ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 5: Pulse Code Modulation (PCM)

Σαγκριώτης Εμμανουήλ
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Σκοποί ενότητας

1. Γνωριμία με την περισσότερο εφαρμοζόμενη τεχνική ψηφιακής διαβίβασης αναλογικού σήματος, το PCM.
2. Ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της διαβίβασης αναλογικού σήματος με PCM.
3. Γνωριμία με τις διαδικασίες δειγματοληψίας αναλογικού σήματος και κβάντισης των δειγμάτων του.
4. Προσδιορισμός της σχέσης ποιότητας στον προορισμό και εύρους ζώνης στη διαβίβαση αναλογικού σήματος με PCM

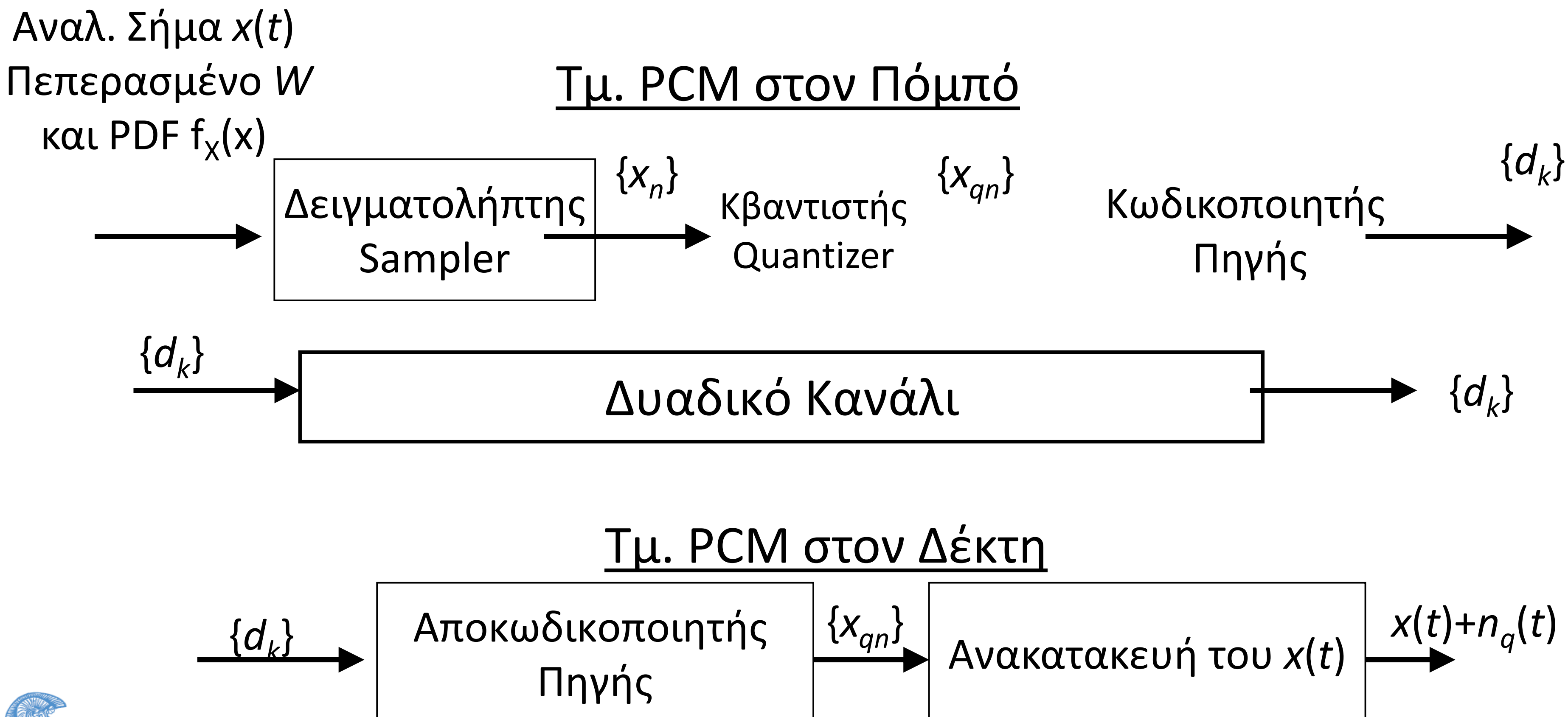
Περιεχόμενα ενότητας

1. Η διαδικασία δειγματοληψίας αναλογικού σήματος.
2. Η ανάγκη της κβάντισης των δειγμάτων σήματος και η σχέση μεταξύ του ρυθμού κωδικοποίησης και ποιότητας στον προορισμό.
3. Το PCM, οι επιδόσεις του και οι εφαρμογές του.
4. Λογαριθμικό PCM και η ανάγκη χρήσης του.

