

Έκδοση 23/03/15. Προθεσμία: Πέμ 26/03/15, 2.00μμ στο eclass

Διδάσκοντες: Ι. Εμίρης, Χ. Φραγκουδάκης

Τα ερωτήματα **α, β, γ** να απαντηθούν καθένα μέσα σε μισή σελίδα. Κάθε ερώτημα στο 1ο θεμα έχει το ίδιο βαθμολογικό βάρος. Τα δύο θέματα έχουν το ίδιο βάρος για τους Μεταπτυχιακούς.

### 1. ΚΠ ένωσης [Προ/Μετα-πτυχιακού]

Δίνονται 2 κυρτά πολύγωνα που δεν τέμνονται, καθένα με  $\leq N$  κορυφές.

α) Αποδείξτε πως το ΚΠ της ένωσής τους έχει  $\leq 2N$  κορυφές.

β) Σχεδιάστε αλγόριθμο που μετασχηματίζει τα πολύγωνα ώστε να υπάρχει μια κατακόρυφη ευθεία που τα χωρίζει, σε  $O(N)$ .

γ) Σχεδιάστε αλγόριθμο που υπολογίζει το ΚΠ της ένωσής τους σε  $O(N)$ .

δ) Γράψτε ένα πρόγραμμα Pythοn που χρησιμοποιεί τη βιβλιοθήκη `pygame` και δέχεται με γραφική είσοδο (κλικάροντας) δύο κυρτά πολύγωνα που δεν τέμνονται. Το πρόγραμμα υπολογίζει το ΚΠ της ένωσης των δύο πολυγώνων (ερώτημα (γ), προαιρετικά και (β)) και το εμφανίζει στην οθόνη.

δ) [Bonus] Το πρόγραμμα Pythοn δίνει στην έξοδο τη δομή `Polygon2` που αναπαριστά το ΚΠ της ένωσης των δύο πολυγώνων.

ε) Δίνονται  $K$  κυρτά πολύγωνα που δεν τέμνονται. Υπολογίστε το ΚΠ της ένωσής τους: **ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγόριθμού σας ως προς τα  $N, K$** , όπου  $N$  το μέγιστο πλήθος κορυφών ανά πολύγωνο?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) Προς άτοπο: υποθέτουμε ότι το ΚΠ της ένωσής τους έχει  $> 2N$  κορυφές. Τότε υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή, η οποία δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο κυρτά πολύγωνα. Ατοπο από τον ορισμό του ΚΠ που απαιτεί το ΚΠ να είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιλαμβάνει τις κορυφές των δύο πολυγώνων.

β) Για πολύγωνα  $P_1, P_2$ , εξετάζουμε όλες τις ευθείες στήριξης ακμών του  $P_1$  έως ότου βρεθούν 2 διαδοχικές ευθείες (για ακμές  $A_1, A_2$ ) για τις οποίες το προσημο του  $CCW(a, p_2, p_1)$  αντιστρέφεται, όπου  $a$  σημείο της ακμής,  $p_2$  σημείο της ευθείας στο  $P_2$  και  $p_1 \in P_1$  εκτός ακμής. Ανάμεσα στις 2 ευθείες στηριξης, βρίσκουμε ευθεία που χωρίζει τα  $P_1, P_2$  επιλέγοντας μια ευθεία στήριξης της κοινής κορυφής  $v_2 = A_1 \cap A_2$ : αυτό γίνεται εξετάζοντας τα τμήματα  $(v_2, v_1)$  για κάθε κορυφή  $v_1 \in P_1$  μέχρι να βρεθεί τμήμα που "εφάπτεται" στα  $P_1, P_2$  και τα αφήνει σε διαφορετικά ημιεπίπεδα. Αρα χρόνος  $= O(N)$ .

Τέλος, η περιστροφή ώστε η ευθεία να γίνει κατακόρυφη εφαρμόζεται στα 2 πολύγωνα. Ετσι προκύπτει ισοδύναμο πρόβλημα όπου μια κατακόρυφη ευθεία χωρίζει τα πολύγωνα. Συγκεκριμένα, έστω πως η  $E$  περνά από 2 σημεία: θέτουμε το ένα ως αρχή των αξόνων και έστω  $(a, b)$  το άλλο. Υπολογίζουμε  $2 \times 2$  ορθοκανονικό πίνακα περιστροφής  $R$  τέτοιο ώστε  $\det R = 1$  και:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

γ) Με παρόμοιο τρόπο, βρίσκουμε την κορυφή  $v_2 \in P_2$  όπου η ευθεία στήριξης ακμής για πρώτη φορά τέμνει το  $P_1$ . Εξετάζουμε τα τμήματα  $(v_2, v_1)$  για κάθε κορυφή  $v_1 \in P_1$  μέχρι να βρεθεί τμήμα που "εφάπτεται" στα  $P_1, P_2$  και αφήνει αμφότερα στο ίδιο ημιεπίπεδο.

