



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 2: Τυχαίες διαδικασίες και θόρυβος

Μαθιόπουλος Παναγιώτης

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

# Περιγραφή ενότητας

Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί, Μέσες τιμές συνόλου (Ensemble averages), Στάσιμες τυχαίες διαδικασίες, Φασματική πυκνότητα ισχύος (Power spectral density).



# Τυχαίες διαδικασίες και θόρυβος

# Εισαγωγή

Τυχαία (ή στοχαστική) διαδικασία:

- Σχετίζεται με την μεταβολή φυσικών παραμέτρων ενός σήματος με τυχαίο και απρόβλεπτο τρόπο.
- Η αλλαγή αυτή αφορά μία ή περισσότερες παραμέτρους.



# Τυχαίες διαδικασίες (1)

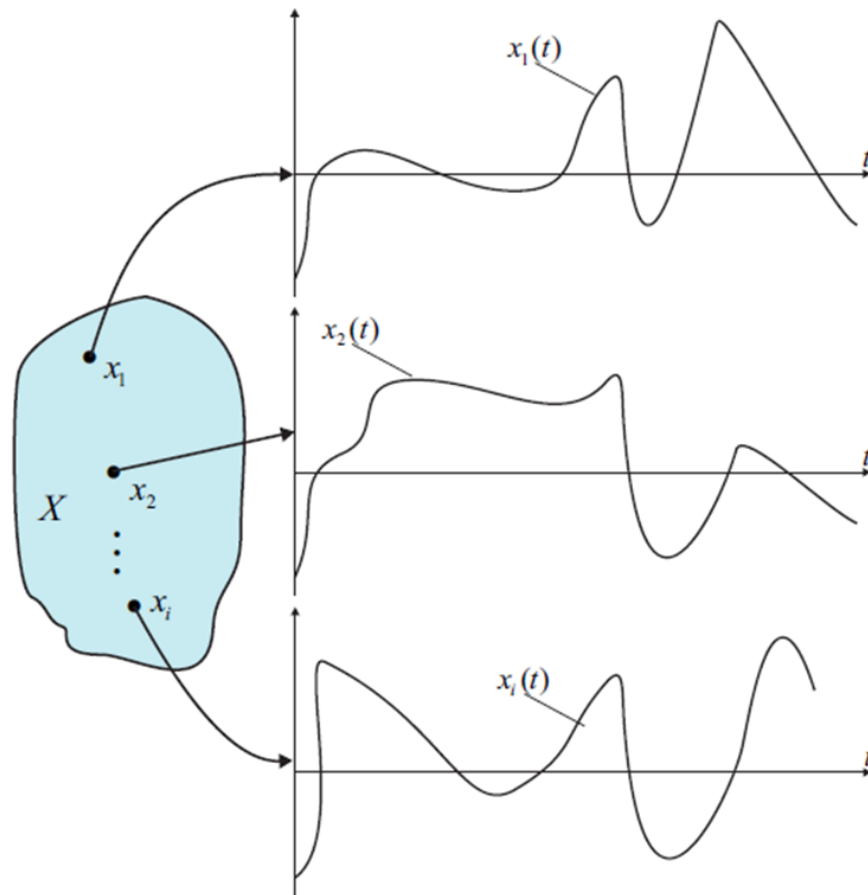
Έστω ένας χώρος δειγμάτων (*sample space*)  $X$ , δηλαδή ένας χώρος που αποτελείται από τα συμβάντα-δείγματα  $x_1, x_2, \dots$ , κάθε ένα από τα οποία εμφανίζεται με πιθανότητα  $p_i$  και αντιστοιχεί σε ένα σήμα που μεταβάλλεται με το χρόνο.

Τότε θα ισχύει

$$\sum_i p_i = 1, 0 \leq p_i \leq 1. \quad (3.1)$$



# Τυχαίες διαδικασίες (2)



Σχήμα 3.1: Τυχαία διαδικασία



# Τυχαίες διαδικασίες (3)

Καθώς κάθε σημείο  $x_i$  του  $X$  συνδέεται με μία κυματομορφή, το σύνολο των τιμών  $x_i(t_1)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , θα αποτελεί μία Γ.Μ, το  $x_i(t_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , μία άλλη Γ.Μ, κ.λ.π. Δηλαδή για κάθε χρονική στιγμή παρατήρησης θα δημιουργείται μία νέα τυχαία μεταβλητή.

Το παραπάνω σύστημα, το οποίο αποτελείται από ένα χώρο δειγμάτων και ένα σύνολο (*ensemble*) από συναρτήσεις-σήματα που αντιστοιχούν στα δείγματα και μεταβάλλονται στο χρόνο, ονομάζεται τυχαία διαδικασία (*random process*).



# Τυχαίες διαδικασίες (4)

Οι παρακάτω παράμετροι συνδέονται με τη Τ.Δ  $X(t)$ :

- Η κυματομορφή-δείγμα  $x_i(t)$ , η οποία αντιστοιχεί στο σημείο του χώρου δειγμάτων  $x_i$ .
- Η τυχαία μεταβλητή  $X(t_i)$ , η οποία προκύπτει παρατηρώντας τις τιμές της Τ.Δ τη χρονική στιγμή  $t = t_i$ .
- Ο πραγματικός αριθμός  $x_i(t_j)$ , δηλαδή η τιμή της  $x_i(t)$  τη χρονική στιγμή  $t = t_j$ .





# Τυχαίες διαδικασίες (5)

## Παράδειγμα 3.1

Τυχαία ακολουθία από bits, στην οποία τα 0 και 1 εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα, πρόκειται να μεταδοθεί χρησιμοποιώντας ψηφιακή διαμόρφωση σύμφωνα με την αντιστοιχία

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \sin \pi t \rightarrow 0, \\x_2(t) &= -\sin \pi t \rightarrow 1.\end{aligned}\tag{3.2}$$

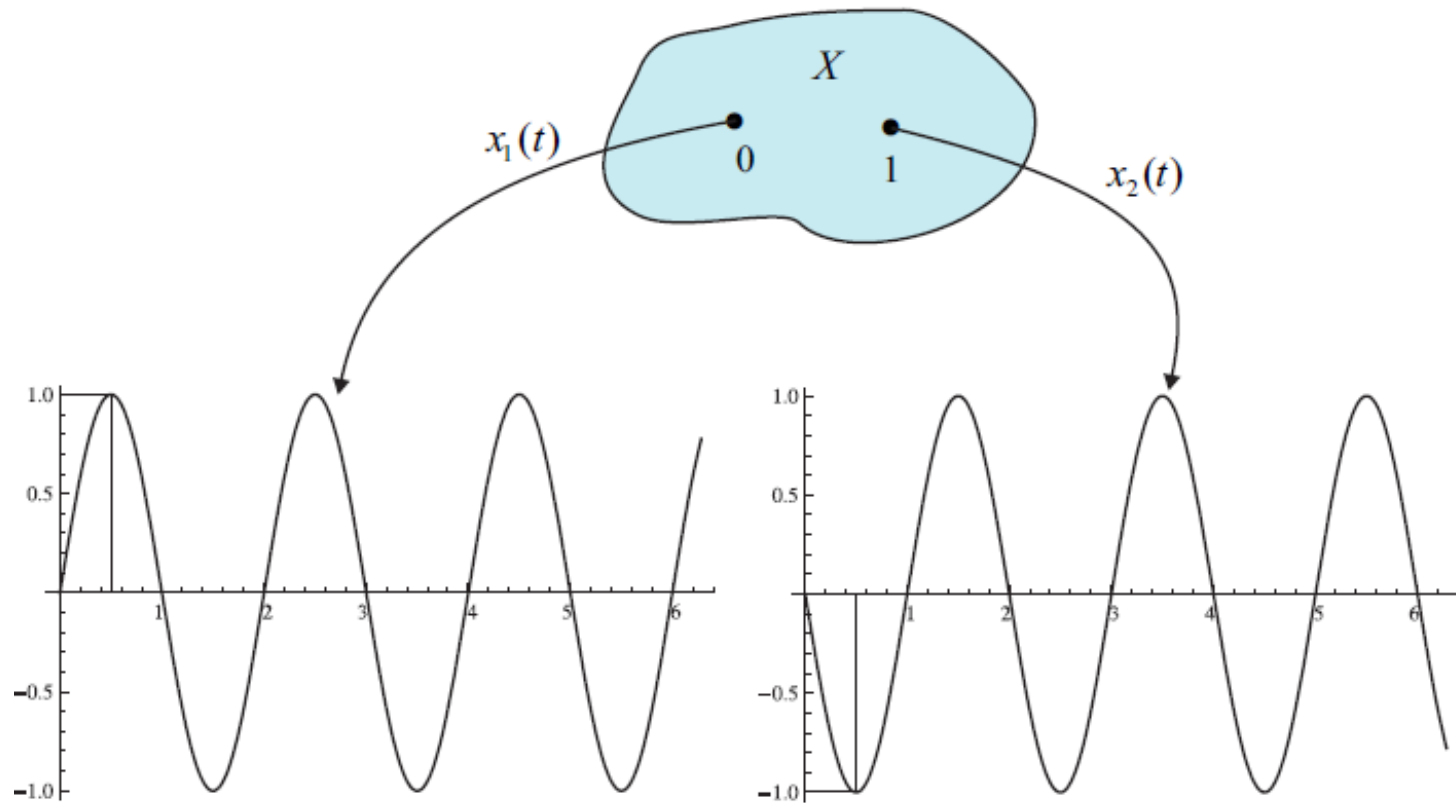
Να βρεθεί μία έκφραση για την ΣΠΠ των τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες προκύπτουν από τη δειγματοληψία της Τ.Δ που δημιουργείται με το παραπάνω σενάριο τις χρονικές στιγμές  $t = 0$  και  $t = 0.5$ .

## Απάντηση

Υπάρχουν δύο δείγματα  $x_1$  και  $x_2$ , τα οποία αντιστοιχούν στις κυματομορφές  $x_1(t) \rightarrow 0$  και  $x_2(t) \rightarrow 1$  (Σχήμα 3.2).



# Τυχαίες διαδικασίες (6)



Σχήμα 3.2: Τυχαία διαδικασία του Παραδείγματος 3.1



# Τυχαίες διαδικασίες (7)

Επειδή τα bits 0 και 1 είναι ισοπίθανα θα ισχύει

$$\Pr(x_1(t)) = \Pr(x_2(t)) = \frac{1}{2}, \quad (3.3)$$

όπου ο τελεστής  $\Pr(\cdot)$  συμβολίζει την a-priori πιθανότητα.

Αν  $X_0 = X(0)$  και  $X_{0.5} = X(0.5)$  είναι οι τυχαίες μεταβλητές που αντιστοιχούν στις τιμές της Τ.Δ τις χρονικές στιγμές  $t = 0$  και  $t = 0.5$  αντίστοιχα, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι ζητούμενες ΣΠΠ θα είναι

$$f_{X_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.4)$$

και

$$f_{X_{0.5}}(x) = \begin{cases} 0.5, & x = -1 \\ 0.5, & x = +1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (3.5)$$



# Μέσες τιμές συνόλου

Μία Τ.Δ  $X(t)$  είναι πλήρως ορισμένη όταν είναι γνωστή η ΣΠΠ  $f_{\mathbf{X}(t)}$  αυτής. Όμως αυτό συμβαίνει σπάνια και στις περισσότερες περιπτώσεις η Τ.Δ ορίζεται με τη χρήση μέσων τιμών. Οι τιμές αυτές ονομάζονται μέσες τιμές συνόλου (*ensemble averages*) αφού αφορούν ένα σύνολο συναρτήσεων-δειγμάτων τα οποία συνθέτουν την Τ.Δ.

