Υπολογιστική Γεωμετρία: Εργασία 4

Τελική έκδοση 12/05/2015. Παράδοση: **Πέμ. 21/5/2015**, 2.00μμ στο eclass

Διδάσκων: Καθηγητής Ιωάννης Εμίρης

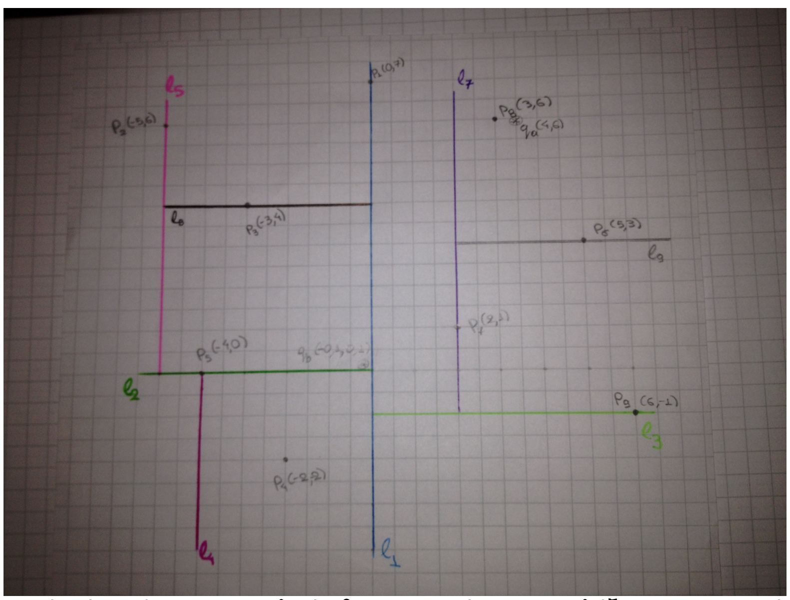
Οι ασκήσεις αφορούν Προ-πτυχιακούς και Μετ-απτυχιακούς εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

1. kd-δένδρα

Δίνονται 10 σημεία στο $\mathbb{R}^2$: $p_1 = (0, 7)$, $p_2 = (-5, 6)$, $p_3 = (-3, 4)$, $p_4 = (-2, -2)$, $p_5 = (-4, 0)$, $p_6 = (5, 3)$, $p_7 = (2, 1)$, $p_8 = (3, 6)$, $p_9 = (6, -1)$, $p_{10} = (4, -4)$.
α) Σχεδιάστε την υποδιαίρεση του χώρου από το kd-δένδρο, το δυαδικό δένδρο, την περιοχή $(-\infty, 1) \times (-1/2, 5)$ και δείξτε πώς κινείται ο αλγόριθμος αναζήτησης αυτής της περιοχής.

Μελετάμε τον ντετερμινιστικό αλγόριθμο εύρεσης πλησιέστερου γείτονα:
β) Βρείτε σημείο επερώτησης (query) με το οποίο ο αλγόριθμος τερματίζει με το ελάχιστο δυνατό backtracking.
γ) Βρείτε σημείο επερώτησης (query) που υποχρεώνει τον αλγόριθμο να επισκεφτεί τους περισσότερους δυνατούς (ή όλους) τους κόμβους.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α)



β) Για να μην έχουμε backtracking στον αλγόριθμο μπορούμε να επιλέξουμε ως σημείο επερώτησης το $q_a = (4, 6)$. Οταν ο αλγοριθμος φτάσει σε φυλλο θα βρει το σημειο $(3, 6)$ αρα η τρέχουσα απόσταση γινεται 1, επομένως δεν εκτελεί backtracking. Ισοδύναμα, ο κυκλος με κέντρο q και ακτίνα 1 δεν τέμνει καμία αλλη περιοχή/κελί του δένδρου.

γ) Διαισθητικά το q δεν θα ειναι στο κελί του NN και το κελί του NN θα βρίσκεται, στο δένδρο, μακριά απο το κελί του q. Π.χ. $q_b = (-0.1, 0, 1)$, που θα βρει το $p_3 = (-3, 4)$, καθώς το q ανήκει στο κελί του, οπότε θα αναζητησει στο πάνω ημιεπίπεδο του l_8, στο κάτω ημιεπίπεδο του l_2 και στο δεξι ημιεπίπεδο του l_4. Επιπλέον θα κάνει αναζήτηση στα δεξιά του l_1, όπου θα βρει τον αληθινά πλησιέστερο γείτονα $p_7 = (2, 1)$ και θα συνεχίσει στο δεξι ημιεπίπεδο του l_7 και στο κάτω ημιεπίπεδο του l_3.