ε) Jarvis:  $K$  βήματα κόστους  $O(NK)$  καθένα άρα συνολικά  $O(NK^2)$  όπου τα βήματα αντιστοιχούν στην κατασκευή των  $K$  νεων ακμών, θεωρώντας πως όσες απο τις γνωστές ακμές συμμετέχουν στο τελικό ΚΠ υπολογίζονται εντός του χρονου  $O(NK)$  ανά βήμα. Με άλλα λόγια, ο αλγόριθμος "περπατάει" στα δοσμένα πολύγωνα χωρίς επιπλέον κόστος.

Β' τρόπος: BB2 στα  $NK$  σημεία άρα  $O(NK \log(NK))$ , το οποίο είναι προτιμότερο απο τον Jarvis μονον εφόσον  $\log N = o(K)$ .

Προσοχή: ο αυξητικός αλγοριθμος που προσθέτει ένα πολυγωνο στο τρέχον ΚΠ δεν ικανοποιεί την υπόθεση πως το τρέχον ΚΠ δεν τέμνει το νέο πολύγωνο. Σε αυτή την κατεύθυνση, το ΚΠ της ένωσης αυθαίρετων κυρτων πολυγώνων (που μπορεί να τέμνονται) κοστίζει  $O(N \log N)$  άρα το συνολικό ΚΠ απαιτεί  $(KN \log(NK) \log K)$ . Με άλλα λόγια, η γνωση πως τα δεδομένα ανήκουν σε Κυρτά πολυγωνα δεν επιταχύνει τον αλγόριθμο (κάτι που αναμενόταν εφόσον στην ακραιο περίπτωση τα πολύγωνα εκφυλίζονται σε σημεία) εκτός απο μικρα  $K$  (οπότε προτιμάται ο Jarvis). ΟΕΔ

## 2. Θεώρημα Καραθεοδωρή χρωμάτων [Μεταπτυχιακοί]

Δίνονται 3 κυρτά πολύγωνα χρωματισμένα με διαφορετικά χρώματα και καθένα περιέχει την αρχή των αξόνων  $O$ . Έστω κενό πολύχρωμο τρίγωνο  $T$  δηλ. με κορυφές διαφορετικών χρωμάτων που δεν περιέχει το  $O$ . Έστω  $w(T)$  η απόσταση του  $O$  από το  $T$ ,  $A$  η ακμή που περιέχει το πλησιέστερο σημείο και  $v$  η κορυφή του  $T$  που δεν ανήκει στην  $A$ . Ορίζουμε  $T' = A \cup v'$  όπου  $v'$  έχει το χρώμα του  $v$  και τα  $v, v'$  ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία της  $A$ .

α) Αποδείξτε πως το  $T'$  μπορεί πάντα να κατασκευαστεί ώστε να είναι πολύχρωμο.

β) Αποδείξτε πως  $w(T') < w(T)$ .

γ) Αποδείξτε πως υπάρχει ένα πολύχρωμο τρίγωνο που περιέχει το  $O$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) Το  $O$  είναι σε διαφορετικό ημιεπίπεδο ως προς την  $A$  από το  $v$  άρα υπάρχει κορυφή χρώματος του  $v$  στο ημιεπίπεδο του διότι αλλιώς δεν θα ανήκε το  $O$  στο ΚΠ αυτού του χρώματος.

β) Το  $O$  και το  $T$  ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την  $A$ . Έστω  $z \in T$  το οποίο πετυχαίνει την απόσταση  $w(T), z \neq O$ . Έχουμε ότι  $z, v' \in T'$ . Έτσι το τμήμα  $(z, v')$  ανήκει σε διαφορετικό ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία της  $A$  από ό,τι το  $v$ . Τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος αυτού θα είναι πιο κοντά λοιπόν στο  $O$  από ό,τι στο  $z$ . Στην περίπτωση που το  $z$  είναι κορυφή παίρνουμε το επίπεδο στήριξης που διέρχεται από το  $z$  και είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το  $z$  με το  $O$ . Στη συνέχεια επιλέγουμε το  $v'$  να βρίσκεται στο άλλο ημιεπίπεδο από αυτό του  $T$ .

γ) Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πολύχρωμων τριγώνων άρα για κάποιο  $T$  το  $w(T)$  ισούται με την ελάχιστη δυνατή θετική τιμή για κενό τρίγωνο, άρα το  $T'$  δεν είναι κενό. ΟΕΔ