**Συνάρτηση μέσης τιμής (Mean function)** Η συνάρτηση μέσης τιμής ορίζεται ως<sup>2</sup>

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx. \quad (3.6)$$



# Συνάρτηση μέσης τιμής

Συνάρτηση μέσης τιμής (Mean function) Η συνάρτηση μέσης τιμής ορίζεται ως<sup>2</sup>

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx. \quad (3.6)$$

Αν  $X_i = X(t_i)$  και  $X_j = X(t_j)$  είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες προκύπτουν λαμβάνοντας δείγματα της Τ.Δ τις χρονικές στιγμές  $t = t_i$  και  $t = t_j$  τότε ισχύει

$$\mathbb{E}[x_i] = m_X(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_i}(x) dx \quad (3.7)$$

και

$$\mathbb{E}[x_j] = m_X(t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_j}(x) dx. \quad (3.8)$$

Γενικά, η συνάρτηση μέσης τιμής  $m_X(t)$  είναι συνάρτηση του χρόνου και εκφράζει το πως μεταβάλλεται η μέση τιμή των συναρτήσεων-δειγμάτων της Τ.Δ.



# Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (**Autocorrelation function**) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (ΣΑΣ) είναι από τις πιο σημαντικές παραμέτρους μίας τυχαίας διαδικασίας, αφού -όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια- σχετίζεται με το φασματικό περιεχόμενο αυτής.

Η ΣΑΣ είναι συνάρτηση των μεταβλητών  $t_i$  και  $t_j$  και ορίζεται ως

$$R_X(t_i, t_j) = \mathbb{E}[X(t_i)X(t_j)] \quad (3.9)$$

ή

$$R_X(t_i, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X_i, X_j}(x, y) dx dy, \quad (3.10)$$

όπου  $f_{X_i, X_j}(x, y)$  είναι η συνδυασμένη (joint) ΣΠΠ των τυχαίων μεταβλητών  $X_i$  και  $X_j$ .



# Συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης

Συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης (**Autocovariance function**) Η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης-ΣΑΣΔ μίας Τ.Δ  $X(t)$  ορίζεται ως

$$C_X(t_i, t_j) = \mathbb{E}[(X(t_i) - m_X(t_i))(X(t_j) - m_X(t_j))]. \quad (3.11)$$

Εύκολα αποδεικνύεται με ανάπτυγμα του δεύτερου μέρους της (3.11) ότι

$$C_X(t_i, t_j) = R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i)m_X(t_j) \quad (3.12)$$

και αν  $m_X(t) = 0$  τότε

$$C_X(t_i, t_j) = R_X(t_i, t_j). \quad (3.13)$$



# Συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (1)

Συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (**Cross-correlation function**) Οι συναρτήσεις ετεροσυσχέτισης-ΣΕΣ δύο Γ.Δ  $X_1(t)$  και  $X_2(t)$  ορίζονται ως

$$R_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_1(t_1)X_2(t_2)] \quad (3.14)$$

και

$$R_{X_2, X_1}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_2(t_1)X_1(t_2)], \quad (3.15)$$

όπου  $t_1$  και  $t_2$  είναι δύο χρονικές στιγμές κατά τις οποίες παρατηρούνται οι  $X_1(t)$  και  $X_2(t)$ .





# Συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (2)

Οι  $X_1(t)$  και  $X_2(t)$  είναι ορθογώνιες μεταξύ τους αν ισχύει

$$R_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = 0 \quad (3.16)$$

και ασυσχέτιστες αν

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{X_1, X_2}(t_1, t_2) - m_{X_1}(t_1)m_{X_2}(t_2) = 0 \quad (3.17)$$

για κάθε  $t_1$  και  $t_2$ .



# Παράδειγμα 3.2 (1)

## Παράδειγμα 3.2

Μία Τ.Δ περιγράφεται ως

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta), \quad (3.18)$$

όπου  $A$  και  $f_c$  είναι σταθερές. Το  $\Theta$  είναι μία Τ.Μ με ΣΠΠ

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (3.19)$$

δηλαδή η Τ.Μ  $\Theta$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Να υπολογιστούν οι  $m_X(t)$  και  $R_X(t_1, t_2)$ .



# Παράδειγμα 3.2 (2)

## Απάντηση

Η  $X(t)$  αποτελείται από σήματα-δείγματα με ημιτονοειδή μορφή πλάτους  $A$  και συχνότητας  $f_c$ , στα οποία η φάση  $\Theta$  είναι Τ.Μ. Τέσσερα τέτοια σήματα φαίνονται στο Σχήμα 3.3.

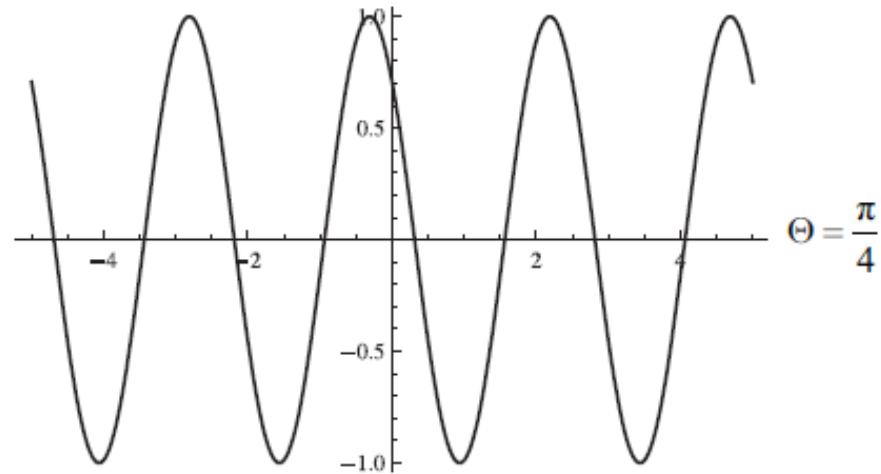
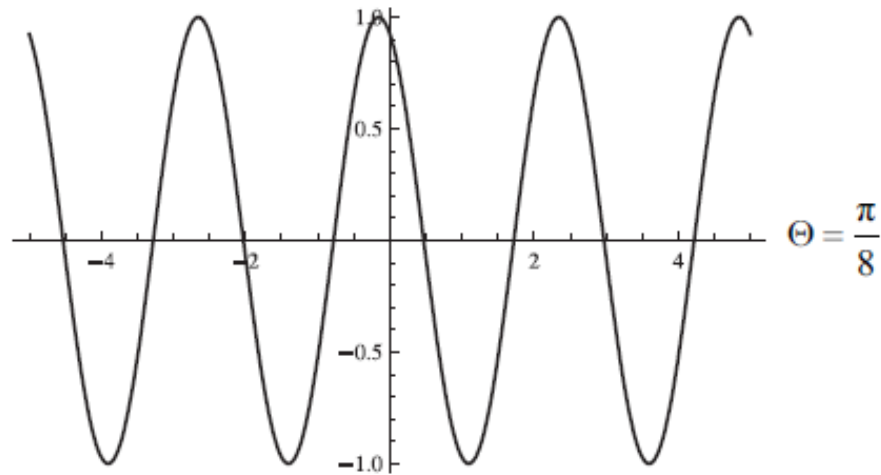
Η μέση τιμή της  $X(t)$  θα είναι

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}[A \cos(2\pi f_c t + \Theta)] = \int_0^{2\pi} X(t) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c t + \theta) d\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

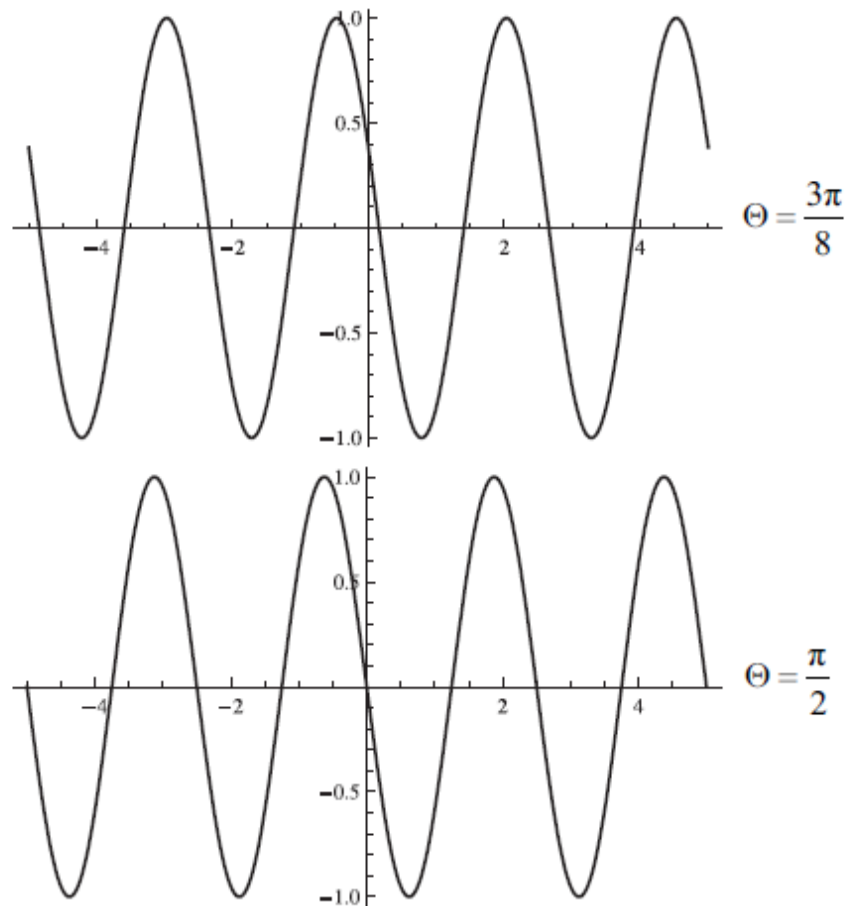
αφού η  $\Theta$  είναι η μοναδική Τ.Μ στην  $X(t)$ . Τα όρια του ολοκληρώματος στην (3.20) είναι από 0 έως  $2\pi$ , επειδή η  $\Theta$  λαμβάνει τιμές ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό.



# Παράδειγμα 3.2 (3)



# Παράδειγμα 3.2 (4)



Σχήμα 3.3: Συναρτήσεις δείγματα της Τ.Δ του Παραδείγματος 3.2



# Παράδειγμα 3.2 (5)

Η ΣΑΣ της  $X(t)$  δίνεται ως

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[A \cos(2\pi f_c t_1 + \Theta) A \cos(2\pi f_c t_2 + \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \mathbb{E}[\cos[2\pi f_c(t_1 + t_2) + 2\Theta] + \cos 2\pi f_c(t_1 - t_2)] \\ &= \frac{A^2}{2} (\mathbb{E}[\cos[2\pi f_c(t_1 + t_2) + 2\Theta]] + \mathbb{E}[\cos 2\pi f_c(t_1 - t_2)]) \\ &= \frac{A^2}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \cos[2\pi f_c(t_1 + t_2) + 2\theta] d\theta + \mathbb{E}[\cos 2\pi f_c(t_1 - t_2)] \right] \\ &= \frac{A^2}{2} [0 + \cos 2\pi f_c(t_1 - t_2)] = \frac{A^2}{2} \cos[2\pi f_c(t_1 - t_2)]. \end{aligned} \tag{3.21}$$



## Παράδειγμα 3.2 (6)

Από την (3.21) προκύπτει ότι η  $R_X(t_1, t_2)$  είναι συνάρτηση μόνο της διαφοράς  $t_1 - t_2$ , οπότε μπορεί να γραφτεί ως

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_c \tau, \quad (3.22)$$

ενώ από την (3.22) εξάγεται το συμπέρασμα ότι η  $\Sigma\Lambda\Sigma$  είναι επίσης περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $T = \frac{1}{f_c}$ .



# Στάσιμες τυχαίες διαδικασίες (1)

Εξ' ορισμού μία Τ.Δ  $X(t)$  συνδέεται με την ύπαρξη ενός άπειρου αριθμού από τυχαίες μεταβλητές, κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε μία χρονική στιγμή στο διάστημα  $-\infty < t < \infty$ . Αν η  $X(t)$  παρατηρηθεί σε  $n$  χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , τότε προκύπτουν οι αντίστοιχες Τ.Μ  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση συνδυασμένης κατανομής-ΣΣΚ (*joint distribution function*) ως

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(\mathbf{x}) = \Pr(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n), \quad (3.23)$$

όπου  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Η συνδυασμένη ΣΠΠ της  $X(t)$  θα είναι

$$f_{\mathbf{X}(t)} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x}), \quad (3.24)$$

όπου  $\mathbf{X}(t) = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ .





# Στάσιμες τυχαίες διαδικασίες (2)

Η Τ.Δ  $X(t)$  είναι στάσιμη με την αυστηρή έννοια-ΣΑΕ (*stationary in a strict sense*) αν η συνδυασμένη ΣΠΠ  $f_{\mathbf{X}(t)}$  δεν αλλάζει σε μία μεταβολή της αρχής του άξονα του χρόνου (δηλαδή οι στατιστικές ιδιότητες της Τ.Δ δεν αλλάζουν σε οποιαδήποτε χρονική μετατόπιση της Τ.Δ). Δηλαδή όταν ισχύει

$$f_{\mathbf{X}(t+T)} = f_{\mathbf{X}(t)} \quad (3.25)$$

με  $[t + T] = [t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T]$  και  $T$  μία σταθερά.

Για να είναι η  $X(t)$  ΣΑΕ πρέπει να ισχύει η (3.25) για κάθε σύνολο χρονικών τιμών  $t_i, i = 1, 2, \dots, n$  και για κάθε χρονική μετατόπιση  $T$ .



# Παράδειγμα 3.3 (1)

## Παράδειγμα 3.3

Να δείξετε ότι η Τ.Δ

$$X(t) = \sin 2\pi St \quad (3.26)$$

όπου  $S$  είναι μία Τ.Μ με ΣΠΠ

$$f_S(f) = \begin{cases} \frac{1}{200}, & 200 \leq f \leq 400 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.27)$$

είναι μη-στάσιμη.



# Παράδειγμα 3.3 (2)

## Απάντηση

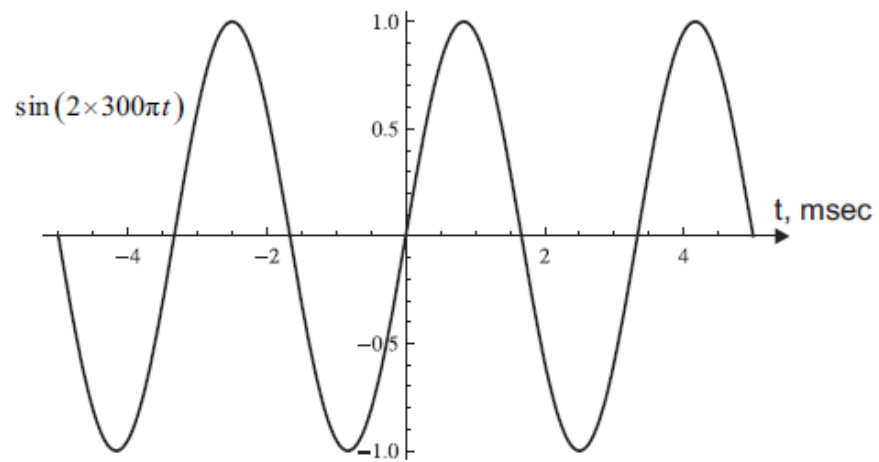
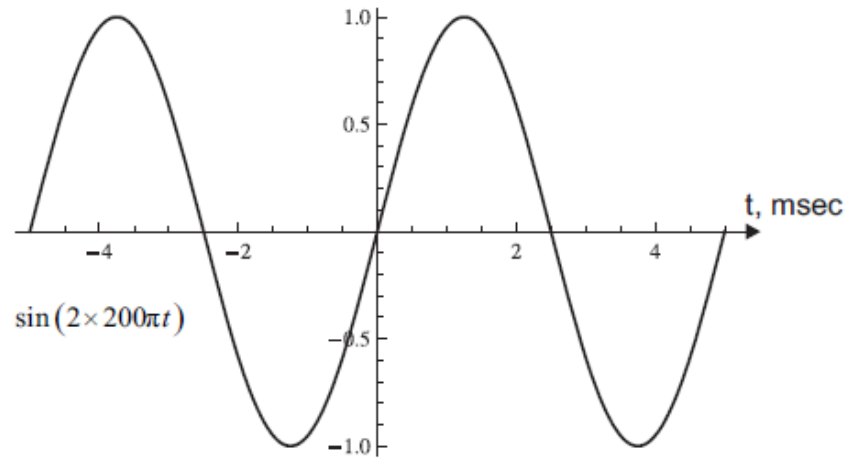
Η  $X(t)$  αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό από συναρτήσεις-δείγματα. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ένα ημίτονο μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας  $f$ . Η τυχαία μεταβλητή  $S$  λαμβάνει όλες τις τιμές στο διάστημα  $[200 \text{ Hz}, 400 \text{ Hz}]$ . Κάποιες τέτοιες περιπτώσεις φαίνονται στο Σχήμα 3.4, όταν  $f = 200, 300, 400 \text{ Hz}$ .

Παρατηρήστε ότι για κάθε κυματομορφή του Σχήματος 3.4 ισχύει

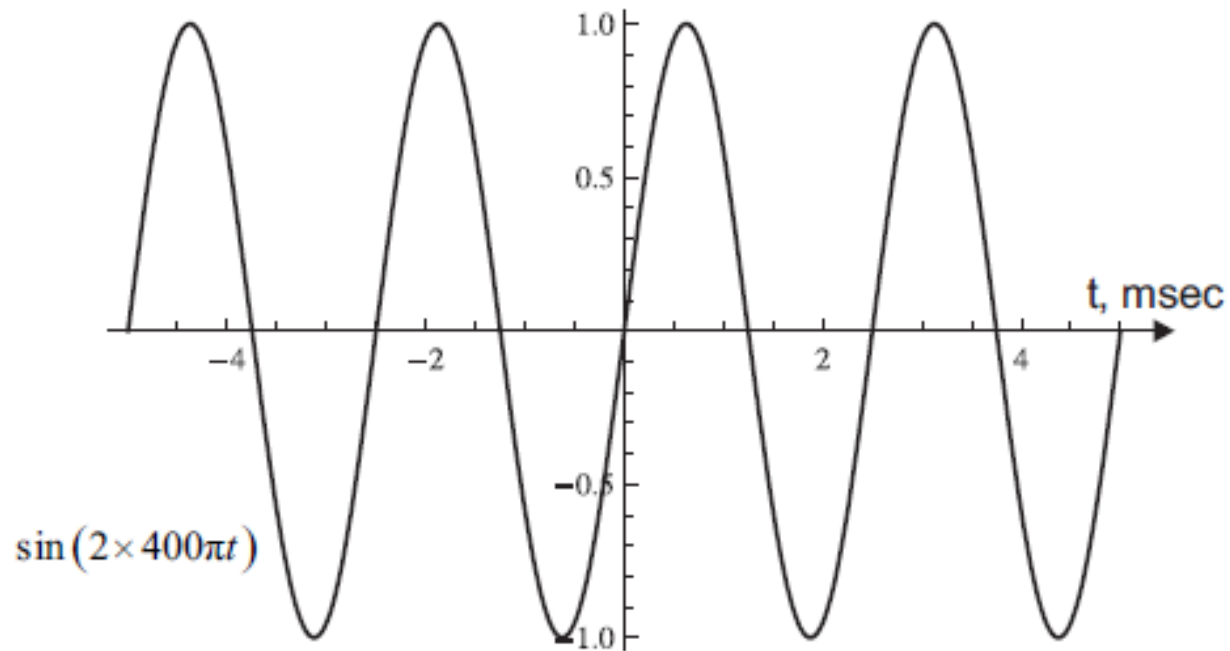
- Η τιμή της είναι ίση με μηδέν για  $t = 0$ .
- Λαμβάνει θετικές τιμές για  $0 < t < 1.25$ .
- Λαμβάνει αρνητικές τιμές για  $-1.25 < t < 0$ .



# Παράδειγμα 3.3 (3)



# Παράδειγμα 3.3 (4)



Σχήμα 3.4: Συναρτήσεις της Τ.Δ του Παραδείγματος 3.3



## Παράδειγμα 3.3 (5)

Έτσι η ΣΠΠ της Τ.Μ  $X(t_1)$  είναι ίση με μηδέν όταν  $t_1 = 1$  msec, αλλά η αντίστοιχη της  $X(t_2)$  για  $t_2 = -1$  msec είναι μη-μηδενική μόνο για αρνητικές τιμές του  $t$ .

Έτσι η ΣΠΠ των συναρτήσεων-δειγμάτων εξαρτάται από τη χρονική στιγμή που λαμβάνεται το δείγμα, οπότε η  $X(t)$  είναι μη-στάσιμη διαδικασία.



# Στάσιμες με την ευρεία έννοια και εργοδικές τυχαίες διαδικασίες (1)

Μία Τ.Δ  $X(t)$  είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια-ΣΕΕ (*wide sense stationary*) αν

$$m_X(t) = m_X \quad (3.28)$$

και

$$R_X(t_i, t_j) = R_X(t_i - t_j) = R_X(\tau). \quad (3.29)$$

Δηλαδή, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μίας ΣΕΕ είναι συνάρτηση μόνο της διαφοράς  $\tau = t_i - t_j$ .

Συνήθως η ΣΑΣ μίας ΣΕΕ Τ.Δ γράφεται ως

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t + \tau)X(t)], \quad (3.30)$$

όπου  $\tau$  είναι η διαφορά μεταξύ των χρονικών στιγμών δειγματοληψίας της  $X(t)$ .



# Στάσιμες με την ευρεία έννοια και εργοδικές τυχαίες διαδικασίες (2)

Η Τ.Δ με στασιμότητα υπό την ευρεία έννοια είναι ένα υποσύνολο των στάσιμων διαδικασιών με την αυστηρή έννοια.

Αν η χρονική μέση τιμή της συνάρτησης-δείγμα  $x_i(t)$  της  $X(t)$  είναι

$$\mathbb{E}[x_i(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) dt, \quad (3.31)$$

τότε η  $X(t)$  είναι μία εργοδική (*ergodic*) διαδικασία ως προς τη μέση τιμή αν ισχύει

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[x_i(t)]. \quad (3.32)$$





# Στάσιμες με την ευρεία έννοια και εργοδικές τυχαίες διαδικασίες (3)

Με τον ίδιο τρόπο αν η συνάρτηση χρονικής αυτοσυσχέτισης της  $x_i(t)$  είναι

$$R_{x_i}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)x_i(t + \tau)dt \quad (3.33)$$

