου από το κανάλι οφείλεται στους εξής παράγοντες:
 - Θόρυβος
 - Παραμόρφωση
 - Χρονική καθυστέρηση



Δέκτης

- Αποτελείται από λειτουργικές μονάδες που υλοποιούν τις αντίστροφες διαδικασίες από αυτές του πομπού:
 - Αποδιαμόρφωση
 - Αποκωδικοποίηση καναλιού
 - Αποκρυπτογράφηση
 - Αποκωδικοποίηση πηγής



Διανύσματα στο χώρο - Βασικές έννοιες (1)

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \quad (a_1, a_2, a_3)$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \longrightarrow \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \quad (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

- Η διάσταση, n , του χώρου είναι ο αριθμός των μοναδιαίων διανυσμάτων που είναι αναγκαίος και ικανός για την αναπαράσταση οποιουδήποτε διανύσματος του χώρου.
- Τα διανύσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αν κανένα από αυτά δε μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i$$

Μέτρο $\Rightarrow \|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$

Ορθογώνια $\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$



Διανύσματα στο χώρο - Βασικές έννοιες (2)

Προβολή \mathbf{a} σε \mathbf{b} $\implies \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \right) \mathbf{b}$

- Ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται **ορθοκανονικό** αν είναι όλα ορθογώνια μεταξύ τους και έχουν όλα μοναδιαίο μέτρο.
- Ένα ορθοκανονικό σύνολο από διανύσματα (όπου n η διάσταση του χώρου των σημάτων) ονομάζεται **ορθοκανονική βάση** του χώρου των διανυσμάτων.
- Για μια ορθοκανονική βάση ισχύει $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$ και επομένως το διάνυσμα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$$

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad \text{Τριγωνική ανισότητα}$$

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \quad \text{Cauchy-Schwartz}$$

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$



$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα



Διανύσματα στο χώρο - Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt (1)

- Πρόβλημα: Δίνονται n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$
- Ζητείται να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για την αναπαράσταση αυτών των διανυσμάτων.
- Η διαδικασία με την οποία μπορούμε να βρούμε μία τέτοια βάση είναι γνωστή ως διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt.



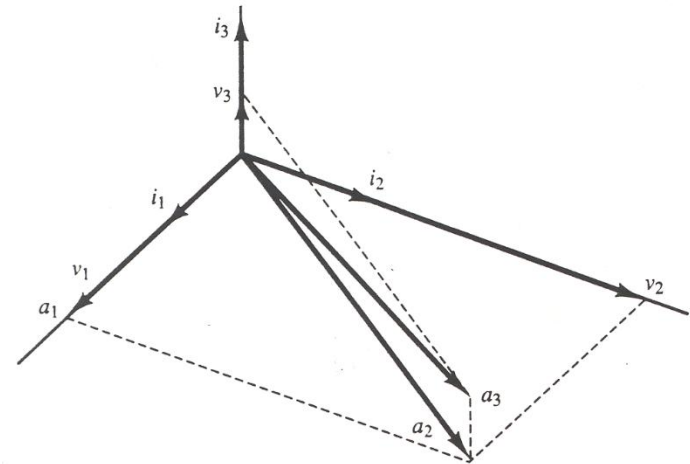
Διανύσματα στο χώρο - Διαδικασία ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt (2)

Βήμα 1 $\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$

Βήμα 2 $\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1$
 $\mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}$

Βήμα 3 $\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2$
 $\mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}$

Βήμα m $\Rightarrow \mathbf{v}_m = \mathbf{a}_m - \sum_{j=1}^{m-1} (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{i}_j)\mathbf{i}_j$
 $1 \leq m \leq n$ $\mathbf{i}_m = \frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|}$



\Leftarrow Αν $\|\mathbf{v}_m\| = 0$
διαδικασία σταματά

Σήματα και Διανύσματα (1)

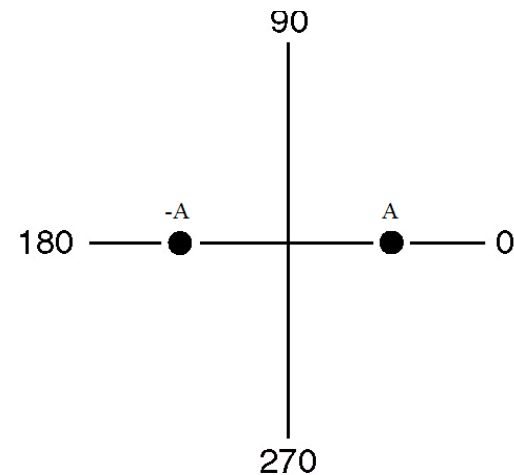
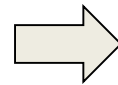
Η αντιστοίχιση σημάτων με διανύσματα, δηλαδή η θεωρία ενός διανυσματικού (γεωμετρικού) χώρου-σημάτων (*signal-space*), εμφανίστηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1960 από τους Wozencraft και Jacobs.

Η θεωρία αυτή είναι από τις πιο σημαντικές εξελίξεις στη θεωρία των ψηφιακών επικοινωνιών αφού οι ιδιότητες των διανυσμάτων μεταφέρονται στο χώρο των σημάτων, η συμπεριφορά των οποίων μπορεί να μελετηθεί και να αξιολογηθεί με έναν περισσότερο εποπτικό και επομένως κατανοητό τρόπο.



Σήματα και Διανύσματα (2)

- Για παράδειγμα, σήματα με διαφορετικά πλάτη αναπαρίστανται σαν σημεία πάνω σε μια ευθεία.



- Γενικά τα σήματα αναπαρίστανται με **μιγαδικούς αριθμούς** ή ισοδύναμα με **διανύσματα**, ώστε με την βοήθεια της Ευκλείδειας γεωμετρίας και της θεωρίας πιθανοτήτων να γίνει δυνατή η μελέτη του τηλεπικοινωνιακού συστήματος.



Σήματα και Διανύσματα: Κοινές ιδιότητες

- Από πολλές απόψεις τα σήματα μοιάζουν και μπορούν να αντιστοιχιστούν με διανύσματα.
- Τα σήματα, όπως και τα διανύσματα, μπορούν να προστεθούν και να αφαιρεθούν οπότε προκύπτουν νέα σήματα.
- Ένα σήμα μπορεί να πολλαπλασιαστεί με ένα αριθμό με αποτέλεσμα ένα νέο σήμα.
- Οι γραμμικοί συνδυασμοί σημάτων είναι επίσης νέα σήματα.
- Όπως και τα διανύσματα, τα σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν με τη βοήθεια ενός αριθμού συγκεκριμένων “θεμελιωδών” σημάτων τα οποία αποτελούν μια “βάση” για τη δημιουργία ενός “χώρου σημάτων”.
- Μπορούμε επίσης να ορίσουμε, όπως και στα διανύσματα, το εσωτερικό γινόμενο και το μέτρο ενός σήματος.



Σήματα και Διανύσματα – Ορισμοί (1)

- Ως *Μέτρο (Norm)* του σήματος $s(t)$ ορίζεται η τετραγωνική ρίζα της ενέργειας αυτού

$$\|s(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_s} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}. \quad (6.9)$$

- Το *Εσωτερικό Γινόμενο (Inner Product)* δύο -γενικά μιγαδικών- σημάτων $s_1(t)$ και $s_2(t)$ ορίζεται ως

$$\langle s_1, s_2 \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt, \quad \begin{aligned} \langle s_1, s_2 \rangle &= \langle s_1, s_2 \rangle^*, \\ \langle s_1 + s_2, s_3 \rangle &= \langle s_1, s_3 \rangle + \langle s_2, s_3 \rangle \\ \langle a s_1, s_2 \rangle &= a \langle s_1, s_2 \rangle \end{aligned}$$

όπου $s_2^*(t)$ είναι το μιγαδικό συζυγές του $s_2(t)$.



Σήματα και Διανύσματα – Ορισμοί (2)

- Δύο σήματα $s_1(t)$ και $s_2(t)$ ονομάζονται *ορθογώνια* ($s_1 \perp s_2$) αν ικανοποιούν τη σχέση

$$s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow \langle s_1, s_2 \rangle = 0. \quad (6.12)$$

Η προβολή του σήματος $s_1(t)$ στο σήμα $s_2(t)$ είναι

$$s_1 \perp_{s_2} = \left(\frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\|s_2(t)\|^2} \right) s_2(t).$$

Η *Συσχέτιση* δύο σημάτων $s_1(t)$ και $s_2(t)$ εκφράζει ένα μέτρο της ομοιότητας αυτών και δίνεται από τη σχέση

$$\rho_{s_1, s_2} = \frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\|s_1(t)\| \|s_2(t)\|} = \frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\sqrt{\mathcal{E}_{s_1} \mathcal{E}_{s_2}}}. \quad (6.14)$$



Σήματα και Διανύσματα – Ορισμοί (3)

- Η *Ευκλείδεια Απόσταση* μεταξύ δύο σημάτων ορίζεται ως

$$d_{s_1, s_2} = \|s_1(t) - s_2(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_{s_1} + \mathcal{E}_{s_2} - 2\sqrt{\mathcal{E}_{s_1}\mathcal{E}_{s_2}}\text{Re}[\rho_{s_1, s_2}]}.$$

Αν ισχύει $\mathcal{E}_{s_1} = \mathcal{E}_{s_2} = \mathcal{E}$ τότε

$$d_{s_1, s_2} = \sqrt{2\mathcal{E}(1 - \text{Re}[\rho_{s_1, s_2}])}.$$

- *Ανισότητα Cauchy-Schwarz*

$$|\langle s_1, s_2 \rangle| \leq \|s_1(t)\| \|s_2(t)\|.$$

- *Κανόνας Παραλληλογράμμου*

$$\|s_1(t) + s_2(t)\|^2 + \|s_1(t) - s_2(t)\|^2 = 2(\|s_1(t)\|^2 + \|s_2(t)\|^2).$$



Σήματα και Διανύσματα – Ορισμοί (4)

- Πυθαγόρειο Θεώρημα

Αν $s_1 \perp s_2$ τότε

$$\|s_1(t) + s_2(t)\|^2 = \|s_1(t)\|^2 + \|s_2(t)\|^2.$$

i) Ένα σύνολο σημάτων $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ το οποίο ανήκει σε ένα χώρο-σημάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο αν ισχύει

$$\sum_{i=1}^M a_i s_i(t) = 0 \quad (6.20)$$

για κάποια $a_i \neq 0$, με $a_i \in \mathbb{R}$.

Ισοδύναμα, το σύνολο των σημάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο αν ένα από τα σήματα μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων

$$s_i(t) = \sum_{j \neq i} a_j s_j(t). \quad (6.21)$$



Σήματα και Διανύσματα – Ορισμοί (5)

- ii) Το παραπάνω σύνολο σημάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο.
- iii) Διάσταση ενός χώρου-σημάτων είναι το μέγιστο πλήθος των σημάτων που ανήκουν στο χώρο και είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- iv) Ένα σύνολο σημάτων $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$ είναι ορθοκανονικό (*orthonormal*) αν για κάθε ζεύγος ϕ_i, ϕ_j ισχύει

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (6.22)$$

- v) Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν τα σήματα $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους (δηλαδή για κάθε ζεύγος s_i, s_j ισχύει $s_i \perp s_j$) τότε το σύνολο των σημάτων

$$\phi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\|s_i(t)\|} \quad (6.23)$$

είναι ορθοκανονικό.



Σήματα και Διανύσματα - Ορισμοί (6)

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N \langle s_i, \phi_j \rangle \phi_j(t)$$

Το ορθοκανονικό σύνολο σημάτων ονομάζεται *ορθοκανονική βάση* και τα σήματα που το απαρτίζουν *ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης* ή απλά *συναρτήσεις βάσης*.

Οι σταθερές $\langle s_i, \phi_j \rangle$ είναι οι *συντεταγμένες* του σήματος-διανύσματος s_i . Δηλαδή

$$\mathbf{s}_i = \{ \langle s_i, \phi_1 \rangle, \langle s_i, \phi_2 \rangle, \dots, \langle s_i, \phi_N \rangle \} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \\ \mathbf{s}_2 &= \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \langle s_1, s_2 \rangle &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_N\beta_N, \\ \|s_1(t)\| &= \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_N|^2}, \\ d_{s_1, s_2} &= \sqrt{|a_1 - \beta_1|^2 + |a_2 - \beta_2|^2 + \dots + |a_N - \beta_N|^2}. \end{aligned}$$



Παράδειγμα 6.1 (1)

Παράδειγμα 6.1

Θεωρήστε τις κυματομορφές $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$ του Σχήματος 6.2.

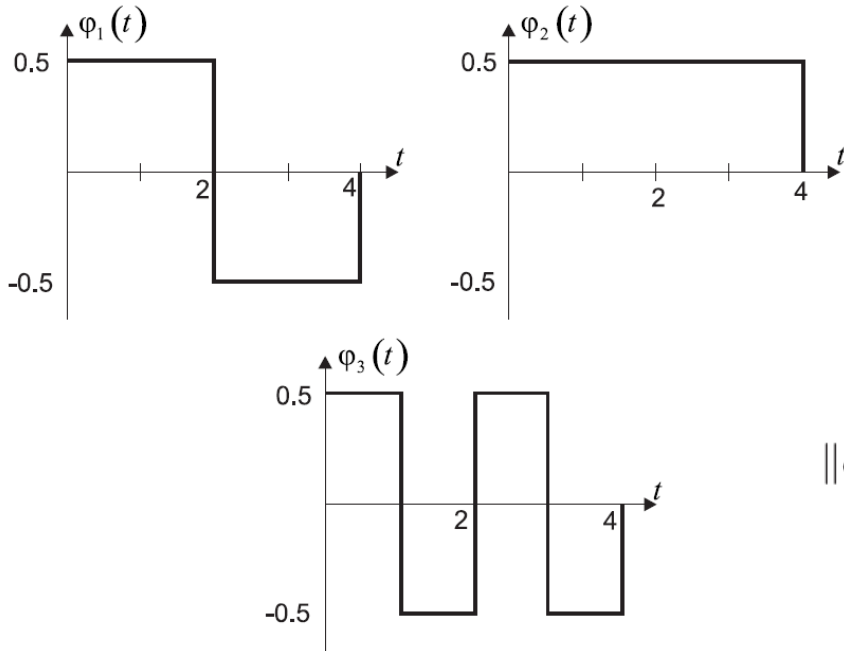
- i. Να δείξετε ότι οι κυματομορφές αυτές αποτελούν μία ορθοκανονική βάση.
- ii. Να εξεταστεί αν η κυματομορφή

$$s(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ +1, & 1 \leq t < 2 \\ +1, & 2 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.28)$$

μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$.