Ενότητα 5

Pulse Code Modulation (PCM)

Το PCM είναι ένα σύστημα, με το οποίο μπορούμε να διαβιβάσουμε ένα αναλογικό (συνεχές) σήμα $x(t)$ μέσω διακριτού καναλιού. Το τμήμα του PCM που βρίσκεται στον πομπό ψηφιοποιεί το σήμα $x(t)$ και το μετατρέπει σε μία ακολουθία δυαδικών δεδομένων $\{d_k\}$. Από την ακολουθία $\{d_k\}$ το τμήμα του PCM που βρίσκεται στο δέκτη ανακατασκευάζει το αρχικό συνεχές σήμα $x(t)$.



Να διευκρινίσουμε ότι στις βαθμίδες του PCM δεν συμπεριλαμβάνεται το διακριτό κανάλι μέσω του οποίου διαβιβάζεται η ακολουθία δυαδικών δεδομένων $\{d_k\}$.

Επίσης παρατηρήστε ότι το σήμα $x(t)$ φθάνει στον προορισμό συνοδευόμενο από τον προσθετικό θόρυβο $n_q(t)$. Ο θόρυβος αυτός οφείλεται κυρίως στην βαθμίδα του κβαντιστή.

Θυμηθείτε ότι η δειγματοληψία του σήματος $x(t)$ γίνεται με συχνότητα $f_S \geq 2W$ και ότι $T_S = 1/f_S$. Επίσης θυμηθείτε ότι το $x(t)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από την ακολουθία $\{x_n\}$ πρακτικά με αμελητέο θόρυβο.

Επειδή όμως τα στοιχεία της $\{x_n\}$είναι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν σε ένα συνεχές διάστημα είναι αδύνατο να κωδικοποιηθούν, ώστε να γίνει η διαβίβαση μέσα από διακριτό κανάλι.

Μέτρο Παραμόρφωσης για τα Διακριτά στο Χρόνο και Συνεχή στην Τιμή Σύμβολα x μιας Πηγής.

Έστω η ακολουθία δειγμάτων

x1, x2,…, xi,…

ενός αναλογικού σήματος x(t). Οι τιμές των δειγμάτων της ακολουθίας ανήκουν σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών δ.

Αν, αποφασίσουμε να αποθηκεύσουμε σε μνήμη την ακολουθία $\{x_i\}$, ή να τη διαβιβάσουμε μέσα από διακριτό κανάλι, είναι αδύνατον να κατασκευάσουμε τον απαιτούμενο κώδικα πηγής αφού το αλφάβητο της ακολουθίας είναι συνεχές.

Ο μοναδικός τρόπος που είναι γνωστός μέχρι σήμερα για να λυθεί το πρόβλημα της κωδικοποίησης της ακολουθίας $\{x_n\}$ είναι η προσέγγιση των δειγμάτων της με τα στοιχεία ενός πεπερασμένου αλφάβητου **A**, υποσύνολου του διαστήματος *δ*. Με την προσέγγιση αυτή η αρχική ακολουθία αντικαθίσταται με την ακολουθία:

$$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_i, \ldots$$

όλα τα στοιχεία της ακολουθίας αυτής ανήκουν στο αλφάβητο **A**, το οποίο περιέχει το πεπερασμένο πλήθος συμβόλων, *N*.

$$\left\{\hat{X}_1, \hat{X}_2, \cdots, \hat{X}_N\right\}$$

Μια τεχνική ορισμού του αλφαβήτου

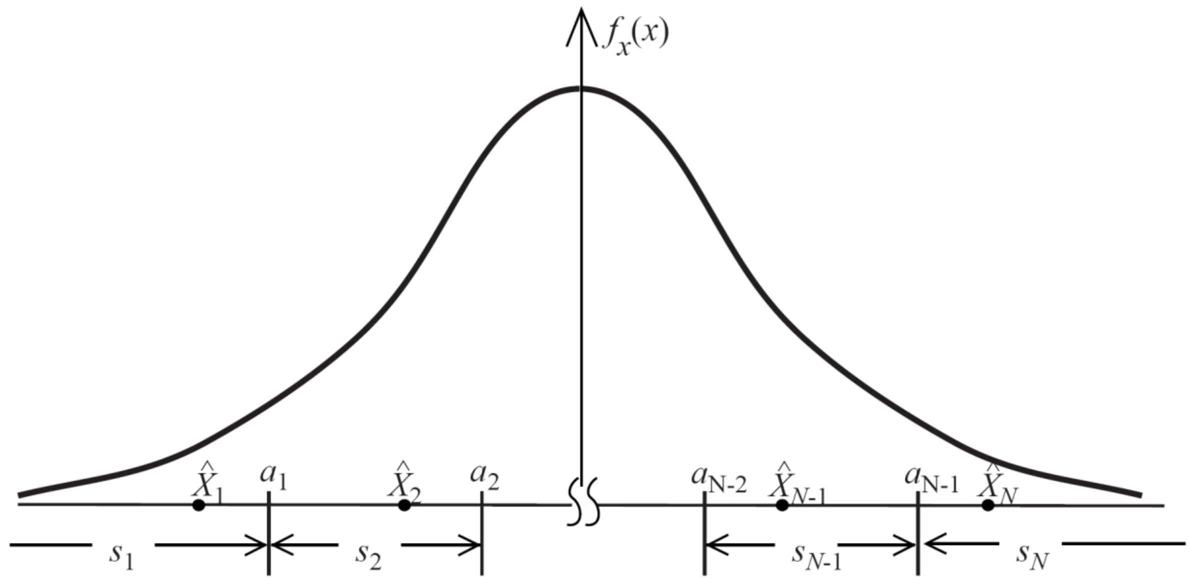
$$\left\{\hat{X}_1, \hat{X}_2, \cdots, \hat{X}_N\right\}$$

