Υπολογιστική Γεωμετρία: Εργασία 2

Έκδοση 6/04/15. Προθεσμία: Πέμ. 23/04/15, 2.00μμ στο eclass

Διδάσκων: Καθηγητής Ιωάννης Εμίρης

Οι ασκήσεις αφορούν Προ-πτυχιακούς ή/και Μετ-απτυχιακούς όπως αναγράφεται.

Σχέση του Euler (Προ/Μετ)

Θα μελετήσουμε τη σχέση του Euler για κυρτό πολύεδρο $P \subset \mathbb{R}^d$:

$$\chi(P) := \sum_{i=-1}^{d} (-1)^i f_i = 0, \quad f_i = \#(\text{όψεων διάστασης } i),\ f_{-1} = 1.$$

α) Αποδείξτε τη σχέση για $d = 1, 2$.
β) [Bonus] Αποδείξτε τη σχέση για $d = 3$ θεωρώντας γνωστή τη σχέση Euler για επίπεδους γράφους:

$$\#\text{κορυφών} - \#\text{ακμών} + \#\text{εδρών} = 2.$$

γ) Εφαρμόστε το (β) σε απλό πολύεδρο όπου όλες οι έδρες είναι πεντάγωνα ώστε να υπολογίσετε τα f_0, f_1, f_2. Θα χρειαστεί να βρείτε μια επιπλέον σχέση μεταξύ ορισμένων f_i.
δ) Ομοίως για απλοειδές πολύεδρο όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό 5. Πώς σχετίζεται το πολύεδρο με αυτό στο (γ);

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) $d = 2$: κορυφές = ακμές.

β) Μια έδρα αντιστοιχεί στη μη φραγμένη περιοχή του γράφου. Μια έδρα του πολυέδρου 'ανοίγει' και γινεται η μη-φραγμένη περιοχή. Οι ακμές του πολυέδρου αντιστοιχούν 1-1 στις ακμές του γράφου καθώς επιτρέπω μη-σταθερές συντεταγμενες αλλά οχι αλλαγές στην τοπολογία. Εναλλακτικά, προβάλλω το άΠ και κΠ σε επίπεδους γράφους, αθροίζω μετρώντας τη σιλουέτα (πολύγωνο) δύο φορές. ΔΕΝ Ζητείτο απόδειξη της σχέσης.

γ) Απλό: $f_1 = 5f_2/2, f_1 = 3f_0/2 \Rightarrow f = (20, 30, 12, 1)$.

δ) Ομοίως $3f_2 = 2f_1, 5f_0 = 2f_1 \Rightarrow f = (12, 30, 20, 1)$: είναι το δυϊκό του προηγούμενου.

$\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

Κάτω περίβλημα (Προ/Μετ)

Το *κάτω περίβλημα (κΠ)* σημειοσυνόλου A είναι η ένωση των εδρών του ΚΠ(A) οι οποίες έχουν εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του οποίου η τελευταία συντεταγμένη < 0.
α) Στο επίπεδο, δεδομένων των 2 κορυφών ακμής του ΚΠ(A), σχεδιάσετε κατηγόρημα που αποφασίζει αν η ακμή ανήκει στο κΠ χρησιμοποιώντας ένα πρόσημο (ή περισσότερα) ορίζουσας παρόμοιας με του CCW.
β) Γενικεύστε στις 3 διαστάσεις: η έδρα ορίζεται από 3 κορυφές της, κάθε κορυφή δίνεται από 3 συντεταγμένες.
γ) Τι σχήμα προκύπτει, και τι πληροφορία περιέχει, αν, σε απλοειδές πολύεδρο, το κΠ προβληθεί στο επίπεδο $z = -M$ για πολύ μεγάλο M;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Εστω σημείο $q = (0, -\infty)$, το κΠ αποτελείται από τις κόκκινες ακμές/έδρες ως προς $q = (0, -\infty)$ στο βήμα χρωματισμού του ΒΒ.
α) Έστω οι κορυφές ακμής που μας δίνονται: $p_1 = (x_1, y_1)$ και $p_2 = (x_2, y_2)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τα σημεία:

- $q = (0, -\infty)$: σημείο εξασφαλισμένα πιο χαμηλό από όλα τα σημεία του ΚΠ
- $p_3 = (x_3, y_3)$: Σημείο του ΚΠ διαφορετικό από τα p_1 και p_2.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω δυο ορίζουσες:

$$CCW_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \qquad CCW_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\infty \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$CCW_2 = 1 \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} - \infty \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \Rightarrow sign(CCW_2) = -sign \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Η ακμή που σχηματίζεται από τις p_1, p_2 ανήκει στο κΠ ανν $sign(CCW_1) = -sign(CCW_2)$. Πολυπλοκότητα $O(1)$, δεν απαιτεί ταξινόμηση των ακρων της ακμής, γενικεύεται εύκολα: λύσεις χωρίς αυτά τα χαρακτηριστικά δεν ελαβαν πλήρη βαθμολογία.

β) Γενίκευση του (α): συγκρινουμε το πρόσημο του CCW των 3 κορυφών της έδρας κι ενός αλλου σημείου του ΚΠ, και το πρόσημο του CCW των 3 κορυφών της έδρας και του $(0, 0, -\infty)$.

γ) Τριγωνοποίηση σημειοσυνολου στο επίπεδο, οπου τα σημεία ειναι ολες οι κορυφές στο κΠ. Το κΠ περιλαμβάνει τη σιλουέτα του πολυέδρου. ΔΕΝ πρόκειται αναγκαστικά για την τριγωνοποίηση Delaunay αλλά για μια κανονική τριγωνοποίηση. ΟΕΔ

Αντίστροφη αναζήτηση εδρών (Μετ)

Θεωρήστε το μοναδιαίο κύβο με κορυφές:

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1).$$

α) Επιλέξτε « γενική » ευθεία, π.χ. την τομή των επιπέδων $x + 2y + z + 1 = x - y + 2z - 1 = 0$ και υπολογίστε τη διάταξη των εδρών του κύβου ως προς την συντεταγμένη των σημείων τομής των επιπέδων τους με την ευθεία (παραμετροποιώντας την ευθεία με μία παράμετρο). Η ευθεία είναι « γενική » ανν οι τομές είναι όλες διαφορετικές. Προαιρετικά, υλοποιήστε σε Python την εύρεση των σημείων τομής.

β) Γράψτε το Γραμμικό Πρόγραμμα (ΓΠ) για την αρχικοποίηση του ΚΠ στον αλγόριθμο περιτύλιξης: η λύση του είναι η πρώτη έδρα του ΚΠ. Με αυτή την έδρα ως πρώτη, υποθέτοντας πως αντιστοιχεί σε τιμή t, διατάξτε τις υπόλοιπες χρησιμοποιώντας τις τιμές από το (α), μέχρι το $+\infty$, συνεχίζοντας στο $-\infty$ και μέχρι το t.

γ) Εφαρμόστε αντίστροφη αναζήτηση, δείξτε τον γράφο των εδρών και τη σειρά διάσχισής του, ξεκινώντας από την έδρα στο (β).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α)

$$\{x = 0, y = -3/5, z = 1/5\} \, \{x = -3, y = 0, z = 2\} \, \{x = 1/3, y = -2/3, z = 0\}$$

$$\{x = 1, y = -4/5, z = -2/5\} \, \{x = -8, y = 1, z = 5\} \, \{x = -4/3, y = -1/3, z = 1\}$$

ΟΕΔ