Παράδειγμα 6.1 (2)

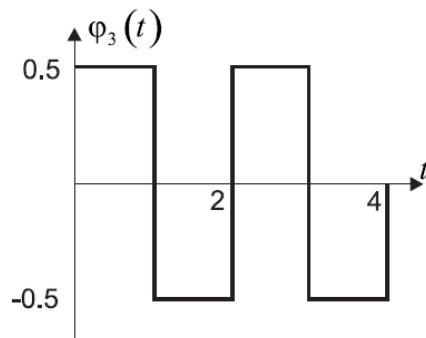
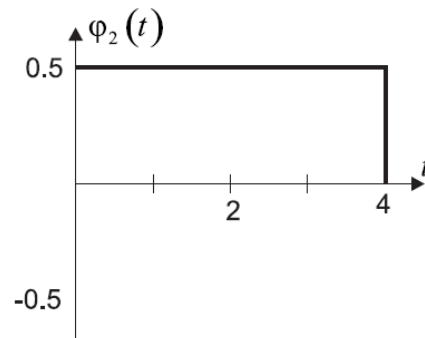
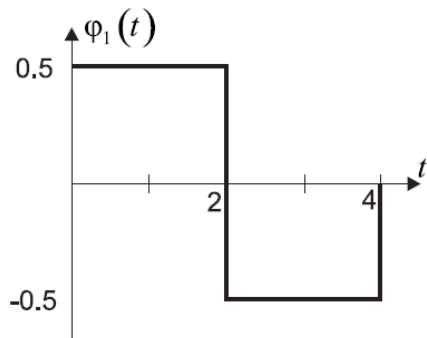


$$\|\phi_n(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_n} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t)|^2 dt} = 1, \quad n \in \{1, 2, 3\}$$

$$\langle \phi_n, \phi_l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) \phi_l(t) dt = 0, \quad n \neq l, \quad (n, l) \in \{1, 2, 3\}$$



Παράδειγμα 6.1 (3)



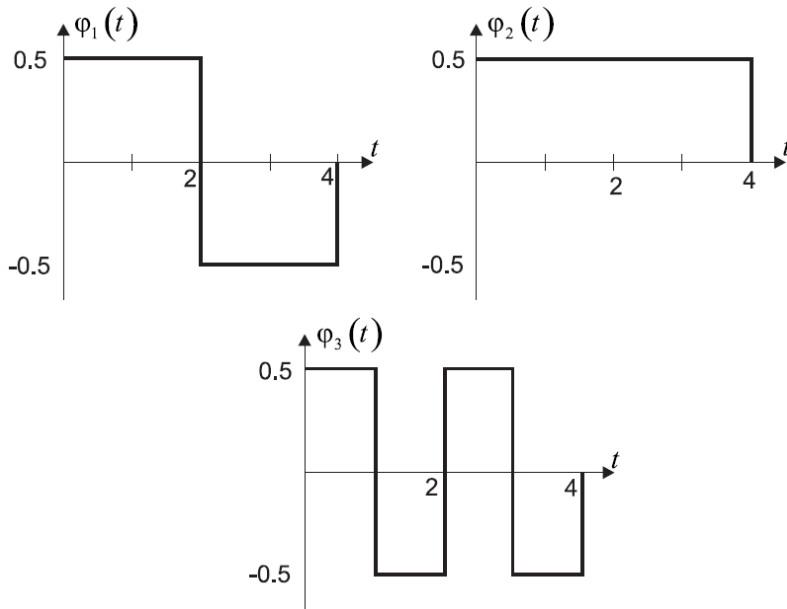
$$\|\phi_1(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_1} = \sqrt{\int_0^4 |\phi_1(t)|^2 dt} = 4 \times 0.5^2 = 1$$

$$\|\phi_2(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_2} = \sqrt{\int_0^4 |\phi_2(t)|^2 dt} = 4 \times 0.5^2 = 1$$

$$\|\phi_3(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_3} = \sqrt{\int_0^4 |\phi_3(t)|^2 dt} = 4 \times 0.5^2 = 1$$



Παράδειγμα 6.1 (4)



$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_0^4 \phi_1(t)\phi_2(t)dt = \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}dt = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \phi_3 \rangle &= \int_0^4 \phi_1(t)\phi_3(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_1^2 \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)dt \\ &+ \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}dt + \int_3^4 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_2, \phi_3 \rangle &= \int_0^4 \phi_2(t)\phi_3(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_1^2 \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)dt \\ &+ \int_2^3 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_3^4 \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = 0. \end{aligned}$$



Παράδειγμα 6.1 (5)

$$\begin{aligned}\langle s, \phi_1 \rangle &= \int_0^4 s(t)\phi_1(t)dt \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{2}dt + \int_1^2 \frac{1}{2} + \int_2^3 -\frac{1}{2} + \int_3^4 \frac{1}{2} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle s, \phi_2 \rangle &= \int_0^4 s(t)\phi_2(t)dt \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{2}dt + \int_1^2 \frac{1}{2}dt + \int_2^3 \frac{1}{2}dt + \int_3^4 -\frac{1}{2}dt = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle s, \phi_3 \rangle &= \int_0^4 s(t)\phi_3(t)dt \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{2}dt + \int_1^2 -\frac{1}{2}dt + \int_2^3 \frac{1}{2}dt + \int_3^4 \frac{1}{2}dt = 0.\end{aligned}$$



Διαδικασία ορθογωνοποίησης σημάτων Gram-Schmidt (1)

Βήμα 1: Ορίζεται ως $g_1(t) = s_1(t)$, οπότε η πρώτη συνάρτηση βάσης είναι

$$\phi_1(t) = \frac{g_1(t)}{\|g_1(t)\|}, \quad \|g_1(t)\| \neq 0. \quad (6.40)$$

Βήμα 2: Ορίζεται ως $g_2(t) = s_2(t) - \phi_1(t) \langle s_2, \phi_1 \rangle$, οπότε η δεύτερη συνάρτηση βάσης θα είναι

$$\phi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\|g_2(t)\|}, \quad \|g_2(t)\| \neq 0. \quad (6.41)$$

Βήμα k : Με τον ίδιο τρόπο στο k -στό βήμα ορίζεται

$$g_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i(t) \langle s_k, \phi_i \rangle \quad (6.42)$$

$$\phi_k(t) = \frac{g_k(t)}{\|g_k(t)\|}, \quad \|g_k(t)\| \neq 0$$



Διαδικασία ορθογωνοποίησης σημάτων Gram-Schmidt (2)

Η διαδικασία συνεχίζεται για όλα τα υπόλοιπα σήματα έως το $s_M(t)$. Από αυτά μόνο εκείνα που είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή ισχύει $\|g_k(t)\| \neq 0$, συμμετέχουν στη δημιουργία μίας νέας συνάρτησης βάσης.

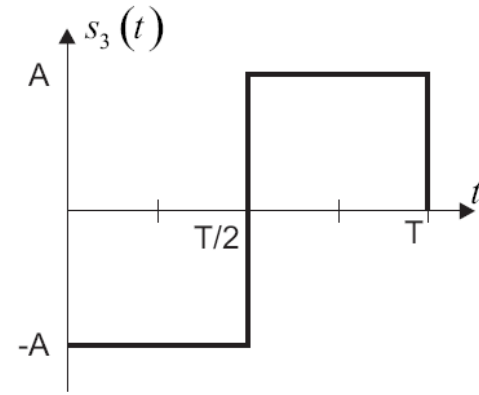
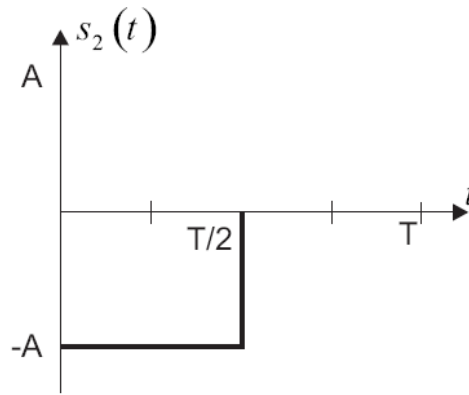
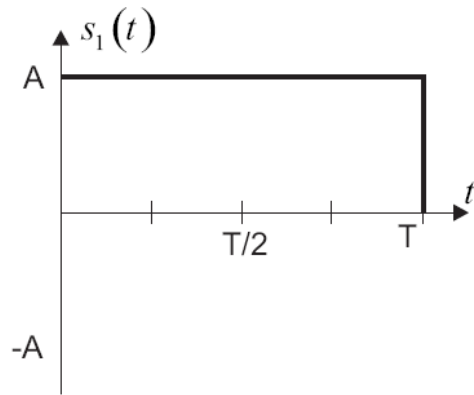
Ο συνολικός αριθμός $N \leq M$ των συναρτήσεων βάσης που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία σχηματίζουν μία N -διάστατη βάση στο χώρο των M σημάτων.

Σημειώστε ότι η διάσταση του χώρου θα είναι ίση με M μόνο αν όλα τα σήματα $s_1(t), \dots, s_M(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.



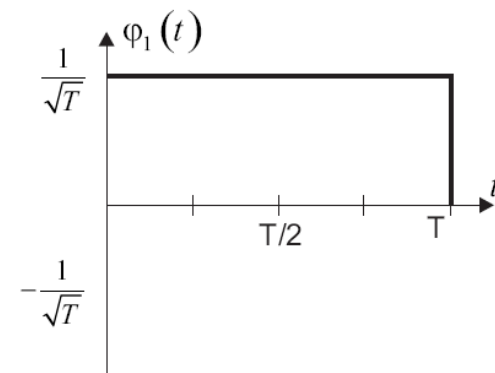
Παράδειγμα 6.2 (1)

Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο Gram-Schmidt για να βρείτε τις ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης του χώρου των σημάτων $s_1(t)$, $s_2(t)$ και $s_3(t)$ του



Βήμα 1: Εύρεση της πρώτης συνάρτησης βάσης

$$\phi_1(t) = \frac{g_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} = \frac{s_1(t)}{A\sqrt{T}},$$



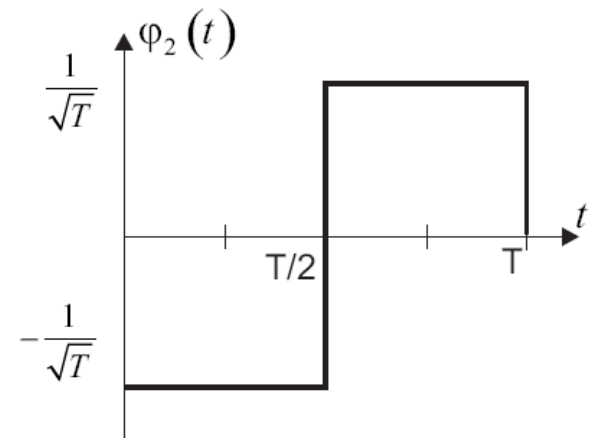
Παράδειγμα 6.2 (2)

Βήμα 2: Εύρεση της δεύτερης συνάρτησης βάσης

$$\phi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\|g_2(t)\|},$$

$$\begin{aligned} g_2(t) &= s_2(t) - \langle s_2, \phi_1 \rangle \phi_1(t) = \\ &= \begin{cases} -A - \left(-\frac{A}{2}\sqrt{T}\right) \frac{1}{\sqrt{T}} \\ 0 - \left(-\frac{A}{2}\sqrt{T}\right) \frac{1}{\sqrt{T}} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{A}{2}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ +\frac{A}{2}, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g_2(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{A}{2}\right)^2 \frac{T}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 \frac{T}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{A^2 T}{4}} = \frac{A}{2} \sqrt{T}. \end{aligned}$$



Παράδειγμα 6.2 (3)

Βήμα 3: Εύρεση της τρίτης συνάρτησης βάσης

$$\phi_3(t) = \frac{g_3(t)}{\sqrt{\|g_3(t)\|}},$$

$$\begin{aligned} g_3(t) &= s_3(t) - \langle s_3, \phi_1 \rangle \phi_1(t) - \langle s_3, \phi_2 \rangle \phi_2(t) = \\ &= \begin{cases} -A - A\sqrt{T} \frac{-1}{\sqrt{T}}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A - A\sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \end{aligned}$$



Δύο συναρτήσεις βάσης

$$\phi_1(t) \quad \phi_2(t)$$



Αστερισμοί (1)

Ένα σύνολο M διανυσμάτων, τα οποία ανήκουν σε ένα γεωμετρικό-διανυσματικό χώρο ονομάζεται *αστερισμός* (*constellation*). Αντίστοιχα, ένα σύνολο σημάτων δημιουργεί το δικό του αστερισμό

- Κάθε σήμα αναπαρίσταται με ένα σημείο του αστερισμού και αντιστοιχεί σε μια διαφορετική κυματομορφή. Όλες οι κυματομορφές ανήκουν στην ίδια ορθοκανονική βάση και μοιράζονται τις ίδιες συναρτήσεις βάσης.
- Η μέση ενέργεια ενός αστερισμού σημάτων δίνεται από τη σχέση,

$$\mathcal{E}_s = \sum_{i=1}^M \|\mathbf{s}_i\|^2 \Pr(\mathbf{s}_i), \quad (1.50)$$

όπου, $\|\mathbf{s}_i\|^2 = \sum_{j=1}^N s_{ij}^2$ με s_{ij} την j -συνιστώσα του i -στου σήματος και $\Pr(\mathbf{s}_i)$ είναι η a-priori πιθανότητα εμφάνισης αυτού στον αστερισμό.



Αστερισμοί (2)

- Η ελαχιστοποίηση της E_s με σκοπό την εξοικονόμηση ενέργειας εκπομπής, απαιτεί την τοποθέτηση των σημείων του αστερισμού όσο το δυνατόν πλησιέστερα στο σημείο $[0, 0, \dots, 0]$. Όμως, η προσέγγιση των σημείων έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της Ευκλείδειας απόστασης, η οποία -όπως θα αναφερθεί στη συνέχεια- αποτελεί κρίσιμη παράμετρο του συστήματος αφού συνδέεται με την πιθανότητα σφάλματος.