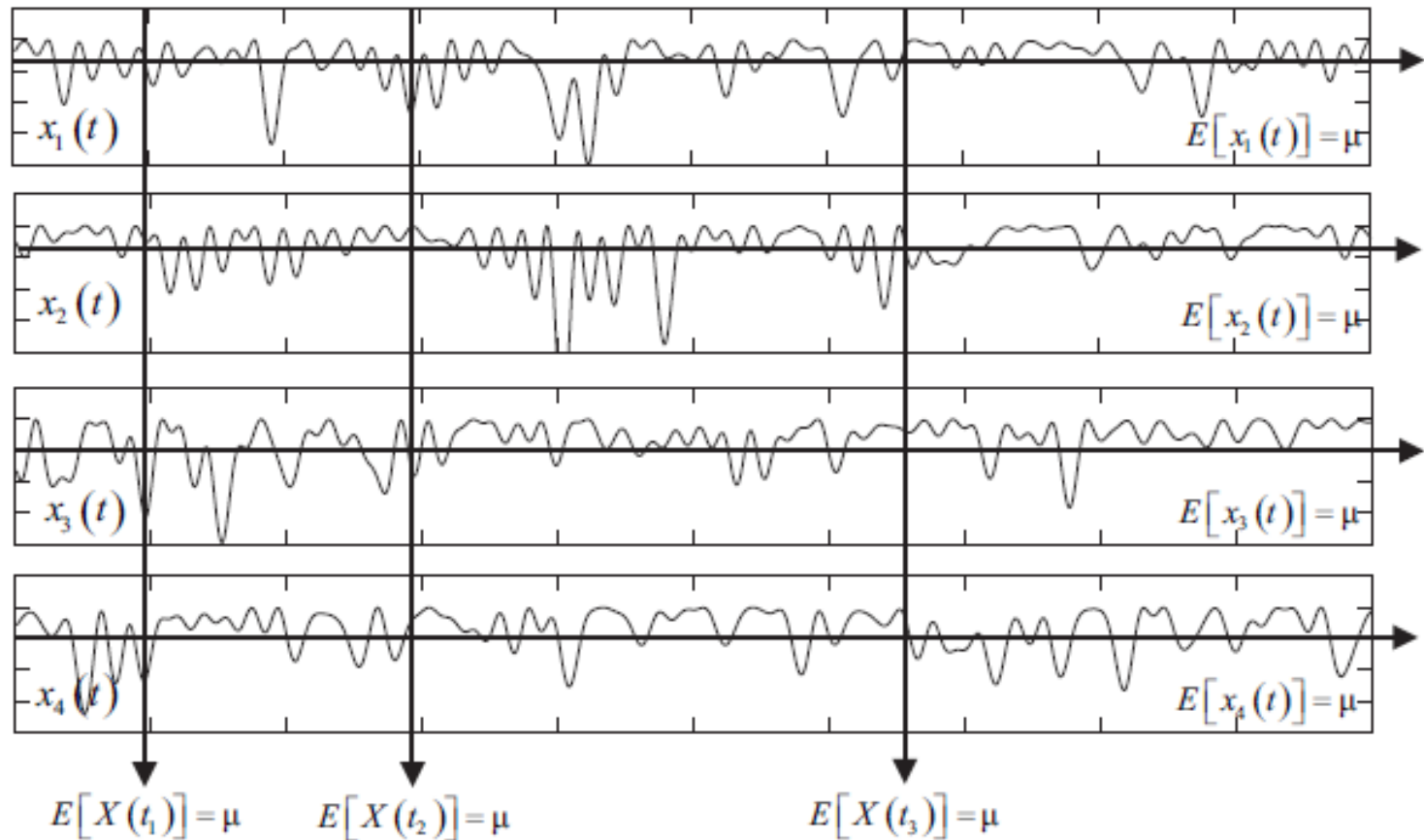
και ισχύει

$$R_X(\tau) = R_{x_i}(\tau), \quad (3.34)$$

τότε η  $X(t)$  είναι μία εργοδική διαδικασία ως προς τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Συνήθως, στις τηλεπικοινωνίες οι τυχαίες διαδικασίες θεωρούνται εργοδικές ως προς τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.



# Στάσιμες με την ευρεία έννοια και εργοδικές τυχαίες διαδικασίες (4)



Σχήμα 3.5: Εργοδική τυχαία διαδικασία



# Ιδιότητες συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (1)

Οι κύριες ιδιότητες της ΣΑΣ μίας ΣΕΕ τυχαίας διαδικασίας είναι οι εξής:

i) Από την (3.9) προκύπτει ότι η μέση τετραγωνική τιμή της  $X(t)$  είναι

$$\mathbb{E}[X^2(t)] = R_X(0). \quad (3.35)$$

Από τις (3.28) και (3.35) προκύπτει ότι σε μία ΣΕΕ τυχαία διαδικασία τόσο η μέση τιμή όσο και η μέση τετραγωνική τιμή είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

ii) Η ΣΑΣ είναι άρτια συνάρτηση. Δηλαδή ισχύει

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau). \quad (3.36)$$

iii) Η  $R_X(\tau)$  λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν  $\tau = 0$ .

iv) Αν οι συναρτήσεις-δείγματα της  $X(t)$  είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο  $T$ , τότε και η ΣΑΣ είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο.



# Ιδιότητες συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (2)

v) Αν  $t_1 = t_2 + \tau$ , οι ΣΕΣ δεν είναι άρτιες συναρτήσεις ως προς  $\tau$  όπως η ΣΑΣ ούτε λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους για  $\tau = 0$ .

Όμως ισχύει

$$R_{X_1, X_2}(\tau) = R_{X_2, X_1}(-\tau). \quad (3.37)$$

Εξετάζοντας από φυσική άποψη την  $R_X(\tau)$ , αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μία παράμετρος που περιγράφει την εξάρτηση δύο τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες προκύπτουν από τη δειγματοληψία της  $X(t)$  σε δύο χρονικές στιγμές που απέχουν μεταξύ τους κατά  $\tau$ .



# Ιδιότητες συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (3)

Αν η  $X(t)$  είναι μία Τ.Δ με μηδενική μέση τιμή, τότε για κάθε  $\tau$  ο λόγος

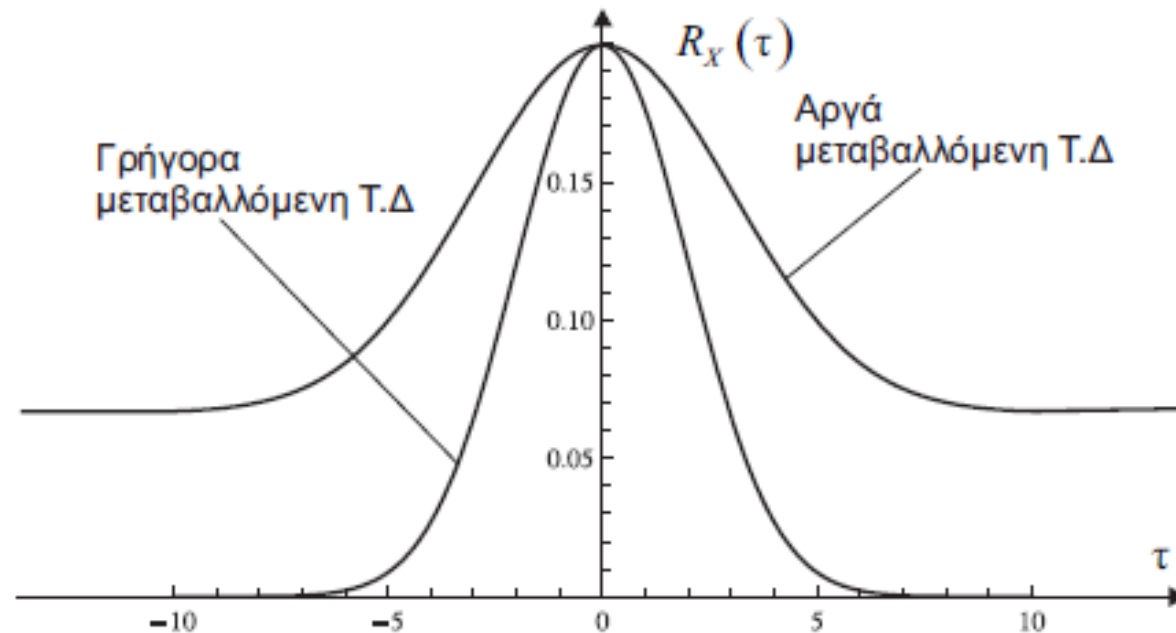
$$\rho = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} \quad (3.38)$$

είναι η σταθερά συσχέτισης (*correlation coefficient*) δύο Τ.Μ οι οποίες ανήκουν στη  $X(t)$  και απέχουν μεταξύ τους χρονικά κατά  $\tau$ .

Έτσι από την (3.38) προκύπτει ότι όσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται χρονικά η  $X(t)$ , τόσο περισσότερο μειώνεται η  $R_X(\tau)$  από τη μέγιστη τιμή της  $R_X(0)$  με αύξηση του  $\tau$  (Σχήμα 3.6).



# Ιδιότητες συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (4)



Σχήμα 3.6: Συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης αργά και γρήγορα μεταβαλλόμενης Τ.Δ



# Φασματική πυκνότητα ισχύος (1)

Η Φασματική πυκνότητα ισχύος-ΦΠΠ (*Power Spectral Density*) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και σημαντική παράμετρος, αφού περιγράφει στο πεδίο της συχνότητας μία στάσιμη (ή ΣΕΕ) τυχαία διαδικασία.

Η ΦΠΠ μίας ΣΕΕ τυχαίας διαδικασίας  $X(t)$  ορίζεται ως ο Μ/Σ Fourier της ΣΑΣ

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (3.51)$$

Αντίστροφα ισχύει

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (3.52)$$



# Φασματική πυκνότητα ισχύος (2)

Οι σχέσεις (3.51) και (3.52) είναι γνωστές ως σχέσεις **Weiner-Khinchine**. Από αυτές προκύπτουν οι παρακάτω γενικές ιδιότητες για την ΦΠΙ μίας ΣΕΕ τυχαίας διαδικασίας:

- i) Η τιμή της  $S_X(f)$  όταν  $f = 0$  αντιστοιχεί στη συνολική επιφάνεια της ΣΑΣ ως προς τον οριζόντιο άξονα  $t$

$$S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau. \quad (3.53)$$





# Φασματική πυκνότητα ισχύος (3)

ii) Η μέση τετραγωνική τιμή μίας ΣΕΕ τυχαίας διαδικασίας ισούται με τη συνολική επιφάνεια της ΦΠI ως προς τον οριζόντιο άξονα. Έτσι

$$\mathbb{E}[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df. \quad (3.54)$$

Η σχέση (3.54) προκύπτει από την (3.52) θέτοντας  $\tau = 0$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $R_X(0) = \mathbb{E}[X^2(t)]$ .

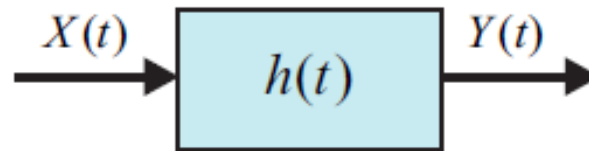
Η (κανονικοποιημένη) ισχύς είναι<sup>3</sup>

$$\mathcal{P}_X = \mathbb{E}[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df. \quad (3.55)$$



# Φασματική πυκνότητα ισχύος (4)

- iii) Η ΦΠ είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση της συχνότητας. Αυτό προκύπτει από το ότι η  $R_X(\tau)$  είναι πραγματική και άρτια.



Σχήμα 3.8: Διέλευση Τ.Δ μέσω γραμμικού φίλτρου



# Φασματική πυκνότητα ισχύος (5)

iv) Αν η  $X(t)$  είναι είσοδος σε ένα γραμμικό φίλτρο με κρουστική απόκριση  $h(t)$  και η  $Y(t)$  είναι η έξοδος αυτού (Σχήμα 3.8) τότε ισχύει

$$\mathcal{P}_Y = \mathbb{E}[Y^2(t)] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)|H(f)|^2 df \quad (3.56)$$

και

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2, \quad (3.57)$$

όπου  $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$ .

Σημειώστε ότι όλες οι παραπάνω ιδιότητες για τη ΦΠ ισχύουν μόνο για ΣΕΕ τυχαίες διαδικασίες.



# Παράδειγμα 3.6 (1)

## Παράδειγμα 3.6

Αν η  $X(t)$  είναι μία ΣΕΕ τυχαία διαδικασία να βρεθεί η ΣΑΣ και η ΦΠΠ της Τ.Δ

$$Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta), \quad (3.58)$$

όπου  $\Theta$  είναι Τ.Μ με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Δηλαδή η ΣΠΠ της  $\Theta$  δίνεται από τη σχέση

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.59)$$



# Παράδειγμα 3.6 (2)

Απάντηση

Η ΣΑΣ της  $Y(t)$  θα είναι

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \mathbb{E}[Y(t+\tau)Y(t)] \\ &= \mathbb{E}[X(t+\tau) \cos[2\pi f_c(t+\tau) + \Theta] X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Επειδή  $X(t)$  και  $\Theta$  είναι στατιστικά ανεξάρτητες θα ισχύει

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \mathbb{E}[X(t+\tau)X(t)] \mathbb{E}[\cos[2\pi f_c(t+\tau) + \Theta] \cos(2\pi f_c t + \Theta)] \\ &= \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_c \tau. \end{aligned}$$



# Παράδειγμα 3.6 (3)

Η ΦΠΠ θα είναι

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \mathcal{F}[R_Y(\tau)] \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}R_X(\tau) \cos 2\pi f_c \tau\right] \\ &= \frac{1}{4}[S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Από την (3.62) εξάγεται το συμπέρασμα ότι η ΦΠΠ της  $Y(t)$  αποτελείται από αντίγραφα της ΦΠΠ της διαδικασίας  $X(t)$  μετατοπισμένα στη συχνότητα  $f_c$ .