Αντίθετα, δύναται να μεγιστοποιείται το πλήθος κόμβων που επισκέπτεται ο αλγόριθμος ακόμα και αν το q ειναι πολύ μακριά, π.χ. το $(-30, -30)$ διότι η ελάχιστη απόσταση (εδώ 39.6) είναι τέτοια που για καμία l_i δεν είμαστε σίγουροι πως ο NN δεν βρίσκεται από την άλλη μεριά της l_i, άρα πρέπει να ελεγθούν όλα τα κελιά. $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

2. Πλησιέστεροι γείτονες μέσω κοντινού γείτονα

Εστω $P \subset \mathbb{R}^d, |P| = n$. Εστω $d(q,P) = \min_{p\in P} \|p-q\|$. Υποθέστε την ύπαρξη δομής δεδομένων $\Delta(P,r)$ που λύνει το πρόβλημα του r-κοντινού γείτονα: για σημείο-επερώτηση $q \in \mathbb{R}^d$, αν $d(q,P) \leq r$, η δομή επιστρέφει $p \in P$ τ.ω. $\|p-q\| \leq r$, αλλιώς επιστρέφει « όχι ». Η δομή απαιτεί χώρο $S(d,n)$, χρόνο προεπεξεργασίας $T(d,n)$ και χρόνο επερώτησης $Q(d,n)$. Υποθέτουμε πως το P συμπεριφέρεται 'λογικά' δηλ. $\forall\, q \in \mathbb{R}^d$ και σταθερά $c > 1$:

$$\max_{x,y\in P\cup\{q\}} \|x-y\| \leq n^c, \quad d(q,P) \geq 1.$$

α) Σχεδιάστε δομή δεδομένων που λύνει το πρόβλημα του $(1+\epsilon)$-προσεγγιστικού κοντινότερου γείτονα στο P για $0 < \epsilon \leq 1$, χρησιμοποιώντας μια ή περισσότερες δομές $\Delta(P,r)$ με όσα διαφορετικά r χρειάζεται.

β) Υπολογίστε τις πολυπλοκότητες της δομής που σχεδιάσατε. Υπάρχει δομή που απαιτεί χώρο $O(S(d,n)\log n/\epsilon)$, χρόνο προεπεξεργασίας $O(T(d,n)\log n/\epsilon)$ και χρόνο επερώτησης $O(Q(d,n)\log(\log n/\epsilon))$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Κατασκευάζουμε δομές $\Delta(P,r_i)$ ως εξής: $r_0 = 1$, για $i > 0, r_i \leq n^c, r_i = (1+\epsilon)r_{i-1} = (1+\epsilon)^i$. Προφανώς υπάρχει j τ.ώ. η $\Delta(P,r_j)$ επιστρέφει σημείο p^* και η $\Delta(P,r_{j-1})$ επιστρέφει « όχι ». Το j το βρίσκουμε κάνοντας δυαδική αναζήτηση στις δομές $\Delta(P,r_i)$. Έτσι,

$$d(q,P) \leq \|q-p^*\| \leq r_j = (1+\epsilon)r_{j-1} \leq (1+\epsilon)d(q,P),$$

άρα το p^* είναι ένας $(1+\epsilon)$-προσεγγιστικός κοντινότερος γείτονας. Το πλήθος των δομών που κατασκευάζουμε είναι

$$m = \log_{1+\epsilon} n^c = O(\log n/\log(1+\epsilon)) = O(\log n/\epsilon)$$

αφού $x-1/x \leq \ln x$ για $x > 0$. Ο χρόνος επερώτησης είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να κάνουμε δυαδική αναζήτηση στις δομές $\Delta(P,r_i)$, άρα $O(\log m)$. $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

4. Εκτόξευση ακτίνας μέσω αποστάσεων [Μόνο Μεταπτ.]

Έστω σημείο επερώτησης $p \in \mathbb{R}^2$ στο εσωτερικό φραγμένου πολυγώνου που ορίζεται ως τομή ημιεπιπέδων. Μας ενδιαφέρει να βρούμε την τομή κατακόρυφης ευθείας $L = \{\lambda(0,1)+p : \lambda \geq 0\}$ από το $p \in \mathbb{R}^2$ με το πολύγωνο Εστιάζουμε στην εκτόξευση ακτίνας (ray shoot) προς τα πάνω: Το $(0,1)$ είναι κατακόρυφο προς τα πάνω.