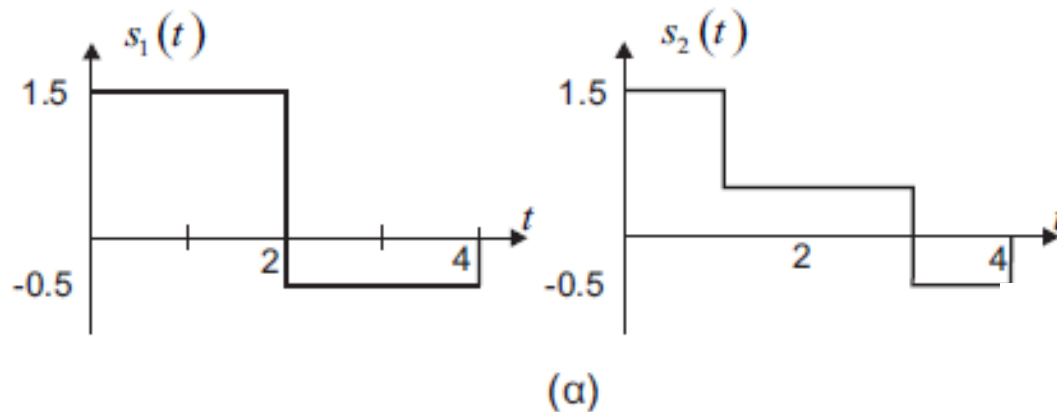
Το γεωμετρικό πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης σημείων σε αστερισμό με περιορισμούς στη μέση ενέργεια και στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως πρόβλημα *sphere-packing*. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην περίφημη εργασία του C. E. Shannon, “A Mathematical Theory of Communication”, Bell System Technical Journal.



Παράδειγμα 6.3

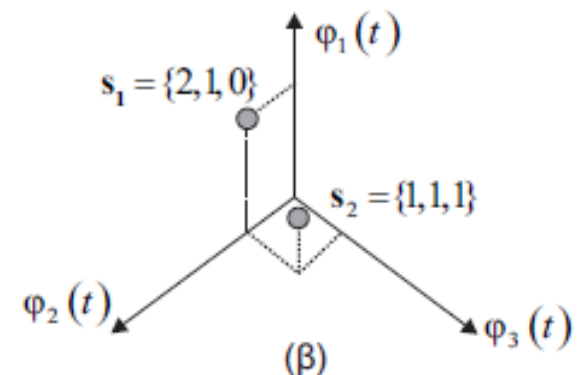
Παράδειγμα 6.3

Να εξετάσετε αν τα σήματα του Σχήματος 6.4α ανήκουν στο χώρο-σημάτων με συναρτήσεις βάσης αυτές του Παραδείγματος 6.1. Αν η απάντηση είναι καταφατική να σχεδιάσετε τον αστερισμό τους.



$$s_1(t) = (+2) \times \phi_1(t) + (+1) \times \phi_2(t) + 0 \times \phi_3(t),$$

$$s_2(t) = (+1) \times \phi_1(t) + (+1) \times \phi_2(t) + (+1) \times \phi_3(t).$$



Παράδειγμα 6.4

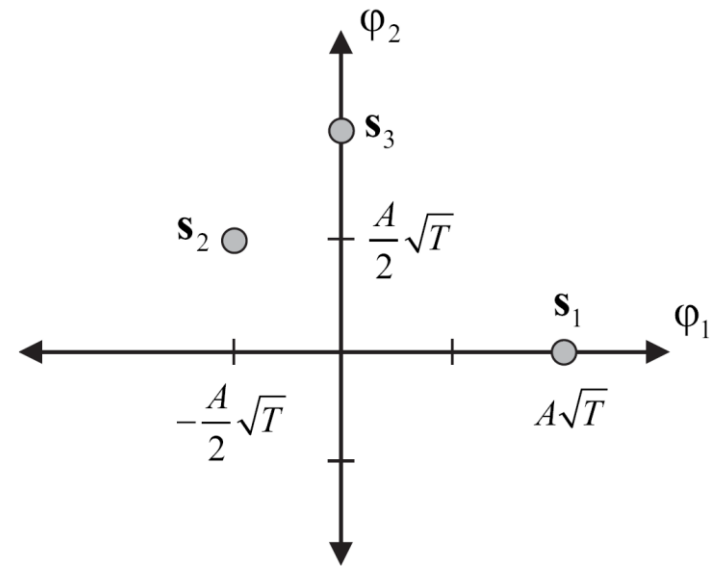
Παράδειγμα 6.4

Να σχεδιάσετε τον αστερισμό των σημάτων $s_1(t)$, $s_2(t)$ και $s_3(t)$ του Παραδείγματος 6.2.

$$\mathbf{s}_1 = (A\sqrt{T}) \times \phi_1 + 0 \times \phi_2$$

$$\mathbf{s}_2 = \left(-\frac{A}{2}\sqrt{T}\right) \times \phi_1 + \left(+\frac{A}{2}\sqrt{T}\right) \times \phi_2$$

$$\mathbf{s}_3 = 0 \times \phi_1 + (A\sqrt{T}) \times \phi_2$$



Παράδειγμα 6.5

Παράδειγμα 6.5

Για τα σήματα

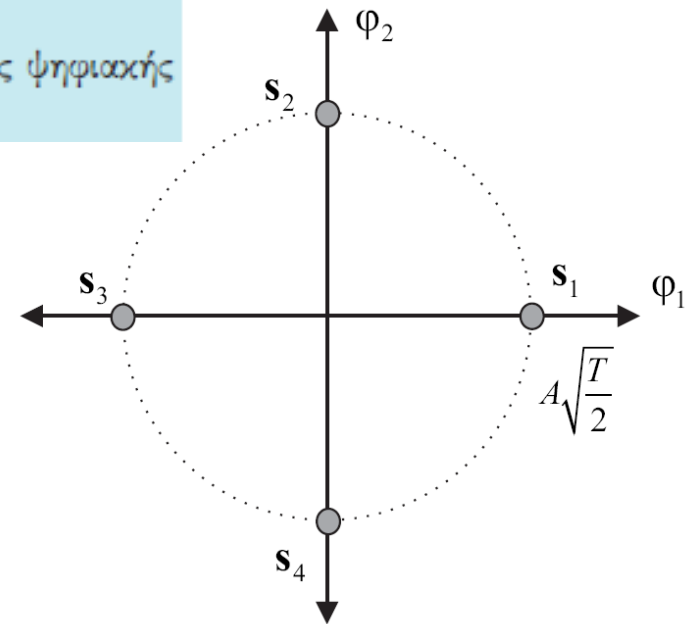
$$s_i(t) = A \cos \theta_i \cos 2\pi f_c t - A \sin \theta_i \sin 2\pi f_c t \quad (6.56)$$
$$t \in [0, T], \theta_i = 2\pi \frac{i-1}{M}, i = 1, 2, \dots, M$$

να βρεθούν οι συναρτήσεις βάσης του χώρου-σημάτων και κατόπιν να σχεδιαστεί ο αστερισμός τους, όταν $i = 1, 2, 3, 4$.

Σημειώστε ότι τα σήματα αυτά ανήκουν στους αστερισμούς της ψηφιακής διαμόρφωσης QPSK η οποία εξετάζεται στη συνέχεια.

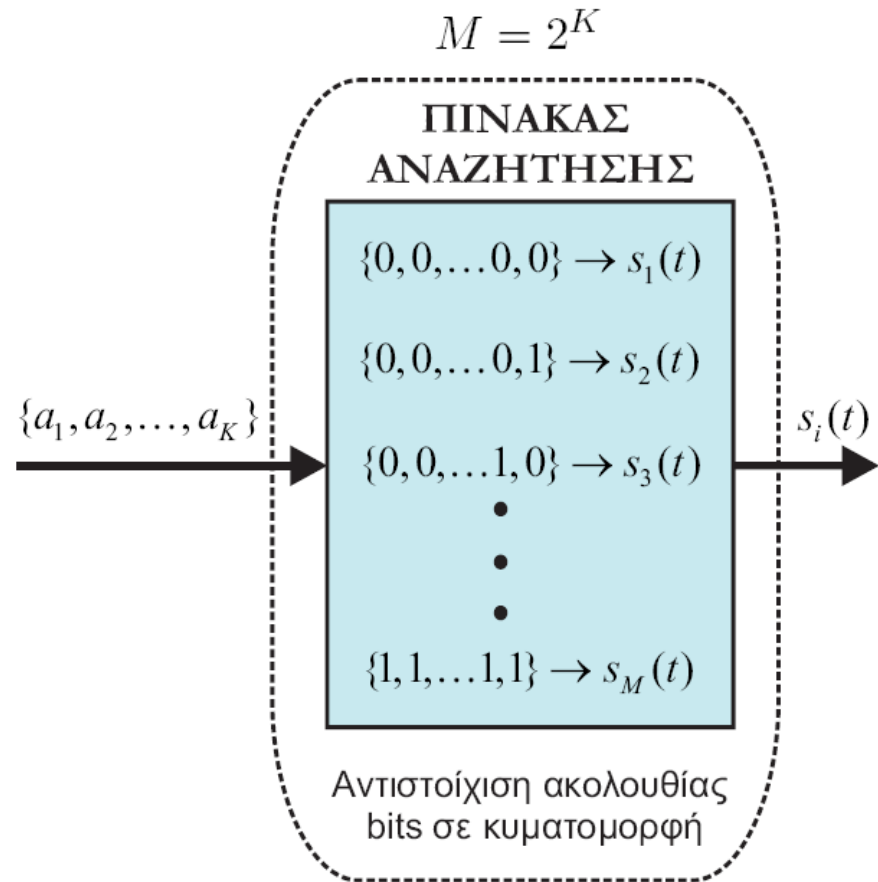
$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t, \phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t$$

$$\mathbf{s}_i = \left\{ A\sqrt{\frac{T}{2}} \cos \theta_i, A\sqrt{\frac{T}{2}} \sin \theta_i \right\}$$

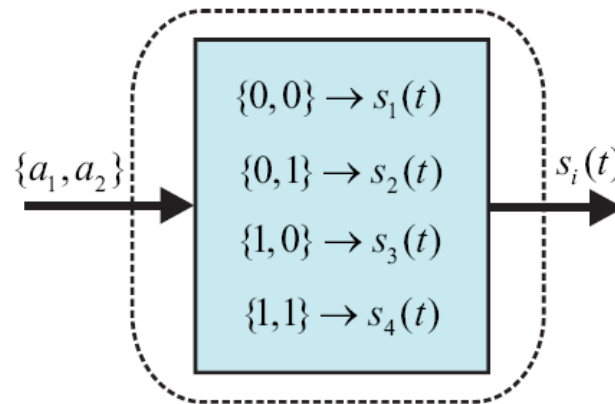
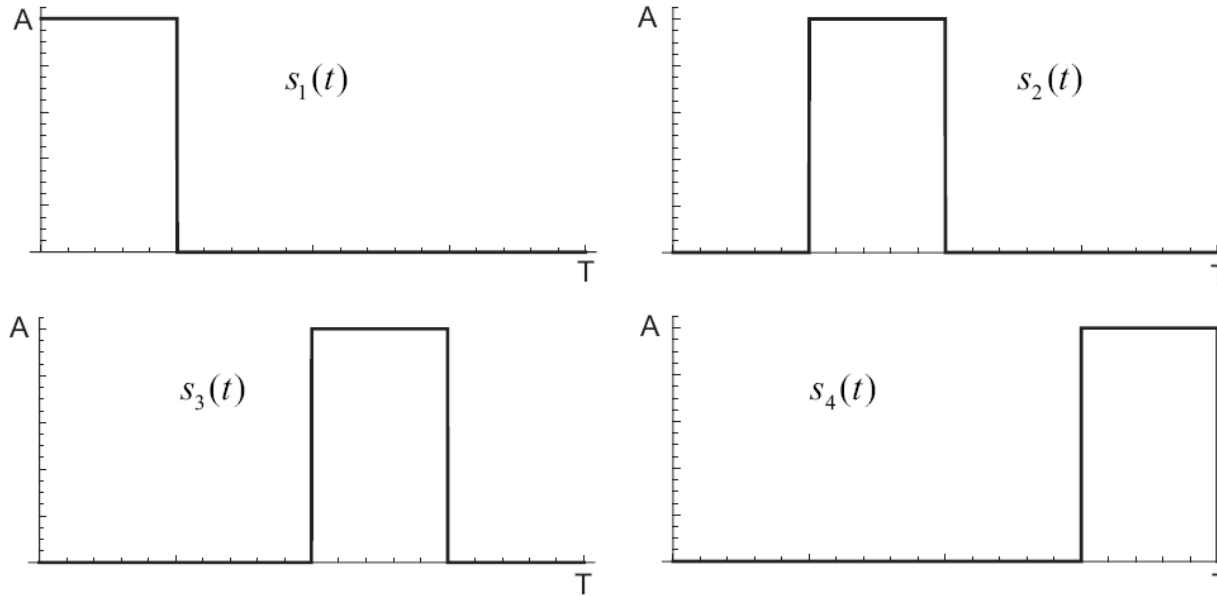


Πίνακας αναζήτησης (Lookup Table)