# Ετεροφασματική πυκνότητα ισχύος (1)

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η ΦΠΙ εκφράζει την κατανομή του συχνοτικού περιεχομένου μίας Τ.Δ. Η ετεροφασματική πυκνότητα ισχύος-ΕΠΙ (*Cross-spectral power density*) δύο ΣΕΕ Τ.Δ  $X(t)$  και  $Y(t)$  περιγράφει τη σχέση που έχουν οι δύο Τ.Δ στο πεδίο των συχνοτήτων.



# Ετεροφασματική πυκνότητα ισχύος (2)

Η ΕΠΙ δίνεται από τις σχέσεις

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.73)$$

$$S_{YX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (3.74)$$

Η ΕΠΙ είναι γενικά μιγαδικός αριθμός, ενώ στην περίπτωση που είναι πραγματικός μπορεί να είναι θετικός ή και αρνητικός.

Επειδή

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (3.75)$$

προκύπτει

$$S_{XY}(f) = S_{YX}(-f) = S_{YX}^*(f). \quad (3.76)$$

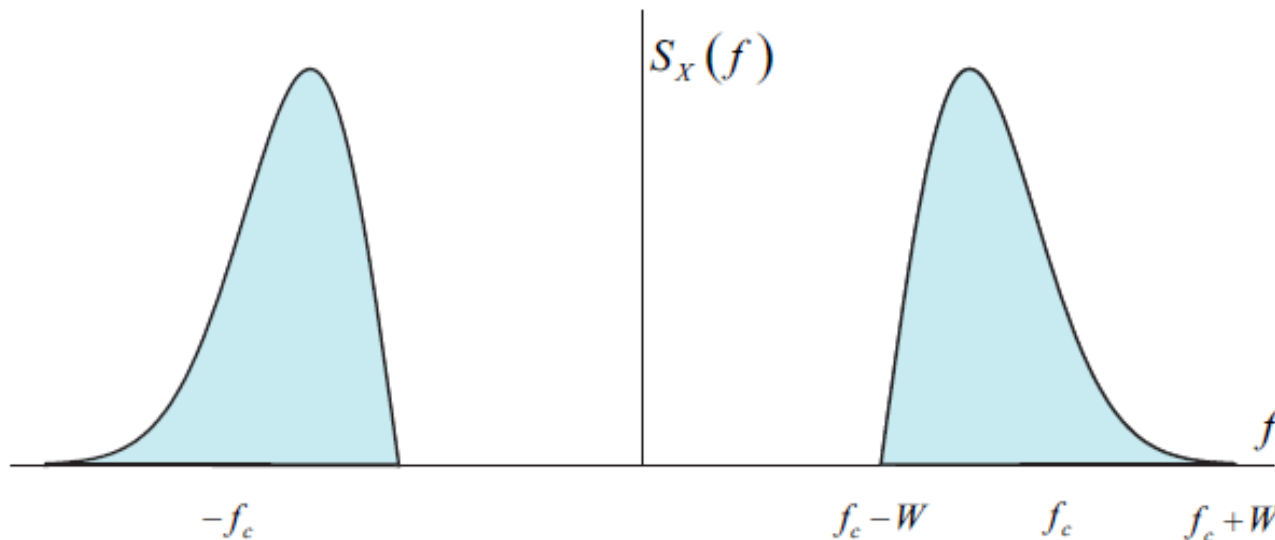




# Ζωνοπερατές τυχαίες διαδικασίες (1)

Μία Τ.Δ  $X(t)$  ονομάζεται ζωνοπερατή αν ισχύει (Σχήμα 3.10)

$$S_X(f) = 0, |f - f_c| \geq W. \quad (3.90)$$



Σχήμα 3.10: Ζωνοπερατή τυχαία διαδικασία

# Ζωνοπερατές τυχαίες διαδικασίες (2)

Ακολουθώντας παρόμοια ανάλυση με αυτή των ζωνοπερατών σημάτων (Κεφ. 2), μία ζωνοπερατή διαδικασία μπορεί να γραφτεί ως

$$X(t) = X_I(t) \cos 2\pi f_c t + X_Q(t) \sin 2\pi f_c t, \quad (3.91)$$

όπου  $X_I(t)$  και  $X_Q(t)$  είναι η συμφασική και η ορθογώνια συνιστώσα, αντίστοιχα.



# Ζωνοπερατές τυχαίες διαδικασίες (3)

Η ΦΠΠ των  $X_I(t)$  και  $X_Q(t)$  είναι

$$S_{X_I}(f) = S_{X_Q}(f) = \begin{cases} S_X(f + f_c) + S_X(f - f_c), & |f| \leq W \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (3.92)$$

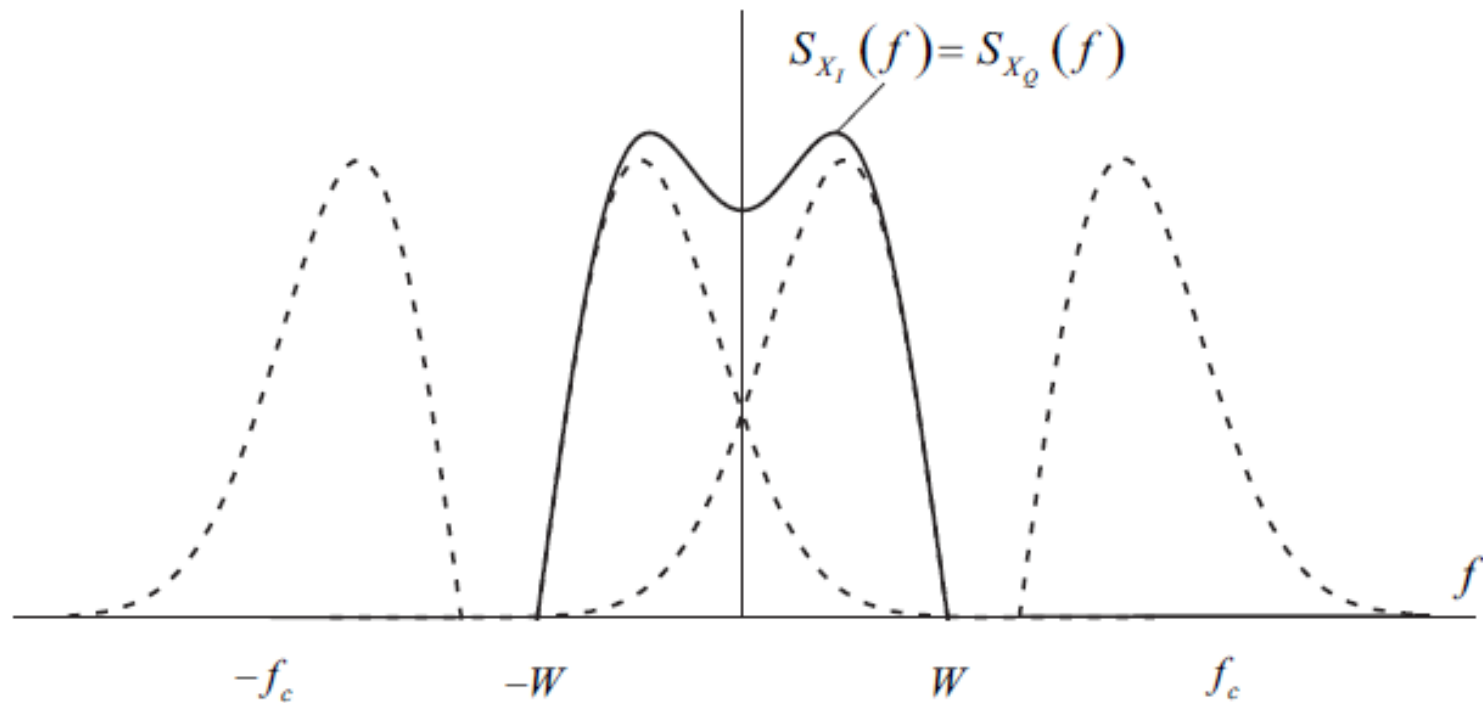
Από την (3.92) γίνεται φανερό ότι η  $S_{X_I}(f)$  και η  $S_{X_Q}(f)$  προκύπτουν με μετατόπιση αριστερά και δεξιά της  $S_X(f)$  κατά  $f_c$  (Σχήμα 3.11).

Σημειώστε ότι ισχύει

$$\mathbb{E}[X_I(t)] = \mathbb{E}[X_Q(t)] = \mathbb{E}[X(t)]. \quad (3.93)$$



# Ζωνοπερατές τυχαίες διαδικασίες (4)



Σχήμα 3.11: Ζωνοπερατή τυχαία διαδικασία



# Θόρυβος (1)

- Ο θόρυβος είναι η κυριότερη αιτία υποβάθμισης της ποιότητας επικοινωνίας, αφού εισάγει αβεβαιότητα στην διαδικασία ανάκτησης από το δέκτη της εκπεμπόμενης πληροφορίας
  - Θερμικός θόρυβος (Thermal noise) ή Θόρυβος Johnson
  - Θόρυβος Schottky ή Θόρυβος βολής
  - Παρεμβολή



# Θόρυβος (2)

Οι διάφοροι τύποι θορύβου διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- i. *Προσθετικός θόρυβος.* Στην περίπτωση αυτή το λαμβανόμενο σήμα και ο θόρυβος προστίθενται στο δέκτη. Δηλαδή

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad (3.94)$$

όπου  $r(t)$  είναι το λαμβανόμενο σήμα,  $s(t)$  το σήμα πληροφορίας και  $n(t)$  ο θόρυβος.

- ii. *Πολλαπλασιαστικός θόρυβος.* Ο θόρυβος επιδρά πολλαπλασιαστικά

$$r(t) = s(t) \times a(t). \quad (3.95)$$

Ο παράγοντας  $a(t)$  χαρακτηρίζει την τυχαία μεταβολή του καναλιού και η επίδρασή του στο σήμα πληροφορίας είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερη από αυτή του προσθετικού θορύβου. Τέτοια περίπτωση είναι οι *διαλείψεις (fading)* σε ασύρματα κανάλια.



# Θερματικός Θόρυβος (1)

Ο Θερμικός θόρυβος (*Thermal noise*) ή Θόρυβος *Johnson* μελετήθηκε από τους **Johnson** και **Nyquist** το 1928 σε μεταλλικούς αγωγούς.

Αν  $v(t)$  είναι η στιγμιαία τάση στα άκρα ενός αγωγού με αντίσταση  $R$  Ohm εξαιτίας της κίνησης των ηλεκτρονίων, η  $v(t)$  είναι τυχαία διαδικασία και τα δείγματα αυτής είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν **Gaussian** κατανομή με μέση τιμή μηδέν και ΣΠΠ

$$f_v(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.96)$$

όπου  $\sigma^2$  είναι η διακύμανση της κατανομής.



# Θερματικός Θόρυβος (2)

Από τις εργασίες των Johnson και Nyquist αποδείχθηκε ότι

$$\sigma^2 \triangleq \mathbb{E}[x^2] = e_n^2 = 4kTRW, \quad (3.97)$$

όπου

$k$  είναι η σταθερά Boltzmann, με  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  Joule/°K,

$T$  είναι η θερμοκρασία της αντίστασης σε °K,

$W$  είναι το εύρος ζώνης των συχνοτήτων λειτουργίας σε Hz και

$e_n$  είναι η τάση μίας ισοδύναμης πηγής θορύβου. Η  $e_n$  έχει νόημα ως “μέση τετραγωνική τιμή” των διακυμάνσεων του θορύβου. Εκφράζεται σε V rms, όπου rms είναι η συντομογραφία της root mean square.

Η ισχύς του θορύβου είναι

$$\mathcal{P}_n = \frac{\sigma^2}{R} = \frac{e_n^2}{R} = 4kTW. \quad (3.100)$$





# Λευκός Θόρυβος

Ο θόρυβος ο οποίος παρουσιάζει την ιδιότητα του επίπεδου φάσματος ονομάζεται λευκός θόρυβος (*white noise*), σε αντιστοιχία με το λευκό φως το οποίο σε κάθε περιοχή  $\Delta f$  του φάσματος παρουσιάζει την ίδια ενέργεια.