α) Εστω ευθείες $y = 2, y = -2x+6$ και $p = (1,0)$. Σε ποια σημεία η ακτίνα από το p προς τα πάνω τέμνει κάθε ευθεία και σε ποια απόσταση από το p;

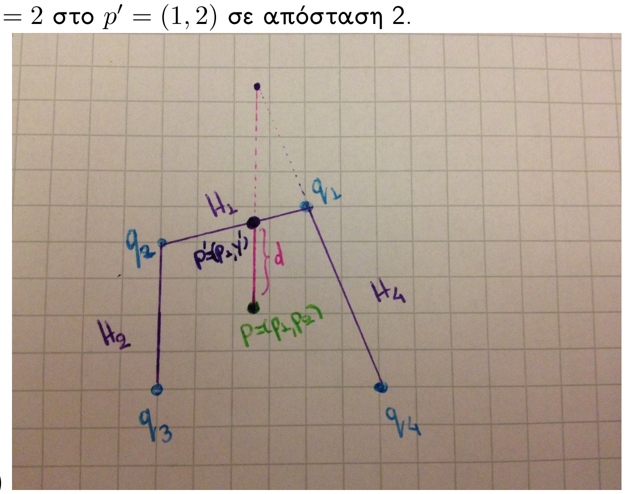
β) Χαρακτηρίστε το επίπεδο ακμής H του πολυγώνου που αναζητείται: ποια απόσταση βελτιστοποιεί;

γ) Μέσω του δυϊσμού μη-κατακόρυφων ευθειών

$$p \mapsto p^* : y = p_1 x - p_2, \quad H : y = ax - b \mapsto H^* = (a,b),$$

διατυπώστε το ισοδύναμο ερώτημα στον δυϊκό χώρο. Ποια απόσταση βελτιστοποιείται;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) Παράδειγμα: ευθείες $y = 2, y = -2x+6$, $p = (1,0)$. Η ακτίνα προς τα πάνω τέμνει την ευθεία $H : y = 2$ στο $p' = (1,2)$ σε απόσταση 2.



β)

Ζητείται η ευθεία H με μέγιστη αρνητική κατακόρυφη απόσταση $sv(p,H)$ από το p δηλ. με ελάχιστη απόλυτη τιμή του $\lambda < 0$.

Έστω κυρτό πολύγωνο το οποίο ορίζεται ως τομή των ευθειών $H_i := a_i x + b_i y + c_i$, όπου το i ανήκει στο σύνολο των ακμών I. Έστω το σημείο επερώτησης $p = (p_1, p_2)$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου. Η κατακόρυφη ευθεία από το p τέμνει το πολύγωνο στο σημείο $p' = (p_1, y')$. Επομένως η H_i που αναζητούμε είναι αυτή που $a_i p_1 + b_i y' + c_i = 0$ και $y' = \min_{i \in I}\{(-c_i - a_i p_1)/b_i\}$. Επομένως η ζητούμενη απόσταση είναι $\mathsf{dist}(p,p') = y' - p_2$.

γ) Μέσω του δυϊσμού, τα επίπεδα μετατρέπονται σε σημεία και τα σημεία σε επίπεδα. Επομένως το σημείο p αντιστοιχείται στην ευθεία p^*. Συνεπώς αναζητούμε το σημείο που βρίσκεται κάτω από την ευθεία p^* και ελαχιστοποιεί την (κατακόρυφη) απόστασή της προς τα σημεία H_i^*, το οποίο ειναι πιο κομψό ερώτημα. Αποδείξτε $sv(p,H) = -sv^*(p^*, H^*)$ όπου το τελευταίο είναι η προσημασμένη κατακόρυφη απόσταση του σημείου H^* από την ευθεία p^*, δηλ. αυτές οι αποστάσεις διατηρούνται στον δυϊκό χώρο.

Παράδειγμα: $H^* = (0,-2)$, η 2η ευθεία αντιστοιχείται στο $(-2,-6)$, ενώ $p^* : y = x$. Η (κατακόρυφη) απόσταση από την p^* ελαχιστοποιείται στο H^* και ισούται με 2. $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$