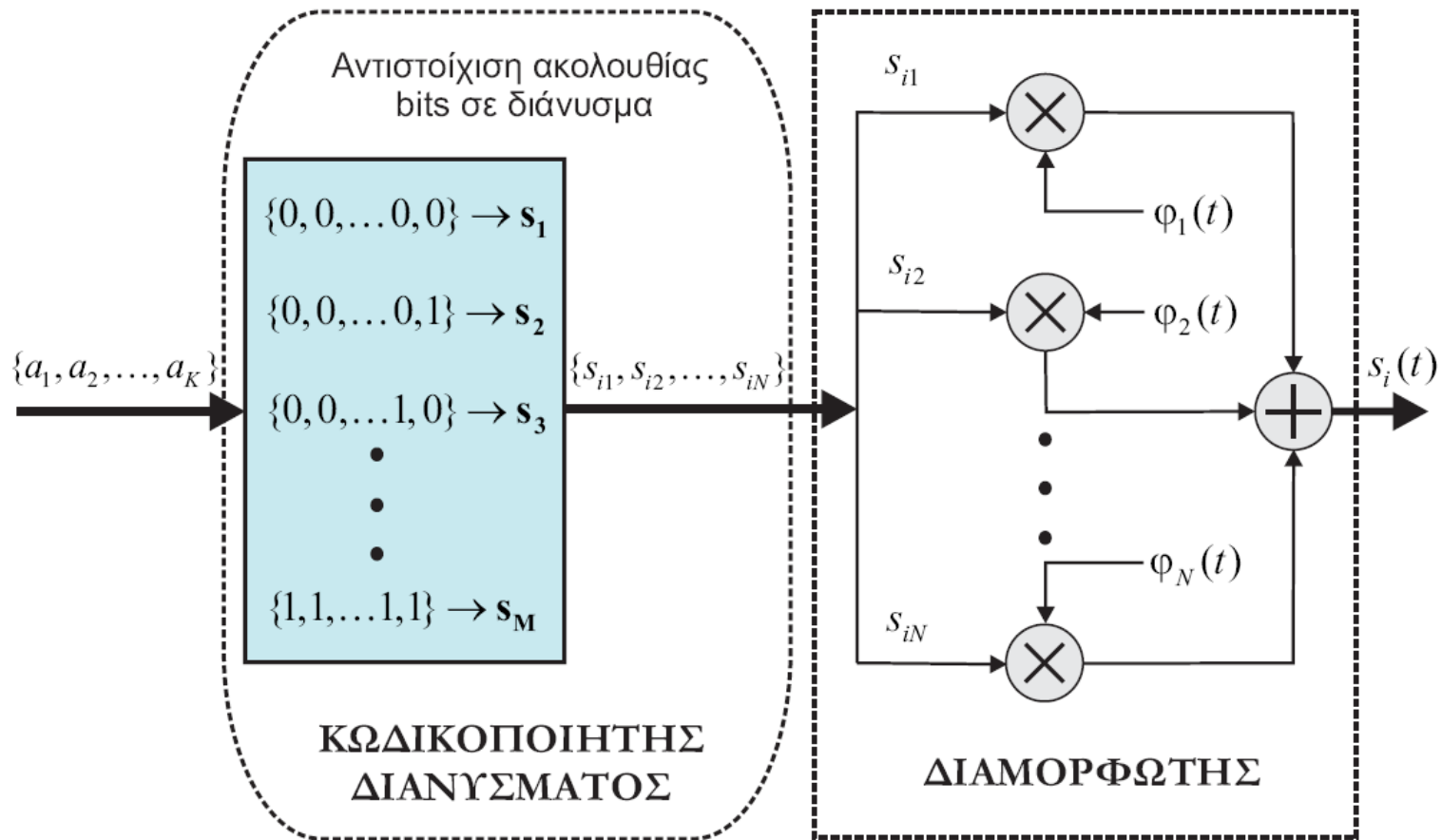
Επίπεδο	Natural Binary Code				Folded Binary Code				Inverted Folded Binary Code				Gray Code				
	b_4	b_3	b_2	b_1									g_4	g_3	g_2	g_1	
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
14	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
12	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
11	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0



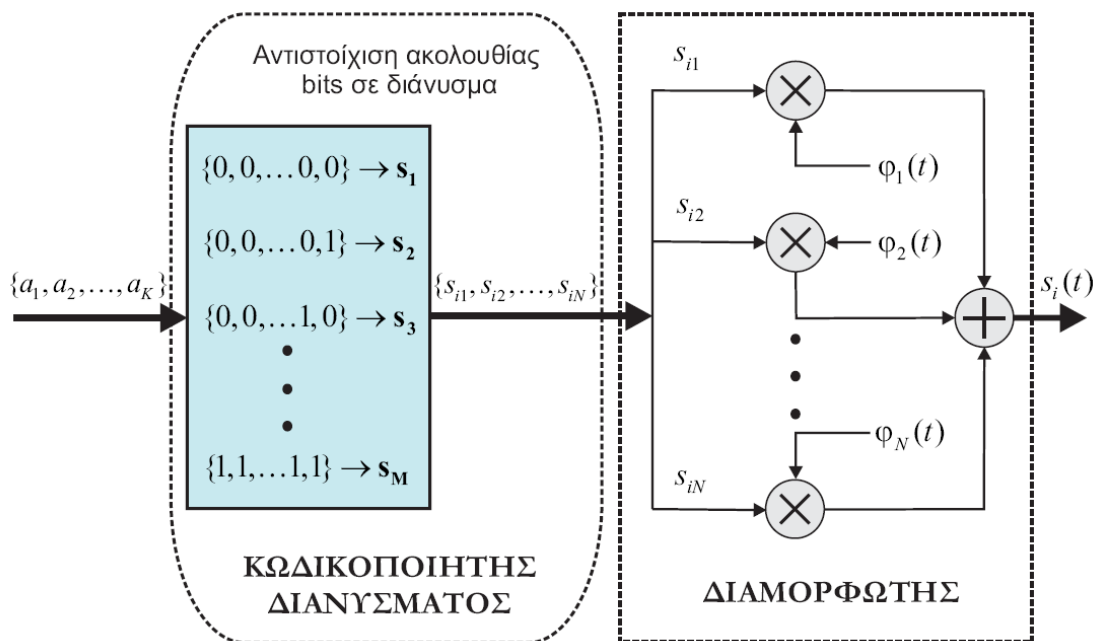
Πίνακας αναζήτησης (Παράδειγμα 6.6)



Ψηφιακός Πομπός (1)



Ψηφιακός Πομπός (2)



- *Κωδικοποιητής Διανύσματος (Vector Encoder)*. Αντιστοιχεί μία ακολουθία από K bits σε ένα σύμβολο².
- *Διαμορφωτής (Modulator)*. Λαμβάνει στην είσοδο την έξοδο του κωδικοποιητή διανύσματος και συνθέτει την εκπεμπόμενη κυματομορφή $s_i(t)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση

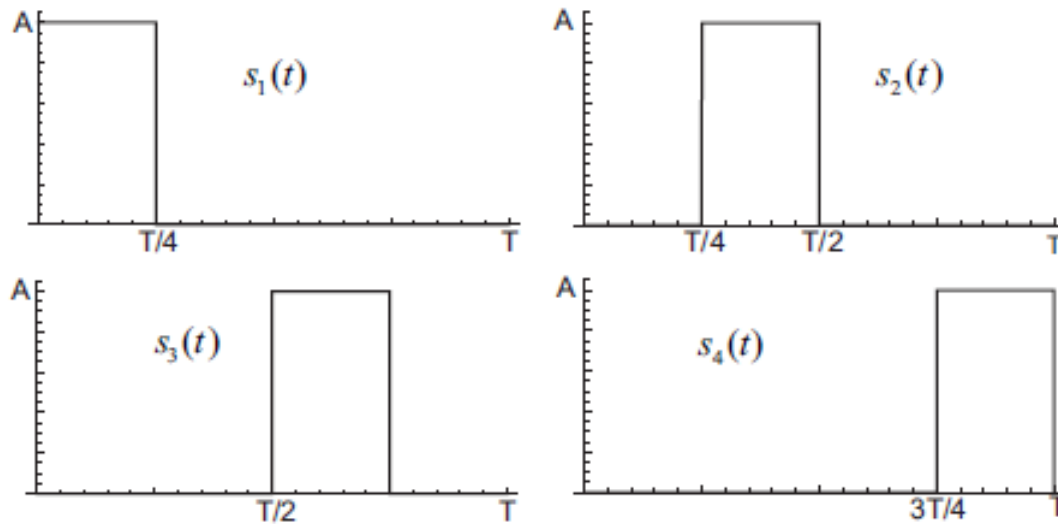
$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \phi_j(t)$$



Παράδειγμα 6.6 (1)

Παράδειγμα 6.6

Να σχεδιαστεί ο πίνακας αναζήτησης για τις κυματομορφές του Σχήματος 6.9. Οι συγκεκριμένες κυματομορφές χρησιμοποιούνται για την τετραδική διαμόρφωση θέσης παλμού (4-PPM) η οποία θα παρουσιαστεί με λεπτομέρεια στο Κεφ. 7.



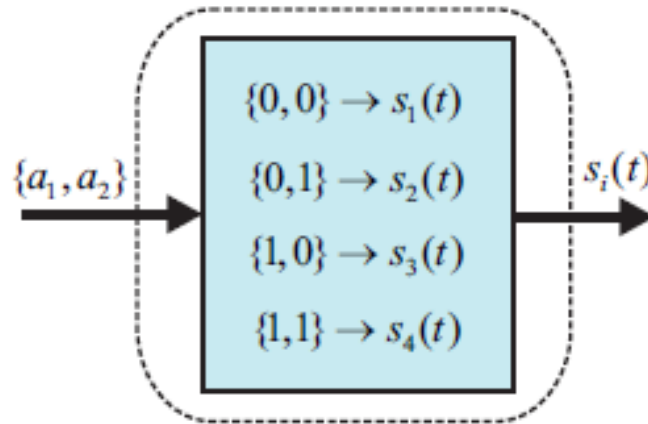
Παράδειγμα 6.6 (2)

Απάντηση

Επειδή δίνονται τέσσερις κυματομορφές, $M = 4$ και ο αριθμός των bits που αντιστοιχούν σε κάθε μία από αυτές θα είναι

$$K = \log_2 M = \log_2 4 = 2. \quad (6.60)$$

Ο ζητούμενος πίνακας αναζήτησης φαίνεται στο Σχήμα 6.10.

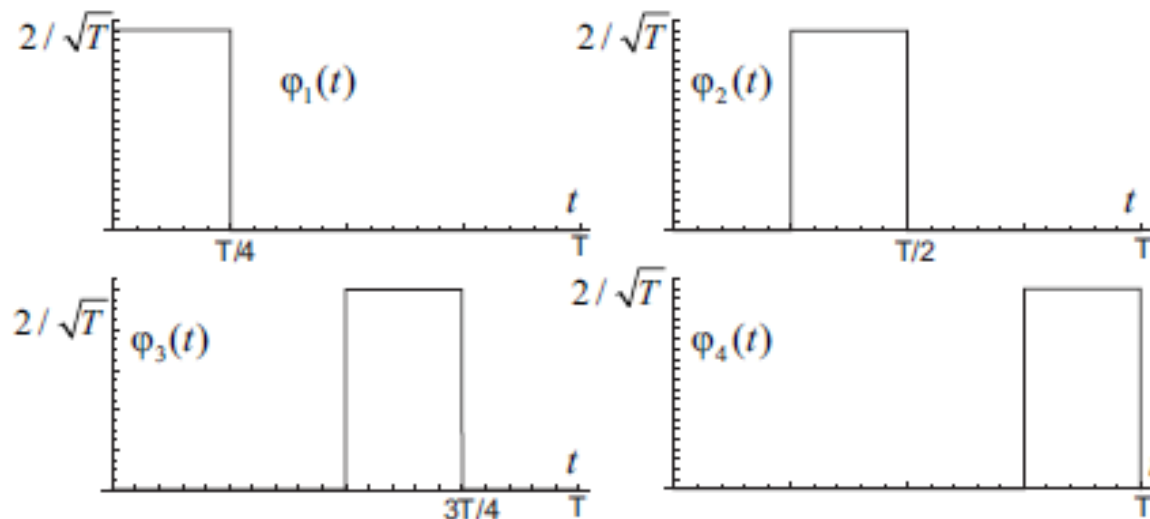


Σχήμα 6.10: Πίνακας αναζήτησης (Παράδειγμα 6.6)

Παράδειγμα 6.7

Παράδειγμα 6.7

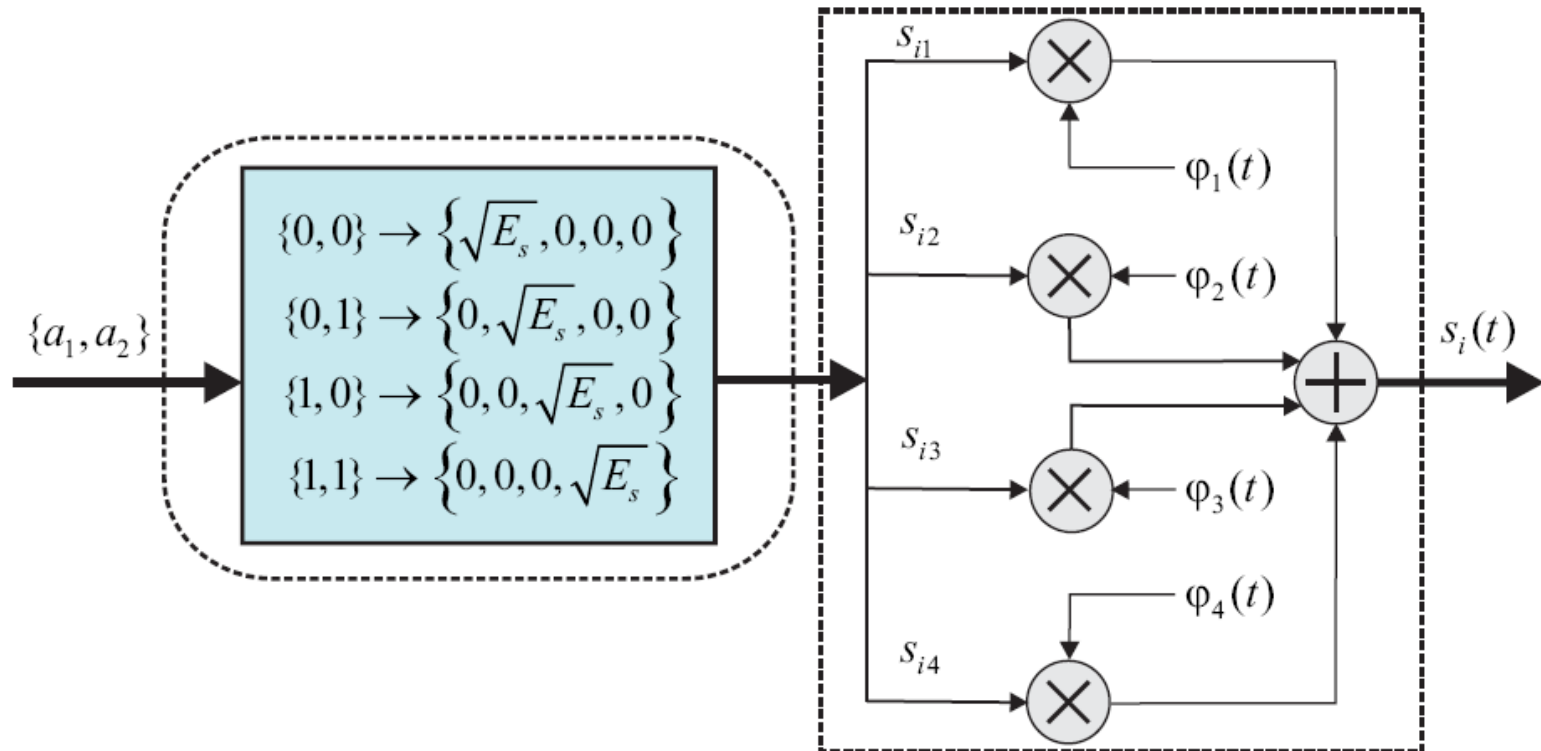
Να σχεδιαστεί το δομικό διάγραμμα ψηφιακής εκπομπής για την τεχνική διαμόρφωσης του Παραδείγματος 6.6.



