Υπολογιστική Γεωμετρία: Εργασία 4

Τελική έκδοση 12/05/2015. Παράδοση: **Πέμ. 21/5/2015**, 2.00μμ στο eclass

Διδάσκων: Καθηγητής Ιωάννης Εμίρης

Οι ασκήσεις αφορούν Προ-πτυχιακούς και Μετ-απτυχιακούς εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

1. kd-δένδρα

Δίνονται 10 σημεία στο $\mathbb{R}^2$: $p_1 = (0,7),\ p_2 = (-5,6),\ p_3 = (-3,4),\ p_4 = (-2,-2),\ p_5 = (-4,0),\ p_6 = (5,3),\ p_7 = (2,1),\ p_8 = (3,6),\ p_9 = (6,-1),\ p_{10} = (4,-4)$.
α) Σχεδιάστε την υποδιαίρεση του χώρου από το kd-δένδρο, το δυαδικό δένδρο, την περιοχή $(-\infty,1)\times(-1/2,5)$ και δείξτε πώς κινείται ο αλγόριθμος αναζήτησης αυτής της περιοχής.

Μελετάμε τον ντετερμινιστικό αλγόριθμο εύρεσης πλησιέστερου γείτονα:
β) Βρείτε σημείο επερώτησης (query) με το οποίο ο αλγόριθμος τερματίζει με το ελάχιστο δυνατό backtracking.
γ) Βρείτε σημείο επερώτησης (query) που υποχρεώνει τον αλγόριθμο να επισκεφτεί τους περισσότερους δυνατούς (ή όλους) τους κόμβους.

2. Πλησιέστεροι γείτονες μέσω κοντινού γείτονα

Εστω $P \subset \mathbb{R}^d, |P| = n$. Εστω $d(q,P) = \min_{p\in P} \|p-q\|$. Υποθέστε την ύπαρξη δομής δεδομένων $\Delta(P,r)$ που λύνει το πρόβλημα του r-κοντινού γείτονα: για σημείο-επερώτηση $q \in \mathbb{R}^d$, αν $d(q,P) \le r$, η δομή επιστρέφει $p \in P$ τ.ω. $\|p-q\| \le r$, αλλιώς επιστρέφει « όχι ». Η δομή απαιτεί χώρο $S(d,n)$, χρόνο προεπεξεργασίας $T(d,n)$ και χρόνο επερώτησης $Q(d,n)$. Υποθέτουμε πως το P συμπεριφέρεται 'λογικά' δηλ. $\forall\, q \in \mathbb{R}^d$ και σταθερά $c > 1$:

$$\max_{x,y\in P\cup\{q\}} \|x-y\| \le n^c, \quad d(q,P) \ge 1.$$

α) Σχεδιάστε δομή δεδομένων που λύνει το πρόβλημα του $(1+\epsilon)$-προσεγγιστικού κοντινότερου γείτονα στο P για $0 < \epsilon \le 1$, χρησιμοποιώντας μια ή περισσότερες δομές $\Delta(P,r)$ με όσα διαφορετικά r χρειάζεται.

β) Υπολογίστε τις πολυπλοκότητες της δομής που σχεδιάσατε. Υπάρχει δομή που απαιτεί χώρο $O(S(d,n)\log n/\epsilon)$, χρόνο προεπεξεργασίας $O(T(d,n)\log n/\epsilon)$ και χρόνο επερώτησης $O(Q(d,n)\log(\log n/\epsilon))$.

3. Πλησιέστερα σημειοσύνολα [Bonus]

Έστω επίπεδα και ευθείες $S_1,\ldots,S_k \subset \mathbb{R}^3$, που δεν περνούν απαραίτητα από την αρχή των αξόνων. Έστω ο μετασχηματισμός

$$\xi : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto (1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3) \in \mathbb{R}^7.$$

Αποδείξτε πως ένα σημείο p είναι πλησιέστερο στο S_i ανν μια ακτίνα (ray shooting) από το $\xi(p)$ και παράλληλη σε έναν άξονα (ποιον;) συναντά το $\xi(S_i)$ πριν οποιοδήποτε άλλο $\xi(S_j)$.

4. Εκτόξευση ακτίνας μέσω αποστάσεων [Μόνο Μεταπτ.]

Έστω σημείο επερώτησης $p \in \mathbb{R}^2$ στο εσωτερικό φραγμένου πολυγώνου που ορίζεται ως τομή ημιεπιπέδων. Μας ενδιαφέρει να βρούμε την τομή κατακόρυφης ευθείας $L = \{\lambda(0,1) + p : \lambda \ge 0\}$ από το $p \in \mathbb{R}^2$ με το πολύγωνο Εστιάζουμε στην εκτόξευση ακτίνας (ray shoot) προς τα πάνω: Το $(0,1)$ είναι κατακόρυφο προς τα πάνω.

α) Εστω ευθείες $y = 2, y = -2x + 6$ και $p = (1, 0)$. Σε ποια σημεία η ακτίνα από το p προς τα πάνω τέμνει κάθε ευθεία και σε ποια απόσταση από το p;

β) Χαρακτηρίστε το επίπεδο ακμής H του πολυγώνου που αναζητείται: ποια απόσταση βελτιστοποιεί;

γ) Μέσω του δυϊσμού μη-κατακόρυφων ευθειών

$$p \mapsto p^* : y = p_1 x - p_2, \quad H : y = ax - b \mapsto H^* = (a, b),$$

διατυπώστε το ισοδύναμο ερώτημα στον δυϊκό χώρο. Ποια απόσταση βελτιστοποιείται;