

# Υπολογιστική Γεωμετρία: Εργασία 2

Έκδοση 6/04/15. Προθεσμία: Πέμ. 23/04/15, 2.00μμ στο eclass

Διδάσκων: Καθηγητής Ιωάννης Εμίρης

Οι ασκήσεις αφορούν Προ-πτυχιακούς ή/και Μετ-πτυχιακούς όπως αναγράφεται.

## Σχέση του Euler (Προ/Μετ)

Θα μελετήσουμε τη σχέση του Euler για κυρτό πολύεδρο  $P \subset \mathbb{R}^d$ :

$$\chi(P) := \sum_{i=-1}^d (-1)^i f_i = 0, \quad f_i = \#(\text{όψεων διάστασης } i), \quad f_{-1} = 1.$$

α) Αποδείξτε τη σχέση για  $d = 1, 2$ .

β) [Bonus] Αποδείξτε τη σχέση για  $d = 3$  θεωρώντας γνωστή τη σχέση Euler για επίπεδους γράφους:

$$\# \text{κορυφών} - \# \text{ακμών} + \# \text{εδρών} = 2.$$

γ) Εφαρμόστε το (β) σε απλό πολύεδρο όπου όλες οι έδρες είναι πεντάγωνα ώστε να υπολογίσετε τα  $f_0, f_1, f_2$ . Θα χρειαστεί να βρείτε μια επιπλέον σχέση μεταξύ ορισμένων  $f_i$ .

δ) Ομοίως για απλοειδές πολύεδρο όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό 5. Πώς σχετίζεται το πολύεδρο με αυτό στο (γ);

## Κάτω περίβλημα (Προ/Μετ)

Το κάτω περίβλημα (κΠ) σημειοσυνόλου  $A$  είναι η ένωση των εδρών του  $\text{ΚΠ}(A)$  οι οποίες έχουν εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του οποίου η τελευταία συντεταγμένη  $< 0$ .

α) Στο επίπεδο, δεδομένων των 2 κορυφών ακμής του  $\text{ΚΠ}(A)$ , σχεδιάσετε κατηγόρημα που αποφασίζει αν η ακμή ανήκει στο κΠ χρησιμοποιώντας ένα πρόσημο (ή περισσότερα) ορίζουσας παρόμοιας με του CCW.

β) Γενικεύστε στις 3 διαστάσεις: η έδρα ορίζεται από 3 κορυφές της, κάθε κορυφή δίνεται από 3 συντεταγμένες.

γ) Τι σχήμα προκύπτει, και τι πληροφορία περιέχει, αν, σε απλοειδές πολύεδρο, το κΠ προβληθεί στο επίπεδο  $z = -M$  για πολύ μεγάλο  $M$ ;

## Αντίστροφη αναζήτηση εδρών (Μετ)

Θεωρήστε το μοναδιαίο κύβο με κορυφές:

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1).$$

α) Επιλέξτε « γενική » ευθεία, π.χ. την τομή των επιπέδων  $x + 2y + z + 1 = x - y + 2z - 1 = 0$  και υπολογίστε τη διάταξη των εδρών του κύβου ως προς την συντεταγμένη των σημείων τομής των επιπέδων τους με την ευθεία (παραμετροποιώντας την ευθεία με μία παράμετρο). Η ευθεία είναι « γενική » αν οι τομές είναι όλες διαφορετικές. Προαιρετικά, υλοποιήστε σε Python την εύρεση των σημείων τομής.

β) Γράψτε το Γραμμικό Πρόγραμμα (ΓΠ) για την αρχικοποίηση του ΚΠ στον αλγόριθμο περιτύλιξης: η λύση του είναι η πρώτη έδρα του ΚΠ. Με αυτή την έδρα ως πρώτη, υποθέτοντας πως αντιστοιχεί σε τιμή  $t$ , διατάξτε τις υπόλοιπες χρησιμοποιώντας τις τιμές από το (α), μέχρι το  $+\infty$ , συνεχίζοντας στο  $-\infty$  και μέχρι το  $t$ .

γ) Εφαρμόστε αντίστροφη αναζήτηση, δείξτε τον γράφο των εδρών και τη σειρά διάσχισής του, ξεκινώντας από την έδρα στο (β).