Σχήμα 6.11: Συναρτήσεις βάσης (Παράδειγμα 6.7)



Ψηφιακός Πομπός (Παράδειγμα 6.7)



Παράδειγμα 6.8 (1)

Παράδειγμα 6.8

Το ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα Integrated Services Digital Network (ISDN) χρησιμοποιεί τέσσερις κυματομορφές για την εκπομπή δύο bits σε χρόνο T sec. Οι κυματομορφές ανήκουν σε χώρο με μία ορθοκανονική συνάρτηση βάσης

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{sinc} \frac{t}{T}, \quad (6.61)$$

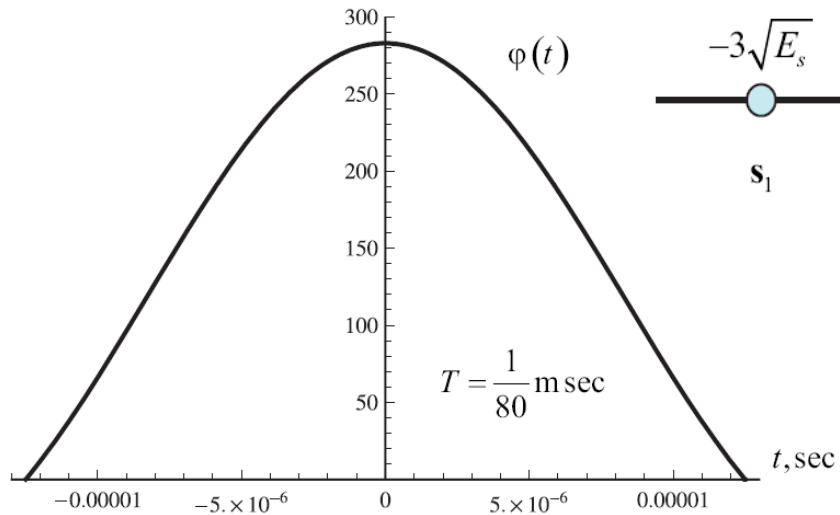
όπου $\frac{1}{T} = 80 \text{ KHz}$.

Ο χρησιμοποιούμενος αστερισμός φαίνεται στο Σχήμα 6.13, ενώ η $\phi(t)$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 6.14.



Παράδειγμα 6.8 (2)

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$



Παράδειγμα 6.9 (1)

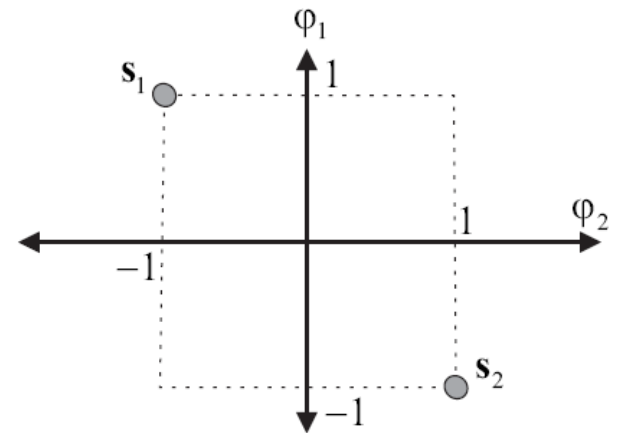
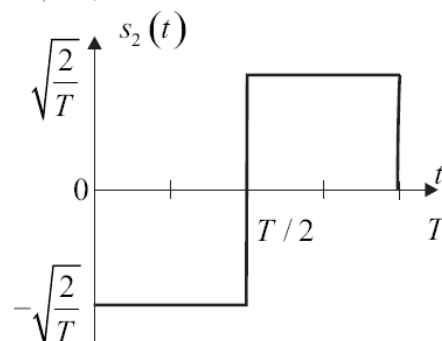
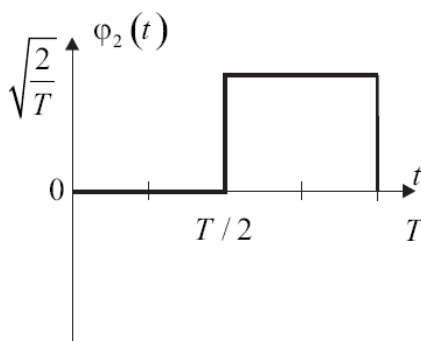
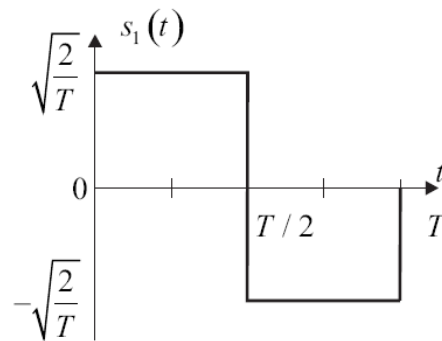
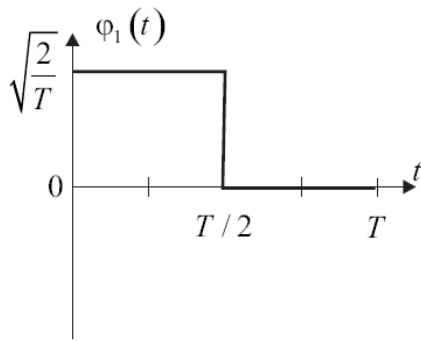
Παράδειγμα 6.9

Το γνωστό πρωτόκολλο επικοινωνίας υπολογιστών Ethernet αλλά και τα συστήματα αποθήκευσης σε σκληρό δίσκο που ακολουθούν το πρότυπο FM code, χρησιμοποιούν για την εκπομπή τα σήματα $s_1(t)$, $s_2(t)$ και τις συναρτήσεις βάσης $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ του Σχήματος 6.15.

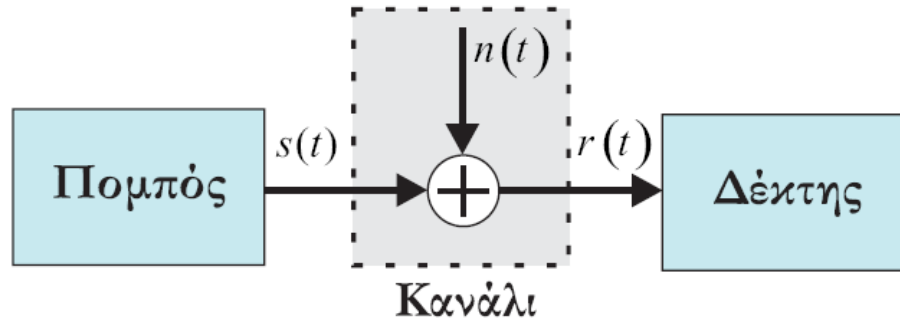
Τα σήματα αυτά είναι γνωστά ως κώδικας *Manchester*. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάζεται και ο αστερισμός του χώρου των δύο σημάτων.



Παράδειγμα 6.9 (2)



Το κανάλι προσθετικού θορύβου



$$r(t) = s(t) + n(t)$$



Το κανάλι προσθετικού θορύβου - Ιδιότητες

- Λευκός Θόρυβος

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}, \quad f \in (-\infty, +\infty)$$

- Άπειρη ισχύς

- Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_n(\tau) \triangleq \mathcal{F}^{-1}[S_n(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- Το πλάτος Gaussian

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} \right) = 1 - Q \left(\frac{x}{\sigma} \right)$$



Παράδειγμα 6.10 (1)

Να δείξετε ότι το πλάτος του σήματος στην έξοδο ενός συσχετιστή με εισόδους τη διαδικασία $n(t)$ και μία ορθοκανονική συνάρτηση βάσης $\phi(t)$ ακολουθεί Gaussian κατανομή με μέση τιμή ίση με μηδέν και διακύμανση $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. Επίσης να βρεθεί η ισχύς του σήματος εξόδου.



Παράδειγμα 6.10 (2)

Έστω n το πλάτος του σήματος στην έξοδο του συσχετιστή. Τότε θα ισχύει

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)\phi(t)dt. \quad (6.70)$$

Η τυχαία μεταβλητή n ακολουθεί Gaussian κατανομή, αφού προκύπτει ως γραμμικός μετασχηματισμός της Gaussian διαδικασίας $n(t)$ με το αιτιοκρατικό σήμα $\phi(t)$.

$$\mathbb{E}[(n - 0)^2] = \mathbb{E}[n^2] = \mathbb{E} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} n(t)\phi(t)dt \right)^2 \right]$$



Παράδειγμα 6.10 (3)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(n - 0)^2] &= \mathbf{E}[n^2] = \mathbf{E} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} n(t) \phi(t) dt \right)^2 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \phi(\tau) n(t) \phi(t) d\tau dt \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\{n(\tau)n(t)\} \phi(\tau)\phi(t) d\tau dt && (6.71) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(t - \tau) \phi(\tau)\phi(t) d\tau dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(\tau) d\tau = \frac{N_0}{2},\end{aligned}$$



Το κανάλι προσθετικού θορύβου - Σχόλια

- Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, το κανάλι είναι σχεδόν αποκλειστικά κανάλι θορύβου, οπότε μπορεί να προσεγγιστεί με ακρίβεια από το μοντέλο του AWGN. Τέτοιες εφαρμογές είναι οι επίγειες μικροκυματικές ζεύξεις, οι δορυφορικές επικοινωνίες (σε καλές καιρικές συνθήκες) και οι επικοινωνίες ευρείας ζώνης σε ομοαξονικά καλώδια.
- Στις υπόλοιπες περιπτώσεις καναλιών στις οποίες παρουσιάζονται και άλλα φαινόμενα όπως διαλείψεις (fading), πολλαπλές οδεύσεις (multipath), περιορισμένο εύρος ζώνης, κ.λ.π, ο θόρυβος συνεχίζει να είναι παρών και να μοντελοποιείται σαν AWGN.
- Από το προηγούμενο συνάγεται ότι το κανάλι AWGN είναι η καλύτερη περίπτωση καναλιού στις τηλεπικοινωνίες, οπότε η επίδοση ενός συστήματος σε AWGN αποτελεί ένα άνω όριο της επίδοσης όταν υπάρχουν και άλλα φαινόμενα που την επηρεάζουν αρνητικά. Δηλαδή, δεν μπορεί να υπάρξει επίδοση καλύτερη από αυτή που υπολογίζεται για επικοινωνία με παρουσία αποκλειστικά AWGN. Το σημαντικό αυτό συμπέρασμα χρησιμοποιείται για σύγκριση και αξιολόγηση των επιδόσεων διαφόρων τεχνικών διαμόρφωσης ή/και κωδικοποίησης.



Ψηφιακός Δέκτης

Σκοπός του Ψηφιακού Δέκτη (*Digital Receiver*) είναι η ανάκτηση της ακολουθίας των bits που εκπέμφθηκαν από τον πομπό.

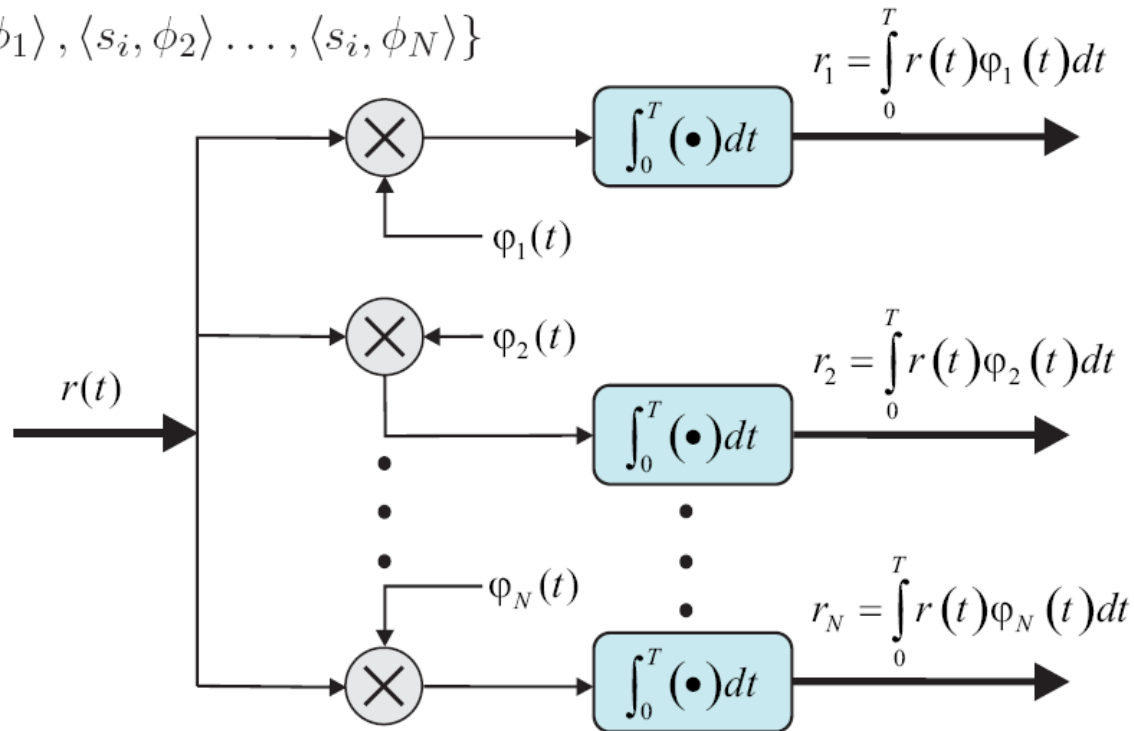
- Αποδιαμόρφωση (demodulation)
 - Αποδιαμορφωτής συσχέτισης
 - Αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων
- Ανίχνευση (detection)

Αποδιαμόρφωση (*demodulation*) είναι η αντίστροφη διαδικασία από αυτή του διαμορφωτή στον πομπό, δηλαδή η εύρεση του διανύσματος $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ το οποίο αντιστοιχεί στη λαμβανόμενη κυματομορφή $r(t)$.