Η ΦΠΙ της Τ.Δ του λευκού θορύβου  $N(t)$  δίνεται από τη σχέση

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}, \quad f \in (-\infty, +\infty), \quad (3.101)$$

όπου  $N_0 = kT$ .



# Ιδιότητες Λευκού Θορύβου (1)

Οι βασικές ιδιότητες του λευκού θορύβου είναι οι εξής:

- i) Ο λευκός θόρυβος, ανεξάρτητα αν ακολουθεί ή όχι **Gaussian** στατιστική, αποτελεί μία ιδανική περίπτωση τυχαίας διαδικασίας αφού η ισχύς του είναι άπειρη. Όμως η χρησιμότητά του οφείλεται στο γεγονός ότι αν ο θόρυβος αυτός διέλθει μέσα από ένα γραμμικό φίλτρο με απόκριση συχνότητας  $H(f)$  για το οποίο ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df < \infty, \quad (3.102)$$

τότε η έξοδος του φίλτρου είναι μία στάσιμη διαδικασία θορύβου  $N(t)$  με μηδενική μέση τιμή.



# Ιδιότητες Λευκού Θορύβου (2)

Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη μελέτη των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων, αφού στην πράξη τα περισσότερα είναι ζωνοπερατά και η τιμή της  $|H(f)|$  είναι πεπερασμένη. Έτσι αν ο θόρυβος παρουσιάζει επίπεδο φάσμα στην περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως λευκή διαδικασία προκειμένου να απλοποιηθεί η ανάλυση.



# Ιδιότητες Λευκού Θορύβου (3)

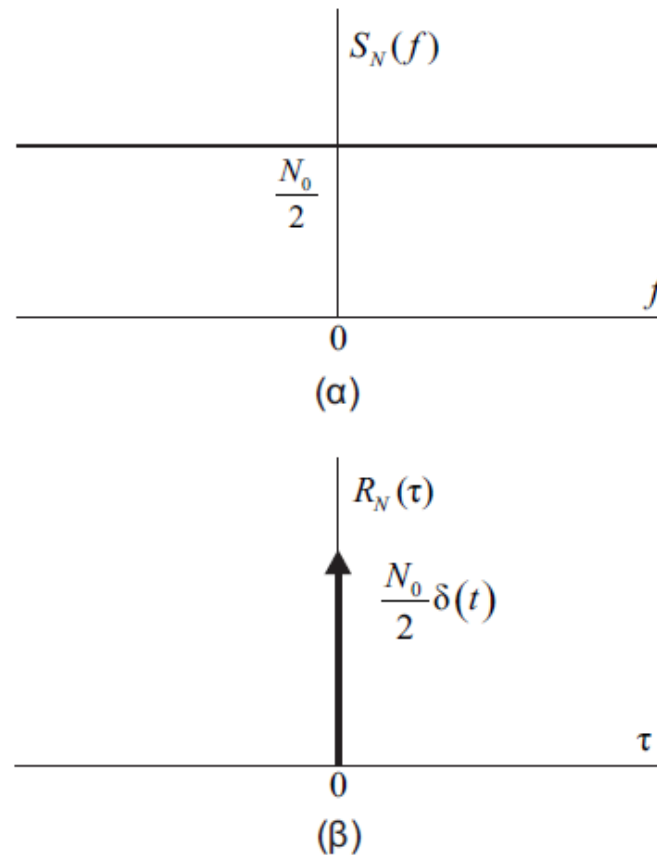
- ii) Από την (3.101) προκύπτει ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της  $N(t)$  δίνεται από τη σχέση

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau). \quad (3.103)$$

Η ΦΠΙ και η ΣΑΣ του λευκού θορύβου σχεδιάζονται στο Σχήμα 3.12. Η σχέση (3.103) δεν αντιστοιχεί σε ένα φυσικό φαινόμενο αλλά -όπως θα αναφερθεί στη συνέχεια- είναι ένα ιδιαίτερα χρήσιμο αποτέλεσμα για τη μελέτη των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων σε περιβάλλον λευκού θορύβου.



# Ιδιότητες Λευκού Θορύβου (4)



Σχήμα 3.12: (α) Φασματική πυκνότητα ισχύος και (β) συνάρτηση αυτοσυσχέτισης λευκού θορύβου

# Ιδιότητες Λευκού Θορύβου (5)

iii) Από την (3.103) και το Σχήμα 3.12β συνάγεται ότι δύο δείγματα λευκού θορύβου είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα, ανεξάρτητα της χρονικής τους απόστασης. Επίσης ισχύει  $R_N(\tau) = 0$  για  $\tau \neq 0$ .

Η απόλυτη έλλειψη συσχέτισης μεταξύ των δειγμάτων του λευκού θορύβου μπορεί να διαπιστωθεί και με το εξής πείραμα: Αν παρατηρηθεί σε παλμογράφο ένα αιτιοκρατικό σήμα (π.χ. ένα ημιτονοειδές), τότε αλλάζοντας το χρόνο σάρωσης η κυματομορφή φαίνεται να ανοίγει και να κλείνει.

Αυτό όμως δε συμβαίνει όταν παρατηρείται λευκός θόρυβος, όπου ανεξάρτητα από το χρόνο σάρωσης η κυματομορφή του θορύβου εμφανίζεται σχεδόν με τον ίδιο τρόπο.



# Ιδιότητες Λευκού Θορύβου (6)

iv) Λευκός και **Gaussian** θόρυβος είναι δύο διαφορετικές έννοιες οι οποίες μπορεί ή όχι να συνυπάρχουν. Δηλαδή ο λευκός θόρυβος μπορεί να μην είναι **Gaussian** και αντίστροφα ο **Gaussian** θόρυβος μπορεί να μην είναι λευκός. Αν μία λευκή διαδικασία είναι **Gaussian** τότε ο θόρυβος αναφέρεται ως λευκός *Gaussian* θόρυβος (*white Gaussian noise-WGN*).

Ο WGN αποτελεί ακραία περίπτωση τυχαιότητας (*randomness*) μίας διαδικασίας, αφού τα δείγματα -επιπλέον της έλλειψης συσχέτισης- είναι και στατιστικά ανεξάρτητα.



# Ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου (1)

Το *ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου* είναι το εύρος ζώνης ενός ιδανικού φίλτρου που αφήνει να διέλθει ισχύ θορύβου ίση με αυτή που επιτρέπει η διάταξη-φίλτρο, αν στην είσοδο υπάρχει ο ίδιος λευκός θόρυβος.

Το ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου ενός φίλτρου με απόκριση συχνότητας  $H(f)$  δίνεται ως

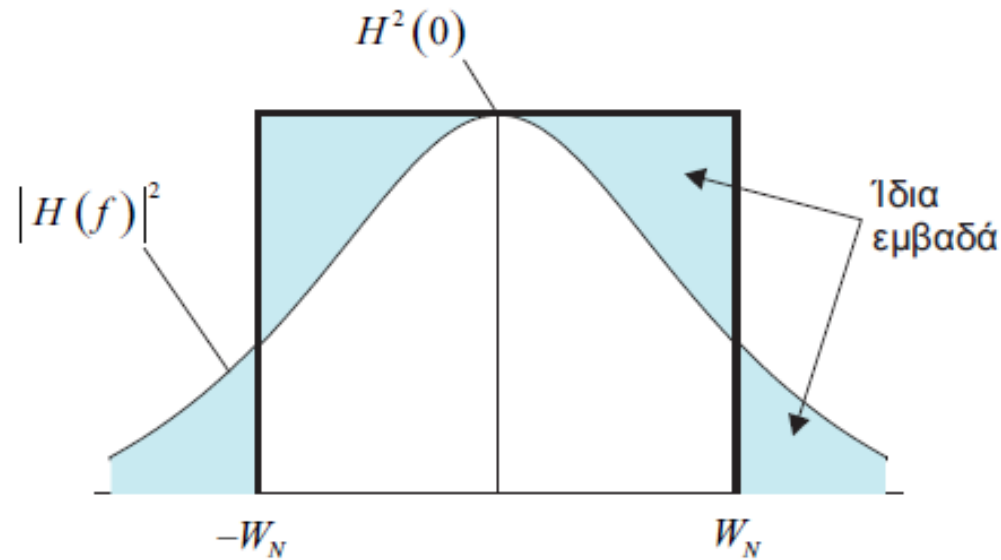
$$W_N = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{H^2(0)} \quad (3.115)$$

και περιγράφεται γραφικά στο Σχήμα 3.15.





# Ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου (2)

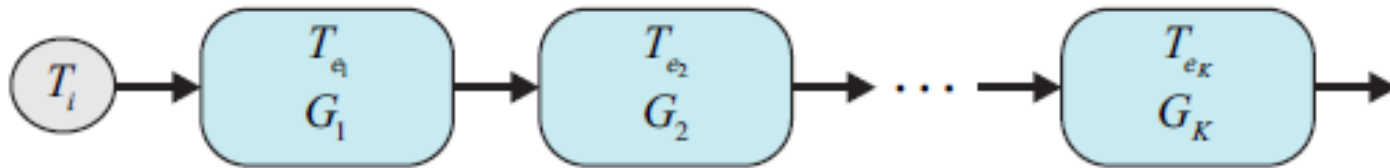


Σχήμα 3.15: Απόκριση συχνότητας φίλτρου και ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου



# Εικόνα και ενεργός θερμοκρασία θορύβου (1)

Οι δέκτες των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων αποτελούνται από διάφορες βαθμίδες οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως τετράπολα σε σειρά. Κάθε ένα από αυτά παράγει εσωτερικό θόρυβο ο οποίος επιδρά αρνητικά στην ποιότητα του σήματος στην έξοδο του δέκτη.



Σχήμα 3.16: Σύστημα τετραπόλων σε σειρά

# Εικόνα και ενεργός θερμοκρασία θορύβου (2)

Η γνώση της σηματοθορυβικής σχέσης ή λόγος σήματος- πρὸς- θόρυβο (*signal-to-noise ratio, SNR*) στις διάφορες βαθμίδες επιτρέπει την παρακολούθηση της συμβολής αυτών στον ολικό θόρυβο του συστήματος, έτσι ώστε με κατάλληλη σχεδίαση των διατάξεων να ελαχιστοποιείται η επίδραση του θορύβου στη συνολική επίδοση του συστήματος.

Η σηματοθορυβική σχέση ορίζεται ως ο λόγος της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου

$$\text{SNR} = \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_N}. \quad (3.119)$$



# Εικόνα θορύβου (1)

Μία χρήσιμη παράμετρος που εκφράζει το θόρυβο που προσθέτει το τετράπολο είναι η *εικόνα θορύβου* (*noise figure*)<sup>4</sup>, η οποία ορίζεται ως

$$F = \frac{(\text{SNR})_i}{(\text{SNR})_o}, \quad F \geq 1, \quad (3.120)$$

όπου  $(\text{SNR})_i$  και  $(\text{SNR})_o$  είναι η σηματοθορυβική σχέση στην είσοδο και την έξοδο του τετραπόλου αντίστοιχα. Έτσι, για ένα ιδανικό τετράπολο (που δεν δημιουργεί θόρυβο) θα ισχύει  $F = 1$ . Στην (3.120) τα  $(\text{SNR})_i$  και  $(\text{SNR})_o$  είναι καθαροί αριθμοί ενώ συνήθως η εικόνα θορύβου εκφράζεται σε dB.



# Εικόνα θορύβου (2)

Αν το κέρδος ενίσχυσης του τετράπολου είναι  $G$  τότε

$$F = \frac{(\text{SNR})_i}{(\text{SNR})_o} = \frac{\frac{\mathcal{P}_{s_i}}{\mathcal{P}_{N_i}}}{\frac{G\mathcal{P}_{s_i}}{G\mathcal{P}_{N_i} + \mathcal{P}_N}} = \frac{G\mathcal{P}_{N_i} + \mathcal{P}_N}{G\mathcal{P}_{N_i}} = \frac{\mathcal{P}_{N_o}}{G\mathcal{P}_{N_i}}, \quad (3.121)$$

όπου  $\mathcal{P}_{s_i}$  είναι η ισχύς του σήματος,  $\mathcal{P}_{N_i}$  η ισχύς του θορύβου στην είσοδο του τετραπόλου,  $\mathcal{P}_N$  η ισχύς του θορύβου που παράγει εσωτερικά το τετράπολο και  $\mathcal{P}_{N_o} = G\mathcal{P}_{N_i} + \mathcal{P}_N$  η ολική ισχύς θορύβου στην έξοδο του τετραπόλου.