Αποδιαμόρφωση συσχέτισης (1)

$$\mathbf{s}_i = \{ \langle s_i, \phi_1 \rangle, \langle s_i, \phi_2 \rangle \dots, \langle s_i, \phi_N \rangle \}$$



$$r_j = \langle r, \phi_j \rangle = \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt + \int_0^T n(t) \phi_j(t) dt = s_{ij} + n_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$n_j = \int_0^T n(t) \phi_j(t) dt$$



Αποδιαμόρφωση συσχέτισης (2)

$$r_j = \langle r, \phi_j \rangle = \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt + \int_0^T n(t) \phi_j(t) dt = s_{ij} + n_j, j = 1, 2, \dots, N$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

$$\mathbb{E}[r_j] = s_{ij} \quad \sigma_r^2 = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$$

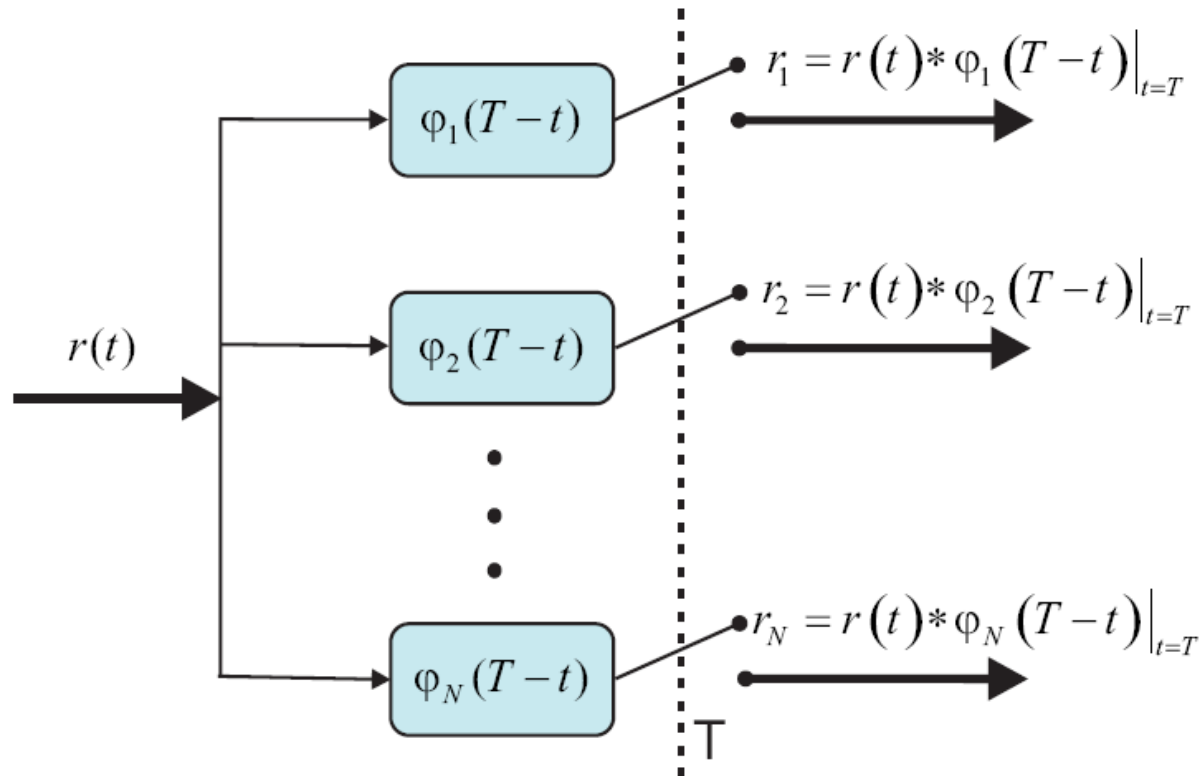
$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i) = \prod_{j=1}^N f(r_j|s_{ij})$$

$$f(r_j|s_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r_j - s_{ij})^2}{N_0}}$$

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i) = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^N (r_j - s_{ij})^2}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0}}$$



Αποδιαμόρφωση με προσαρμοσμένα φίλτρα



Προσαρμοσμένο φίλτρο $y(t) \Rightarrow y(T-t)$



Αποδιαμόρφωση με προσαρμοσμένα φίλτρα - Ιδιότητες

- Ένα προσαρμοσμένο φίλτρο στο σήμα $s(t)$ μεγιστοποιεί το SNR της εξόδου του δέκτη
- Τα προσαρμοσμένα φίλτρα του σχήματος μεγιστοποιούν το SNR εξόδου, αν η δειγματοληψία πραγματοποιηθεί την $t=T$.
- Ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων είναι ισοδύναμος με τον αποδιαμορφωτή συσχέτισης.



Παράδειγμα 6.11 (1)

Παράδειγμα 6.11

Να δείξετε ότι ένα προσαρμοσμένο φίλτρο στο σήμα $s(t)$ μεγιστοποιεί το SNR της εξόδου ενός δέκτη που λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με ΦΠ $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$. Κατόπιν με βάση την ιδιότητα αυτή να δείξετε ότι τα προσαρμοσμένα φίλτρα του Σχήματος 6.18 μεγιστοποιούν το SNR εξόδου, αν η δειγματοληψία πραγματοποιηθεί τη χρονική στιγμή $t = T$.

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad \mathcal{P}_s = [s(t) * h(t)|_{t=T}]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)h(T-t)dt \right]^2 \\ = [\langle s(t), h(T-t) \rangle]^2.$$

$$\gamma = \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_n}$$

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i \phi_i(t)$$

Παράδειγμα 6.11 (2)

Υποθέτουμε ότι έχει σταλεί η κυματομορφή $s(t)$, οπότε στο δέκτη θα ληφθεί το σήμα

$$r(t) = s(t) + n(t). \quad (6.82)$$

Το SNR στην έξοδο του ζητούμενου φίλτρου $h(t)$ θα είναι

$$\gamma = \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_n}, \quad (6.83)$$

όπου \mathcal{P}_s και \mathcal{P}_n είναι η (κανονικοποιημένη) ισχύς του σήματος και η ισχύς του θορύβου αντίστοιχα. Τότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s &= |s(t) * h(t)|_{t=T}^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)h(T-t)dt \right]^2 \\ &= |\langle s(t), h(T-t) \rangle|^2. \end{aligned} \quad (6.84)$$



Παράδειγμα 6.11 (3)

Ο θόρυβος στην έξοδο του φίλτρου μετά τη δειγματοληψία θα έχει ισχύ

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n &= \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} n(t_1)h(T-t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} n(t_2)h(T-t_2)dt_2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(t_1-t_2)h(T-t_1)h(T-t_2)dt_1dt_2 \quad (6.85) \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(T-t_1)dt_1 = \frac{N_0}{2} \|h(t)\|^2.\end{aligned}$$



Παράδειγμα 6.11 (4)

Από τις (6.83), (6.84) και (6.85)

$$\gamma = \frac{2 [\langle s(t), h(T-t) \rangle]^2}{N_0 \|h(t)\|^2} = \frac{2 [\langle h(t), s(T-t) \rangle]^2}{N_0 \|h(t)\|^2}. \quad (6.86)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz (σχέση (6.17)) προκύπτει

$$[\langle h(t), s(T-t) \rangle]^2 \leq \|h(t)\|^2 \|s(t)\|^2 \quad (6.87)$$

και η ισότητα θα ισχύει μόνο όταν

$$h(t) = bs(T-t), \quad (6.88)$$

όπου το b είναι μία τυχαία σταθερά.

Έτσι η (6.86) μεγιστοποιείται όταν

$$h(t) = s(T-t), \quad (6.89)$$

δηλαδή το $h(t)$ είναι το προσαρμοσμένο φίλτρο στο $s(t)$.



Παράδειγμα 6.11 (5)

Η αντίστοιχη μέγιστη τιμή του SNR θα είναι

$$\gamma_{\max} = \frac{2\|s(t)\|^2}{N_0}. \quad (6.90)$$

Επειδή όμως

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i \phi_i(t) \quad (6.91)$$

θα ισχύει

$$h(t) = s(T - t) = \sum_{i=1}^N s_i \phi_i(T - t), \quad (6.92)$$

οπότε εύκολα συνάγεται ότι η διάταξη του Σχήματος 6.18 μεγιστοποιεί το SNR στις N εξόδους του αποδιαμορφωτή.



Παράδειγμα 6.12 (1)

Παράδειγμα 6.12

Να δείξετε ότι οι διατάξεις αποδιαμόρφωσης με συσχετιστές και προσαρμοσμένα φίλτρα είναι ισοδύναμες.



Παράδειγμα 6.12 (2)

Η έξοδος του i -στου προσαρμοσμένου φίλτρου θα είναι

$$r(t) * \phi_i(T-t) = \int_0^t r(\tau) \phi_i(T-t+\tau) d\tau. \quad (6.93)$$

Αν γίνει δειγματοληψία τη χρονική στιγμή $t = T$ τότε η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου θα είναι

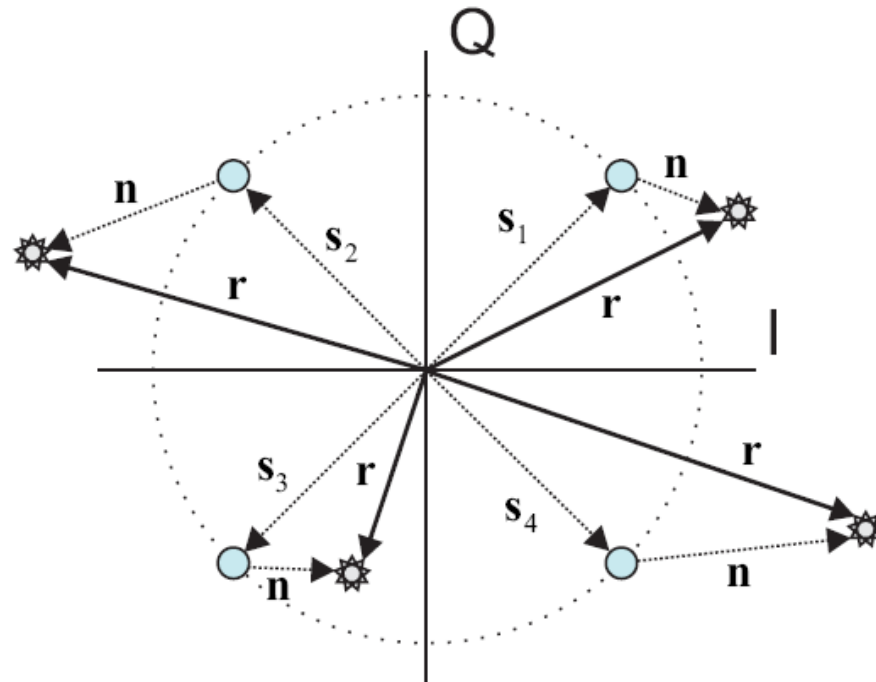
$$r_i = \int_0^T r(\tau) \phi_i(\tau) d\tau, \quad (6.94)$$

η οποία είναι ίδια με αυτή στην (6.76).

Επομένως αν η δειγματοληψία πραγματοποιηθεί τη χρονική στιγμή T οι έξοδοι του αποδιαμορφωτών συσχέτισης και προσαρμοσμένων φίλτρων ταυτίζονται και οι δύο διατάξεις είναι ισοδύναμες.



Βέλτιστη ανίχνευση σε AWGN



$$P_{s|i} \triangleq \Pr(\hat{s} \neq s_i | s = s_i)$$



Ανιχνευτής μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας (maximum a-posteriori probability-MAP) (1)

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \{ \Pr(\mathbf{s}_i | \mathbf{r}) \} \xrightarrow{\text{Bayes}} \hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{\Pr(\mathbf{s}_i) f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_i)}{f(\mathbf{r})} \right\} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \{ \Pr(\mathbf{s}_i) f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_i) \}$$

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_i) \Pr(\mathbf{s}_i)$$

$$f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_i) = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0}}$$



$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \Pr(\mathbf{s}_i) \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0}} \right\} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \Pr(\mathbf{s}_i) e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0}} \right\}$$



$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \log \Pr(\mathbf{s}_i) - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0} \right\} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \log \Pr(\mathbf{s}_i) \right\}$$



Ανιχνευτής μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας (maximum a-posteriori probability-MAP) (2)

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \log \operatorname{Pr}(\mathbf{s}_i) - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0} \right\} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \log \operatorname{Pr}(\mathbf{s}_i) \right\}$$

- Η εκτίμηση του ανιχνευτή για το διάνυσμα, $\hat{\mathbf{s}}$, σχετίζεται με τον υπολογισμό της Ευκλείδειας απόστασης, $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2$, των συμβόλων-διανυσμάτων, \mathbf{s}_i , από το \mathbf{r} , αλλά και από την a-priori πιθανότητα εμφάνισης αυτών, $\operatorname{Pr}(\mathbf{s}_i)$. Η επίδραση της τελευταίας μεγαλώνει με αύξηση της ισχύος του θορύβου.
- Αν αναπτυχθεί ο όρος $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2$ τότε το MAP κριτήριο γράφεται,

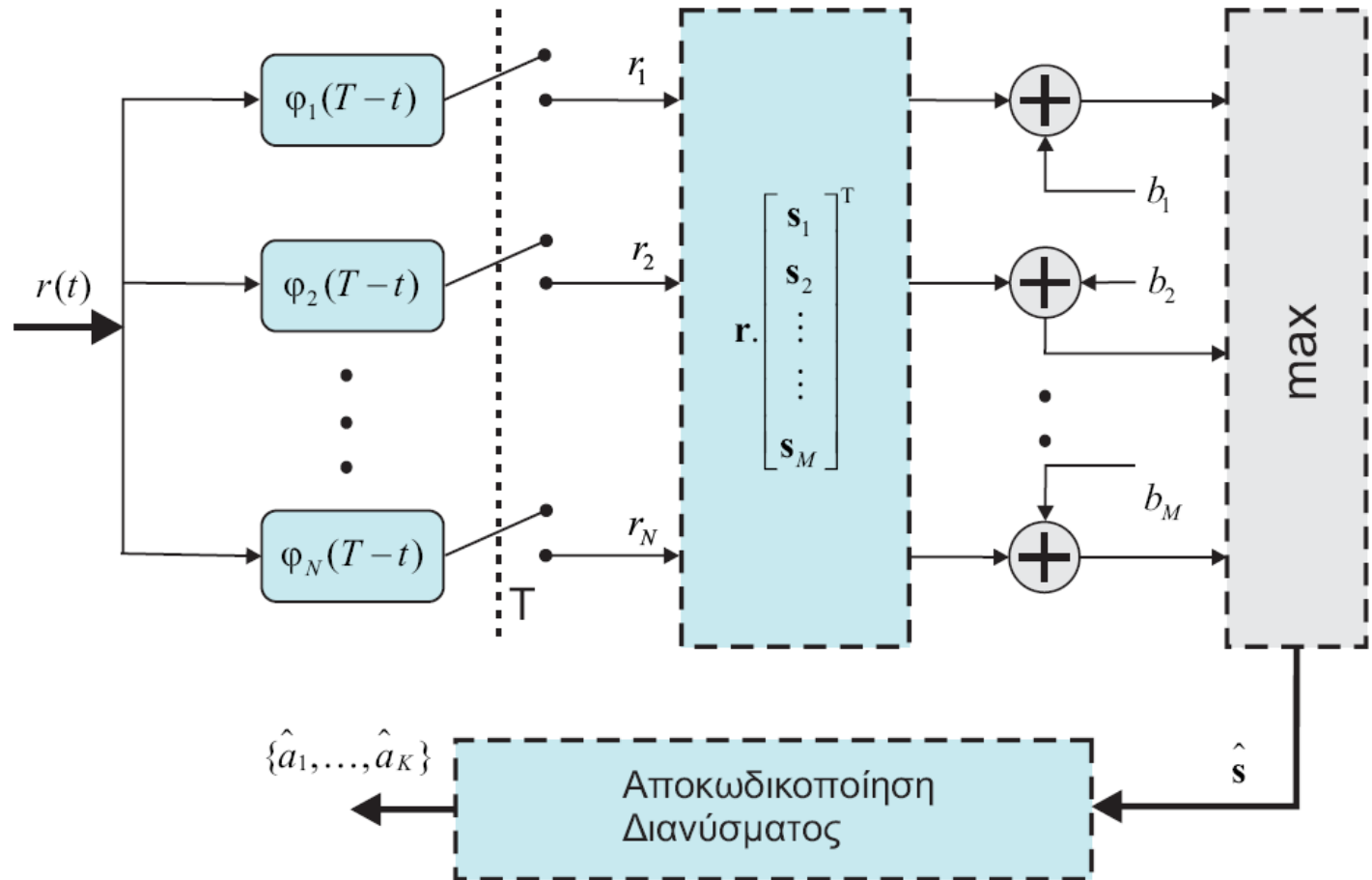
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{s}_i\|^2 - 2 \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle - N_0 \log \operatorname{Pr}(\mathbf{s}_i) \right\} \\ &= \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{s}_i\|^2 - 2 \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle - N_0 \log \operatorname{Pr}(\mathbf{s}_i) \right\} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle + b_i \right\} \end{aligned}$$

$$b_i = \frac{N_0}{2} \log \operatorname{Pr}(\mathbf{s}_i) - \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2}{2}$$



Ανιχνευτής μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας με MAPD Βάσης

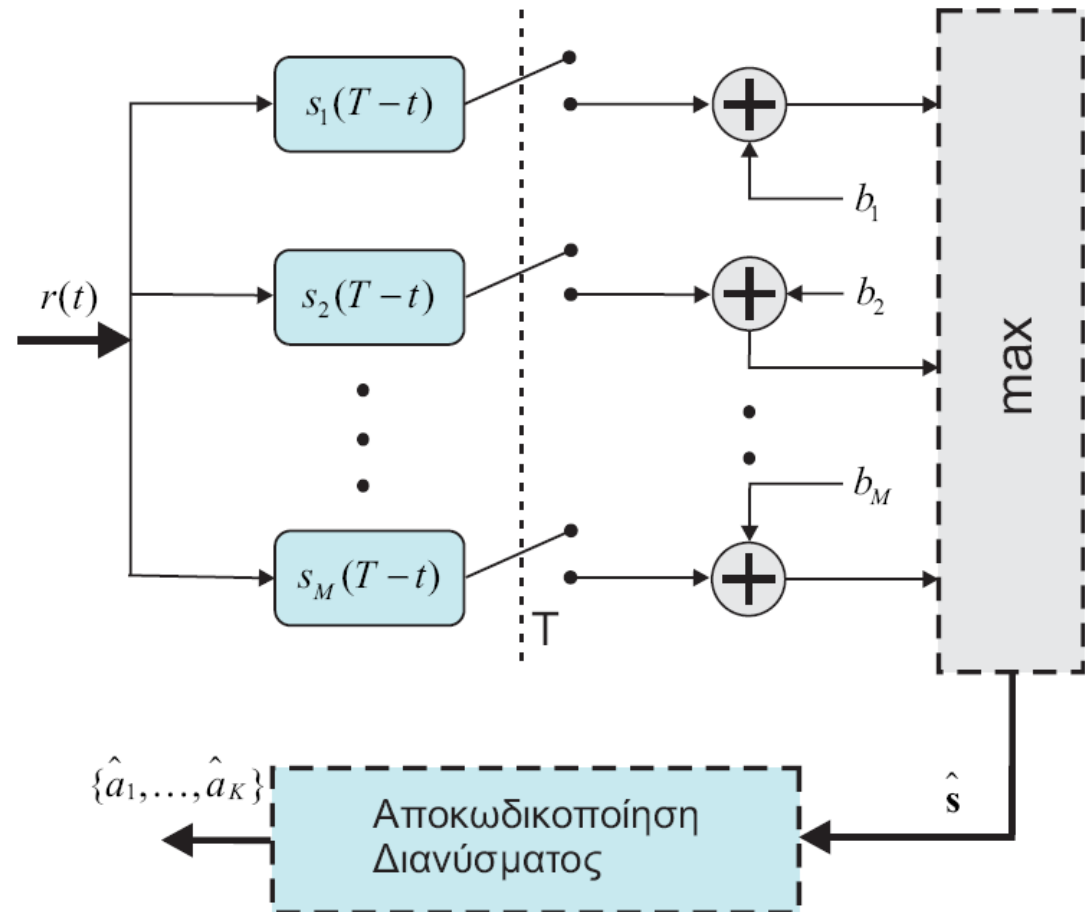
$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle + b_i \}$$



Ανιχνευτής μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας με MAPD Σήματος

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_i} \{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle + b_i \}$$

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle = r(t) * s_i(T - t)|_{t=T}$$



Ανιχνευτής μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood-ML)

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \{ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \log \Pr(\mathbf{s}_i) \} \implies \hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \{ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 \}$$

- Το κριτήριο απόφασης του MLD αφορά ουσιαστικά την εύρεση του διανύσματος, \mathbf{s}_i , το οποίο παρουσιάζει την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση από το \mathbf{r} . Δηλαδή με γεωμετρικούς όρους, την εύρεση του περισσότερο “γειτονικού” διανύσματος.

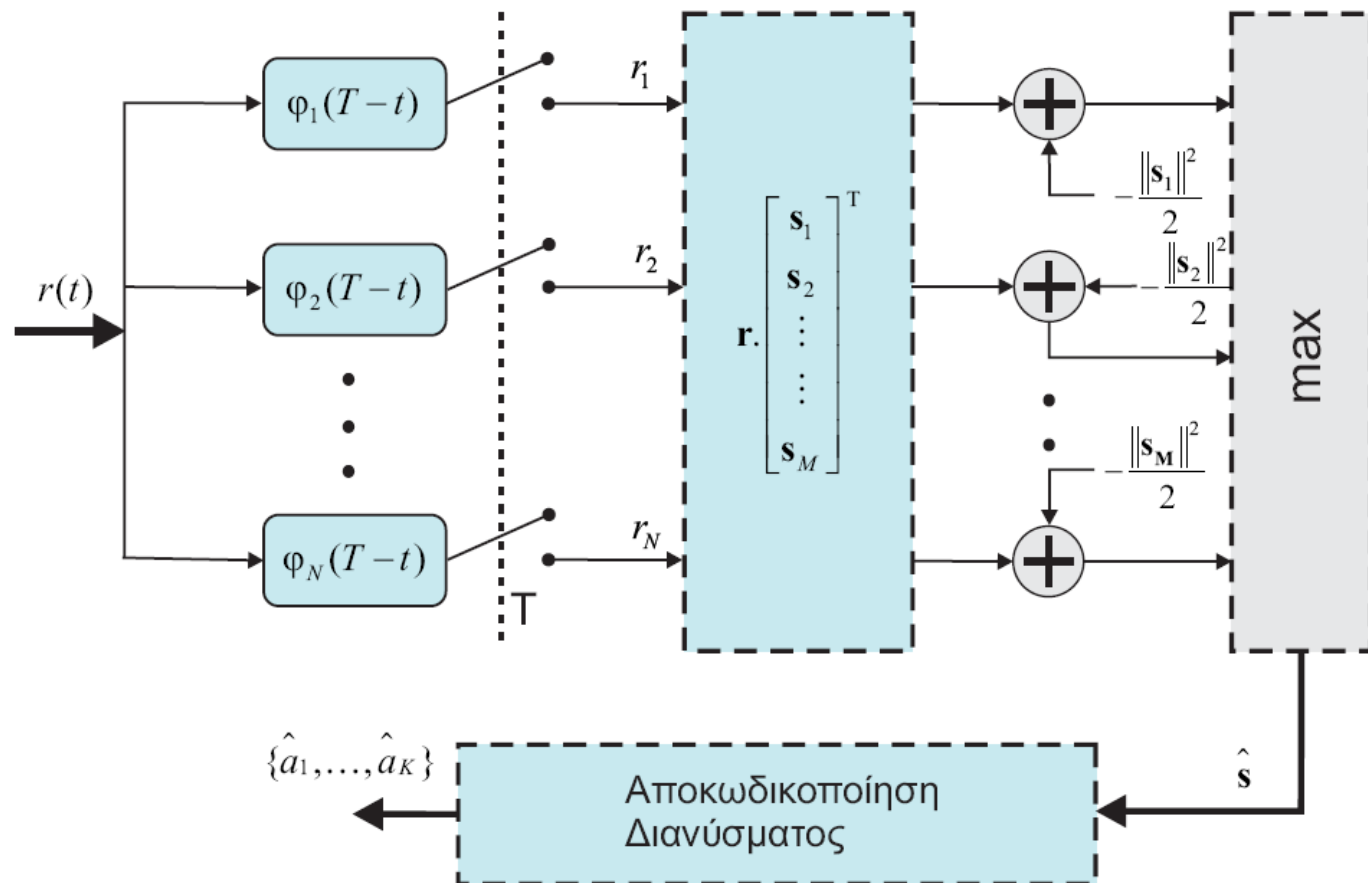
$$\bullet \quad \hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle + b_i \} \implies \hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle - \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2}{2} \right\}$$

$$b_i = \frac{N_0}{2} \log \Pr(\mathbf{s}_i) - \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2}{2} \quad \hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle \}$$



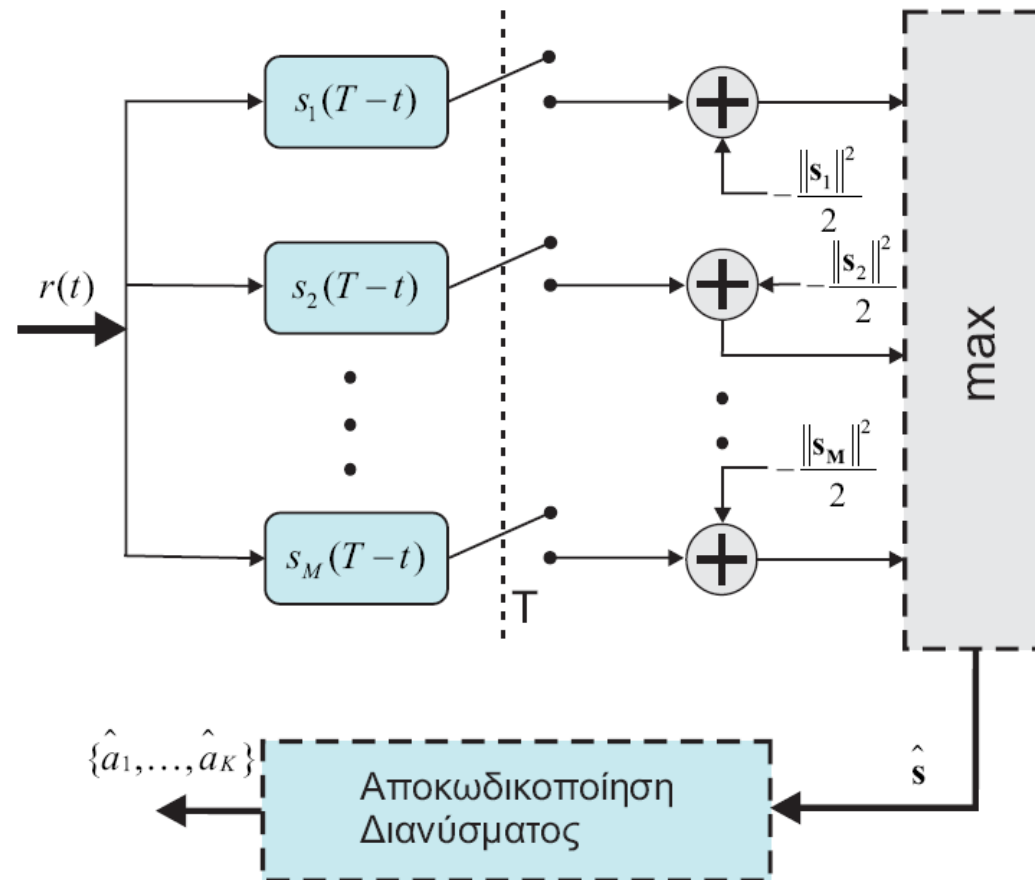
Ανιχνευτής μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood-ML) Βάσης