# Εικόνα θορύβου (3)

Αν η (3.121) γραφτεί ως

$$F = 1 + \frac{P_N}{G P_{N_i}}, \quad (3.122)$$

τότε μπορούν να γίνουν οι εξής παρατηρήσεις σχετικά με το κέρδος ενίσχυσης:

- Αν το  $G$  λαμβάνει μεγάλες τιμές τότε ο θόρυβος που προσθέτει το τετράπολο είναι αμελητέος και επηρεάζει ελάχιστα την επίδοση του συστήματος.
- Αν  $G < 1$ , δηλαδή υπάρχει εξασθένιση αντί για ενίσχυση, τότε η  $F$  μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές. Στην περίπτωση αυτή ακόμα και ένας θόρυβος μικρής ισχύος από το τετράπολο επηρεάζει σημαντικά την ποιότητα του σήματος στην έξοδο αυτού. Συνήθως για την εξασθένιση αντί του κέρδους χρησιμοποιείται ο συντελεστής εξασθένισης  $L = \frac{1}{G}$ .



# Εικόνα θορύβου (4)

- Συμπερασματικά, αυτό που επηρεάζει την επίδοση του συστήματος δεν είναι η απόλυτη τιμή της ισχύος του θορύβου που παράγει εσωτερικά το τετράπολο, αλλά η σχετική τιμή του  $\mathcal{P}_N$  ως προς το  $\mathcal{P}_{N_i}$  που καθορίζει ο λόγος  $\frac{\mathcal{P}_N}{G\mathcal{P}_{N_i}}$ .



# Ενεργός θερμοκρασία θορύβου (1)

Πολλές φορές η εικόνα θορύβου  $F$  δεν είναι χρήσιμη για την αναπαράσταση του πρόσθετου θορύβου που εισάγει ένα τετράπολο στο σύστημα, οπότε στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται η ενεργός θερμοκρασία θορύβου  $T_e$ . Αυτή ορίζεται ως η θερμοκρασία μίας θερμικής πηγής (π.χ. μίας αντίστασης), η οποία αν τοποθετηθεί στην είσοδο ενός τετραπόλου με μηδενικό θόρυβο θα δώσει στην έξοδο αυτού πρόσθετη ισχύ θορύβου ίση με αυτή που παράγει εσωτερικά το τετράπολο.





# Ενεργός θερμοκρασία θορύβου (2)

Έτσι στην είσοδο του τετραπόλου θα υπάρχει μία πρόσθετη θερμοκρασία  $T_e$ ,  
οπότε η ισχύς του θορύβου στην έξοδο αυτού θα είναι

$$\mathcal{P}_{N_o} = GkW_N(T_i + T_e), \quad (3.123)$$

όπου  $W_N$  είναι το ισοδύναμο εύρος ζώνης του θορύβου και  $T_i$  η θερμοκρασία  
θορύβου της πηγής στην είσοδο του τετραπόλου.



# Ενεργός θερμοκρασία θορύβου (3)

$$F = \frac{(\text{SNR})_i}{(\text{SNR})_o} = \frac{\frac{\mathcal{P}_{s_i}}{\mathcal{P}_{N_i}}}{\frac{G\mathcal{P}_{s_i}}{G\mathcal{P}_{N_i} + \mathcal{P}_N}} = \frac{G\mathcal{P}_{N_i} + \mathcal{P}_N}{G\mathcal{P}_{N_i}} = \frac{\mathcal{P}_{N_o}}{G\mathcal{P}_{N_i}}, \quad (3.121)$$

Από τις (3.121) και (3.123) προκύπτει

$$F = \frac{\mathcal{P}_{N_o}}{G\mathcal{P}_{N_i}} = \frac{GkW_N(T_i + T_e)}{GkW_N T_i} = 1 + \frac{T_e}{T_i} \quad (3.124)$$

ή

$$T_e = (F - 1)T_i. \quad (3.125)$$



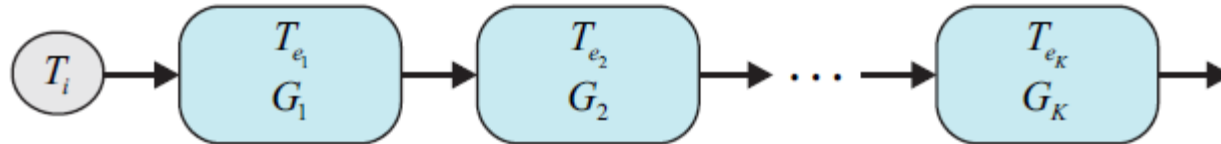
# Σύστημα τετράπολων σε σειρά (1)

Αν ο δέκτης αποτελείται από  $K$  τετράπολα (βαθμίδες) σε σειρά, κάθε ένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από την ενεργό θερμοκρασία θορύβου  $T_{e_j}$  και από κέρδος ενίσχυσης  $G_j$  (Σχήμα 3.16), τότε η συνολική ενίσχυση του συστήματος θα είναι

$$G_T = \prod_{j=1}^K G_j. \quad (3.137)$$



# Σύστημα τετράπολων σε σειρά (2)



Σχήμα 3.16: Σύστημα τετραπόλων σε σειρά

Προκειμένου να βρεθεί η συνολική ενεργός θερμοκρασία θορύβου στην έξοδο του συστήματος θα χρησιμοποιηθεί η (3.123)

$$\mathcal{P}_{N_o} = G_T k W_N (T_i + T_e). \quad (3.138)$$



# Σύστημα τετράπολων σε σειρά (3)

Κάθε βαθμίδα του συστήματος ενισχύει τους θορύβους στην είσοδο αυτής και προσθέτει το δικό της θόρυβο. Έτσι, ο θόρυβος κάθε βαθμίδας θα ενισχύεται από όλες τις βαθμίδες που ακολουθούν. Αν θεωρηθεί ότι όλες οι βαθμίδες έχουν ίδιο  $W_N$  τότε

$$\mathcal{P}_{N_o} = G_T k W_N (T_i + T_e) \quad (3.139)$$

ή

$$\mathcal{P}_{N_o} = k W_N (G_1 G_2 \dots G_K T_i + G_1 G_2 \dots G_K T_{e_1} + G_2 G_3 \dots G_K T_{e_2} + \dots + G_K T_{e_K}). \quad (3.140)$$



# Σύστημα τετράπολων σε σειρά (4)

Από τις (3.123) και (3.140) θα ισχύει

$$T_e = T_{e_1} + \frac{T_{e_2}}{G_1} + \frac{T_{e_3}}{G_1 G_2} + \dots + \frac{T_{e_K}}{\prod_{j=1}^{K-1} G_j}, \quad (3.141)$$

οπότε η εικόνα θορύβου του συστήματος θα είναι

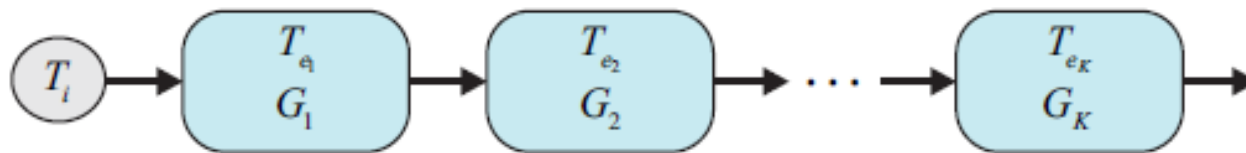
$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_K - 1}{\prod_{j=1}^{K-1} G_j}. \quad (3.142)$$

Η (3.142) αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως *σχέση του Friis*.



# Σύστημα τετράπολων σε σειρά (5)

Από τις (3.141) και (3.142) γίνεται φανερό ότι σε ένα δέκτη σημαντικό ρόλο παίζει η πρώτη βαθμίδα ενίσχυσης (ή διαφορετικά ο προενισχυτής), αφού ο θόρυβος που αυτή εισάγει επηρεάζει αποφασιστικά την όλη συμπεριφορά του συστήματος. Για το λόγο αυτό σε πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιούνται ως πρώτη βαθμίδα ενίσχυσης ενισχυτές χαμηλού θορύβου (*Low-noise amplifiers-LNA*).



Σχήμα 3.16: Σύστημα τετραπόλων σε σειρά



# Ζωνοπερατός θόρυβος (1)

Η χρησιμοποίηση των ζωνοπερατών φίλτρων έχει ως αποτέλεσμα ο θόρυβος στις διάφορες βαθμίδες του δέκτη να είναι ζωνοπερατός, ανεξάρτητα αν στην είσοδό του έχει μεγάλο εύρος ζώνης ή ακόμα και αν θεωρείται λευκός.

Έστω  $N(t)$  η διαδικασία που περιγράφει το θόρυβο στην έξοδο του ζωνοπερατού φίλτρου, στην είσοδο του οποίου υπάρχει η Τ.Δ λευκού θορύβου  $X(t)$  με ΦΠΠ  $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$ .

Τότε η ΦΠΠ της  $N(t)$  θα είναι

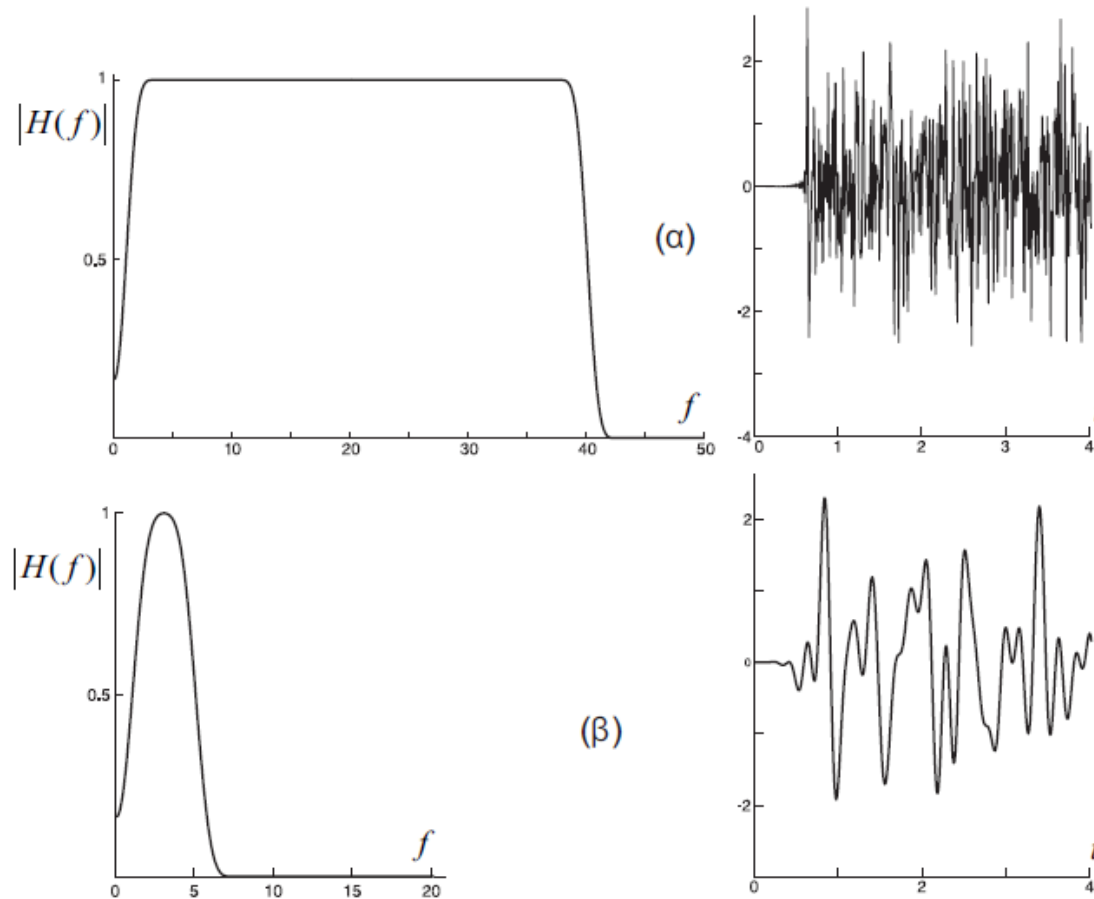
$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2, \quad (3.143)$$

όπου  $H(f)$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοπερατού φίλτρου.