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle \}$$

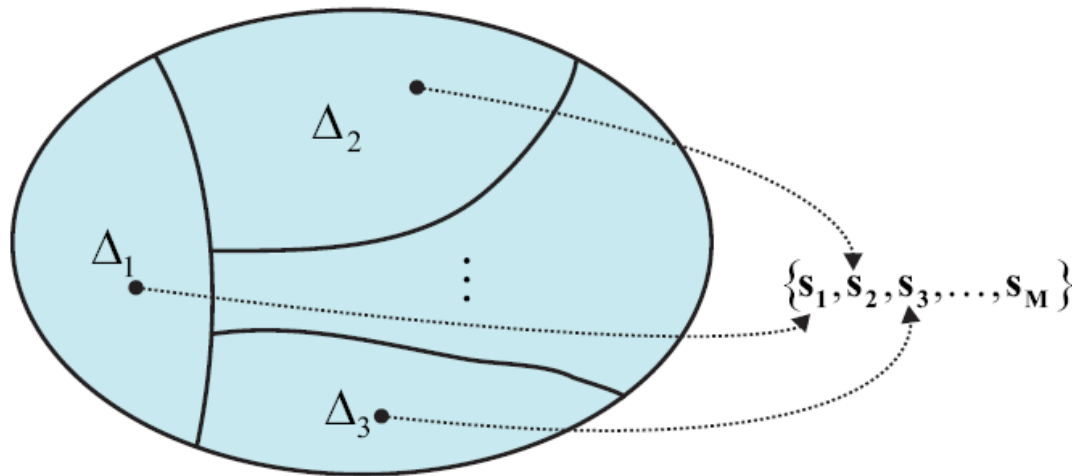


Ανιχνευτής μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood-ML) Σήματος

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmax}} \{ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle \}$$



Περιοχές απόφασης



$$\Delta_i \triangleq \{ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \log \Pr(\mathbf{s}_i) < \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_j\|^2 - N_0 \log \Pr(\mathbf{s}_j), i \neq j \}$$

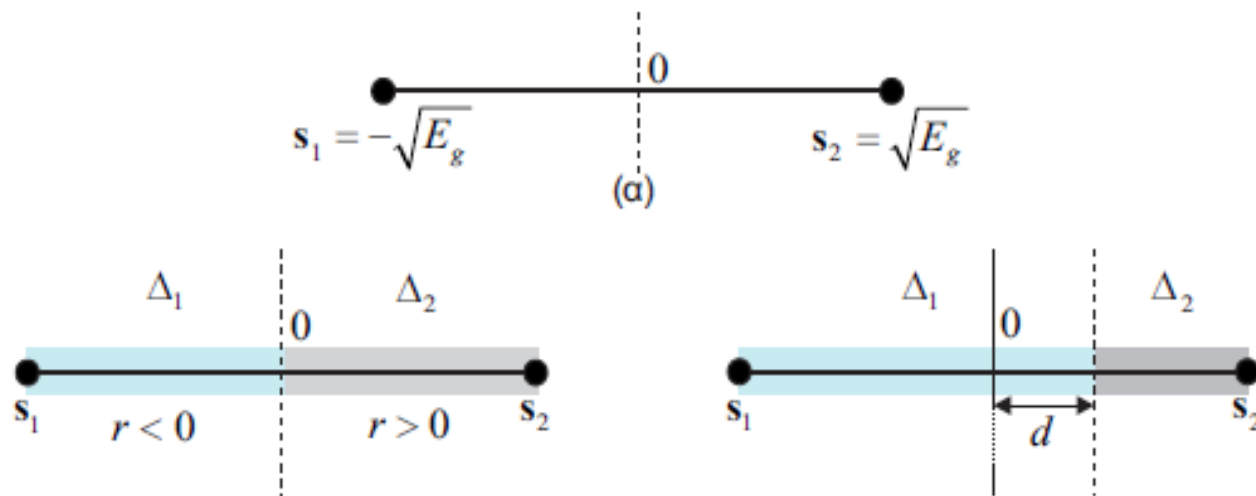
$$\text{MLD} \implies \Delta_i \triangleq \{ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 < \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_j\|^2, i \neq j \}$$

Παράδειγμα 6.13 (1)

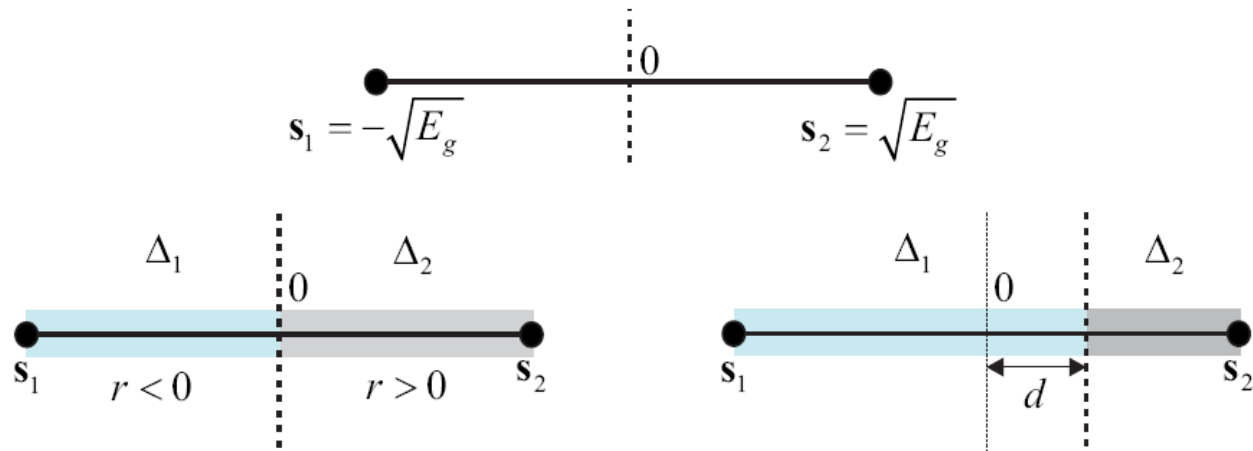
Παράδειγμα 6.13

Θεωρώντας σύμβολα ίσης ενέργειας, να βρεθούν οι περιοχές απόφασης για τους δέχτες MLD και MAPD του δυαδικού αστερισμού του Σχήματος 6.24α.

Ο αστερισμός αυτός αντιστοιχεί στην τεχνική δυαδικής διαμόρφωσης πλάτους παλμού (*binary pulse amplitude modulation-BPAM*).



Παράδειγμα 6.13 (2)



$$\Delta_1 \triangleq \{ \| \mathbf{r} - \mathbf{s}_1 \|^2 - N_0 \log \Pr(\mathbf{s}_1) < \| \mathbf{r} - \mathbf{s}_2 \|^2 - N_0 \log \Pr(\mathbf{s}_2) \}$$

$$\Delta_1 \triangleq \left\{ r < \frac{N_0}{2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)} \log \frac{\Pr(\mathbf{s}_1)}{\Pr(\mathbf{s}_2)} \right\} \triangleq \left\{ r < \frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_g}} \log \frac{\Pr(\mathbf{s}_1)}{\Pr(\mathbf{s}_2)} \right\}$$

$$d = \frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_g}} \log \frac{\Pr(\mathbf{s}_1)}{\Pr(\mathbf{s}_2)}, \quad \Delta_2 \triangleq \left\{ r > \frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_g}} \log \frac{\Pr(\mathbf{s}_1)}{\Pr(\mathbf{s}_2)} \right\}$$



Παράδειγμα 6.14 (1)

Παράδειγμα 6.14

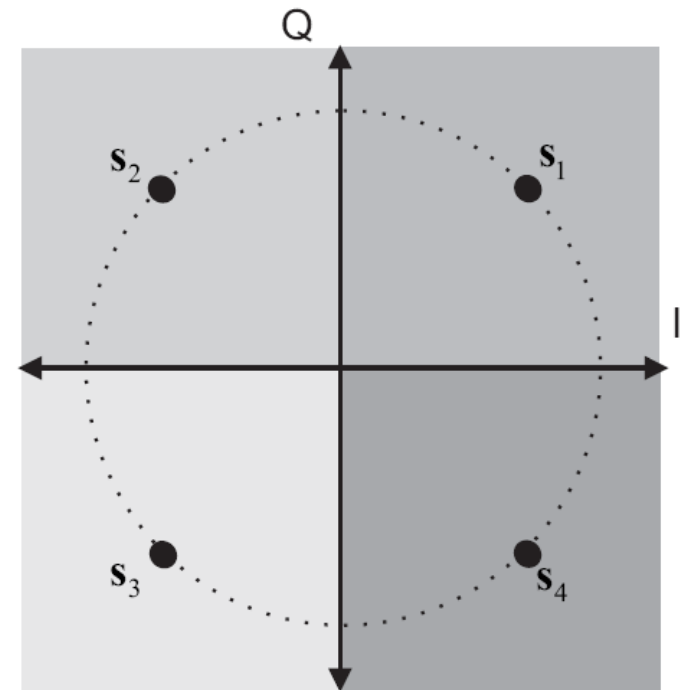
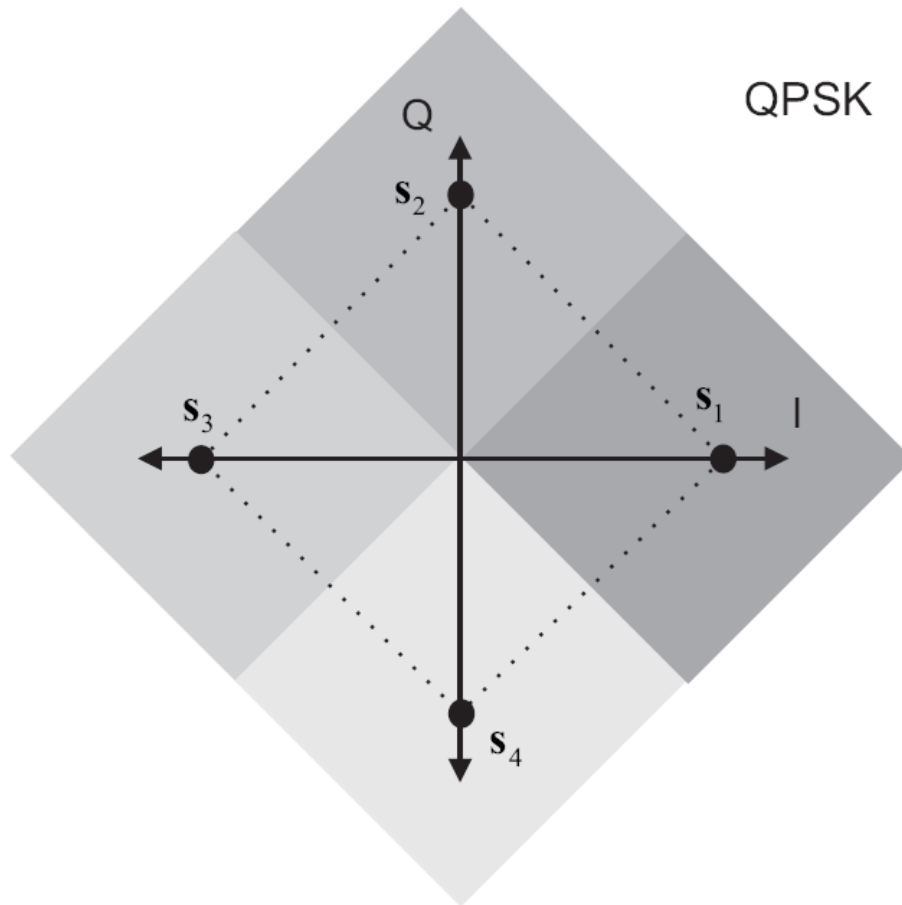
Να σχεδιαστούν οι περιοχές απόφασης για τον MLD της διαμόρφωσης QPSK του Σχήματος 6.6 καθώς και για τον αστερισμό που προκύπτει με μετατόπιση των σημείων κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Απάντηση

Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική τεχνική της μεσοκαθέτου οι ζητούμενες περιοχές σχεδιάζονται (με διαφορετικές αποχρώσεις) στα Σχήματα 6.25α και 6.25β.



Παράδειγμα 6.14 (2)



Πιθανότητα Σφάλματος (1)

$$P_{s|i} \triangleq \Pr(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}_i | \mathbf{s} = \mathbf{s}_i)$$

$$\begin{aligned} P_{s|i} &= \Pr(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}_i | \mathbf{s} = \mathbf{s}_i) = \Pr(\mathbf{r} \notin \Delta_i | \mathbf{s} = \mathbf{s}_i) \\ &= 1 - \Pr(\mathbf{r} \in \Delta_i | \mathbf{s} = \mathbf{s}_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{s|i} &= 1 - \Pr(\mathbf{r} \in \Delta_i | \mathbf{s} = \mathbf{s}_i) \\ &= 1 - \int_{\Delta_i} f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_i) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} \int_{\Delta_i} e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0}} \end{aligned}$$

$$P_s = \sum_{i=1}^M P_{s|i} \Pr(\mathbf{s}_i)$$

$$P_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{s|i}$$



Πιθανότητα Σφάλματος (2)

Ενωτικό όριο (Union bound) $P_s \leq (M - 1)Q \left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right)$

Πιθανότητα σφάλματος bit $P_b = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Pr(\hat{\alpha}_k \neq \alpha_k)$

$$\frac{1}{K}P_s \leq P_b \leq P_s$$

Κωδικοποίηση Gray $P_b \approx \frac{1}{K}P_s$



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη [εδώ](#).



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Παναγιώτης Μαθιόπουλος. Παναγιώτης Μαθιόπουλος. «Συστήματα Επικοινωνιών. Ψηφιακή εκπομπή και λήψη». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI114>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

"Η δομή και οργάνωση της παρουσίασης, καθώς και το υπόλοιπο περιεχόμενο, αποτελούν πνευματική ιδιοκτησία του συγγραφέα και του Πανεπιστημίου Αθηνών και διατίθενται με άδεια Creative Commons Αναφορά Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή Έκδοση 4.0 ή μεταγενέστερη.

Οι Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/φωτογραφίες που περιέχονται στην παρουσίαση αποτελούν πνευματική ιδιοκτησία τρίτων. Απαγορεύεται η αναπαραγωγή, αναδημοσίευση και διάθεσή τους στο κοινό με οποιονδήποτε τρόπο χωρίς τη λήψη άδειας από τους δικαιούχους. "