# Ζωνοπερατός θόρυβος (2)



Σχήμα 3.17: Απόκριση συχνότητας και θόρυβος στην έξοδο φίλτρου (α) μεγάλου εύρους ζώνης και (β) μικρού εύρους ζώνης

# Ανάλυση ζωνοπερατού θορύβου (1)

Αν  $n(t)$  είναι ένα δείγμα της διαδικασίας ζωνοπερατού θορύβου  $N(t)$  με κεντρική συχνότητα  $f_c$ , τότε -ακολουθώντας παρόμοια ανάλυση με αυτή των ζωνοπερατών σημάτων του Κεφ. 2- η  $n(t)$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} n(t) &= \operatorname{Re} \left\{ [n_I(t) + jn_Q(t)]e^{j2\pi f_c t} \right\} \\ &= n_I(t) \cos 2\pi f_c t - n_Q(t) \sin 2\pi f_c t, \end{aligned} \quad (3.144)$$

όπου  $n_I(t)$  και  $n_Q(t)$  είναι η συμφασική και ορθογώνια συνιστώσα της  $n(t)$ .



# Ανάλυση ζωνοπερατού θορύβου (2)

Οι  $n_I(t)$  και  $n_Q(t)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$n_I(t) = n(t) \cos 2\pi f_c t + \hat{n}(t) \sin 2\pi f_c t \quad (3.145)$$

και

$$n_Q(t) = \hat{n}(t) \cos 2\pi f_c t - n(t) \sin 2\pi f_c t, \quad (3.146)$$

όπου  $\hat{n}(t)$  είναι ο Μ/Σ Hilbert της  $n(t)$ .



# Ανάλυση ζωνοπερατού θορύβου (3)

Επειδή η (3.144) ισχύει για κάθε συνάρτηση δείγμα της  $N(t)$  μπορεί να γραφτεί ως

$$N(t) = N_I(t) \cos 2\pi f_c t - N_Q(t) \sin 2\pi f_c t. \quad (3.147)$$

Οι  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  είναι Τ.Δ βασικής ζώνης, ενώ οι  $n_I(t)$  και  $n_Q(t)$  είναι συναρτήσεις-δείγματα των  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  αντίστοιχα. Η σχέση (3.147) ονομάζεται *κανονική αναπαράσταση (canonical representation)* της  $N(t)$ .



# Ιδιότητες ζωνοπερατού θορύβου (1)

Οι βασικές ιδιότητες του ζωνοπερατού θορύβου είναι:

- i) Η σχέση (3.152) υποδηλώνει ότι η  $N(t)$  παρουσιάζει αλλαγές τόσο στο πλάτος όσο και στη φάση.
- ii) Αν η  $N(t)$  είναι Gaussian, τότε οι  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  θα είναι συνδυασμένες Gaussian Τ.Δ.
- iii) Αν η  $N(t)$  έχει μηδενική μέση τιμή, το ίδιο ισχύει και για τις  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$ . Η απόδειξη δίνεται στη συνέχεια σε παράδειγμα.
- iv) Αν η  $N(t)$  είναι ΣΕΕ τότε και οι  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  θα είναι ΣΕΕ.



# Ιδιότητες ζωνοπερατού θορύβου (2)

v) Οι  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  έχουν την ίδια ΦΠΙ, η οποία συνδέεται με τη ΦΠΙ της  $N(t)$  από τη σχέση

$$S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f) = \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c), & |f| \leq W \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (3.153)$$

όπου η  $S_N(f)$  συγκεντρώνεται στην περιοχή του φάσματος

$$f_c - W \leq |f| \leq f_c + W, \quad f_c \gg W. \quad (3.154)$$

vi) Αν η  $N(t)$  έχει μηδενική μέση τιμή, τότε οι  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  έχουν την ίδια διακύμανση με αυτή της  $N(t)$ .



# Ιδιότητες ζωνοπερατού θορύβου (3)

- vii) Αν η  $N(t)$  είναι Gaussian με μηδενική μέση τιμή και η  $S_N(f)$  είναι τοπικά συμμετρικά τοποθετημένη γύρω από την  $\pm f_c$ , τότε οι  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  είναι στατιστικά ανεξάρτητες.
- viii) Για τις διαφασματικές πυκνότητες ισχύος των  $N_I(t)$  και  $N_Q(t)$  ισχύει

$$S_{N_I N_Q}(f) = -S_{N_Q N_I}(f) = \begin{cases} j[S_N(f + f_c) - S_N(f - f_c)], & |f| \leq W \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (3.155)$$

- ix) Για ένα τυχαίο ζωνοπερατό σήμα η κεντρική συχνότητα  $f_c$  μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα, οπότε από την (3.153) συνάγεται ότι το φάσμα των  $S_{N_I}$  και  $S_{N_Q}$  εξαρτάται από την τιμή της  $f_c$ . Έτσι, η κανονική αναπαράσταση της Τ.Δ που αναφέρθηκε προηγουμένως δεν είναι μοναδική.



# Στατιστική της περιβάλλουσας και της φάσης ζωνοπερατού θορύβου (1)

Προηγουμένως αναφέρθηκε ότι μία ζωνοπερατή Τ.Δ θορύβου  $N(t)$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της περιβάλλουσας και της φάσης αυτής ως

$$N(t) = V(t) \cos[2\pi f_c t + \Theta(t)] \quad (3.161)$$

και

$$N_I(t) = V(t) \cos \Theta(t), \quad N_Q(t) = V(t) \sin \Theta(t). \quad (3.162)$$

$$V(t) = \sqrt{N_I^2(t) + N_Q^2(t)} \quad (3.163)$$

$$\Theta(t) = \arctan \left[ \frac{N_Q(t)}{N_I(t)} \right]. \quad (3.164)$$





# Στατιστική της περιβάλλουσας και της φάσης ζωνοπερατού θορύβου (2)

Αν η  $N(t)$  είναι **Gaussian** αποδεικνύεται ότι η Τ.Μ  $V$  που προκύπτει από τη δειγματοληψία της  $V(t)$  σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  ακολουθεί κατανομή **Rayleigh** με ΣΠΠ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$f_V(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0. \quad (3.165)$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι η Τ.Μ  $\Theta$  που προκύπτει από τη δειγματοληψία της  $\Theta(t)$  σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , είναι στατιστικά ανεξάρτητη από τη  $V$  και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με ΣΠΠ

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3.166)$$



# Στατιστική της περιβάλλουσας και της φάσης ζωνοπερατού θορύβου (3)

Αν η  $N(t)$  είναι ζωνοπερατή Gaussian T.Δ με κεντρική συχνότητα  $f_c$ , τότε παρουσιάζει ενδιαφέρον η εύρεση της στατιστικής της περιβάλλουσας της T.Δ

$$X(t) = A \cos 2\pi f_c t + N(t), \quad (3.167)$$

όπου  $A$  είναι μία σταθερά.

Αν  $V(t)$  είναι η περιβάλλουσα της  $X(t)$ , ο S. O. Rice<sup>6</sup> απέδειξε ότι αυτή ακολουθεί την κατανομή Rice (ονομάστηκε έτσι προς τιμή του) με ΣΠΠ που δίνεται από τη σχέση

$$f_V(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right), \quad (3.168)$$

όπου  $I_0(z)$  είναι συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.



# Στατιστική της περιβάλλουσας του αθροίσματος ημιτονοειδούς σήματος και ζωνοπερατού Gaussian θορύβου (1)

Από τη σχέση (3.168) προκύπτουν για τη κατανομή Rice τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Αν  $A = 0$  τότε επειδή ισχύει  $I_0(0) = 1$ , η ΣΠΠ της κατανομής Rice γράφεται ως

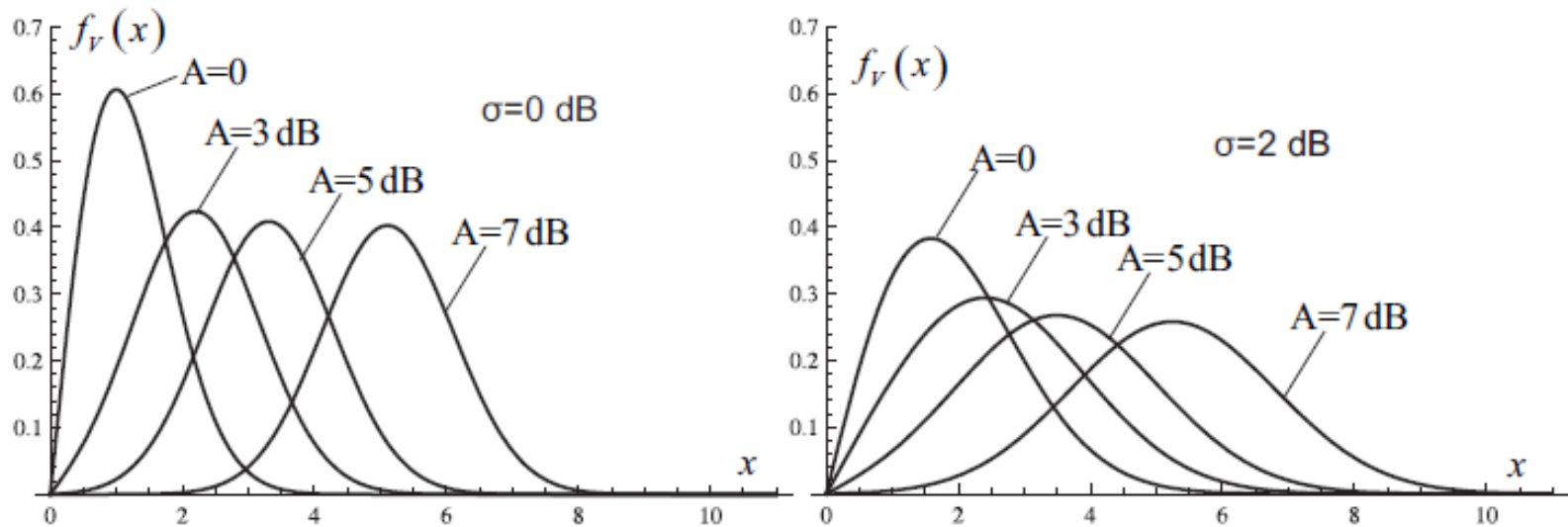
$$f_V(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.169)$$

δηλαδή -όπως αναμενόταν- γίνεται Rayleigh.

- Για πολύ μεγάλες τιμές του  $z$  ισχύει ότι  $I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$  και η Rice κατανομή γίνεται Gaussian. Αυτό γίνεται φανερό και στο Σχήμα 3.21, όταν  $A = 7$  dB.



# Στατιστική της περιβάλλουσας του αθροίσματος ημιτονοειδούς σήματος και ζωνοπερατού Gaussian θορύβου (2)



Σχήμα 3.21: Κατανομή Rice



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη [εδώ](#).





# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Παναγιώτης Μαθιόπουλος. Παναγιώτης Μαθιόπουλος. «Συστήματα Επικοινωνιών. Τυχαίες διαδικασίες και θόρυβος». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI114>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

## **Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**

"Η δομή και οργάνωση της παρουσίασης, καθώς και το υπόλοιπο περιεχόμενο, αποτελούν πνευματική ιδιοκτησία του συγγραφέα και του Πανεπιστημίου Αθηνών και διατίθενται με άδεια Creative Commons Αναφορά Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή Έκδοση 4.0 ή μεταγενέστερη.

Οι Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/φωτογραφίες που περιέχονται στην παρουσίαση αποτελούν πνευματική ιδιοκτησία τρίτων. Απαγορεύεται η αναπαραγωγή, αναδημοσίευση και διάθεσή τους στο κοινό με οποιονδήποτε τρόπο χωρίς τη λήψη άδειας από τους δικαιούχους. "