και αντικατάσταση της $\{x_i\}$ από την $\{\hat{x}_i\}$ είναι η βαθμωτή κβάντιση (*scalar quantization*)

Βαθμωτή Κβάντιση

1. Στο πιο κάτω σχήμα το πεδίο τιμών της ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\}$ είναι ολόκληρος ο άξονας των πραγματικών αριθμών.

2. Διαχωρίζεται το πεδίο τιμών της $\{x_n\}$ στα N διαδοχικά διαστήματα s_1, s_2,…, s_N και σε κάθε διάστημα s_n ορίζεται μία στάθμη κβάντισης $\hat{X}_n$.



3. Για κάθε x_i της ακολουθίας $\{x_n\}$ προσδιορίζεται το διάστημα s_λ στο οποίο ανήκει το x_i και τίθεται $\hat{x}_i = \hat{X}_\lambda$

Μέση παραμόρφωση της κβαντιζόμενης ακολουθίας

Με τον κβαντιστή που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη διαφάνεια η αρχική ακολουθία δειγμάτων:

$$\{x_n\}=x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots$$

Αντικαταστάθηκε από την ακολουθία των κβαντισμένων δειγμάτων

$$\{\hat{x}_n\} = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_i, \cdots$$

Κάθε στοιχείο x_i της $\{x_n\}$ αλλάξει κατά την ποσότητα $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$ ακολουθία $\{\tilde{x}_n\}$ ποτελεί τον θόρυβο κβάντισης και η μέση τιμή του τετραγώνου της, *D* είναι γνωστή ως *Παραμόρφωση* (Distortion).

$$D = E\left[\left(x_i - \hat{x}_i\right)^2\right]$$

Αν ορίσουμε με $Q(x)$ τη συνάρτηση που από το κάθε δείγμα x προκύπτει η αντίστοιχη στάθμη κβάντισης $\hat{X}_i$

$$D = E\left[\left(x_i - \hat{x}_i\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - Q(x)\right)^2 f_x(x)\,dx$$

Με βάση τον ορισμό της παραμόρφωσης μπορούμε να υπολογίσουμε την παραμόρφωση του κβαντιστή της βαθμωτής κβάντισης ως:

$$D = \int_{-\infty}^{a_1}\left(x - \hat{X}_1\right)^2 f_X(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N-2}\int_{a_i}^{a_{1+1}}\left(x - \hat{X}_{i+1}\right)^2 f_X(x)\,dx +$$

$$+\int_{a_{N-1}}^{\infty}\left(x - \hat{X}_N\right)^2 f_X(x)\,dx$$

Σε μια βαθμίδα κβάντισης η παραμόρφωση D μιας κβαντισμένης ακολουθίας είναι ανάλογη της διακύμανσης σ^2 της ακολουθίας και επιπλέον εξαρτάται:

1. Από τον αριθμό N των σταθμών κβάντισης.
2. Από τον τρόπο επιλογής της ακολουθίας των διαστημάτων και των αντίστοιχων σταθμών κβάντισης σε συνδυασμό με το PDF $f_X(x)$ της ακολουθίας δειγμάτων.
3. Από την τάξη του κβαντιστή.

Ρυθμός κωδικοποίησης της κβαντισμένης ακολουθίας

Η βαθμίδα του κωδικοποιητή πηγής αντιστοιχεί σειρές από bits "0" και "1" στα κβαντισμένα δείγματα της $\{\hat{x}_n\}$.

Ρυθμός Κωδικοποίησης *R* (Coding Rate) καλείται ο μέσος αριθμός bits να δείγμα που αντιστοιχεί ο κωδικ. Στην ακολουθία . . $\{\hat{x}_n\}$

Ο ρυθμός κωδικοποίησης *R* σε έναν κβαντιστή εξαρτάται από:

1. Από τον αριθμό *N* των σταθμών κβάντισης.
2. Από τον τρόπο επιλογής της ακολουθίας των διαστημάτων και των αντίστοιχων σταθμών κβάντισης σε συνδυασμό με το PDF $f_X(x)$ της ακολουθίας δειγμάτων.
3. Από την τάξη του κβαντιστή.

Αν θεωρήσουμε καθορισμένο το PDF του δειγματοληπτυμένου σήματος, την διακύμανσή του σ^2, καθώς και την τάξη του κβαντιστή η σχέση μεταξύ του ρυθμού R και της παραμόρφωσης D είναι μια φθίνουσα συνάρτηση η οποία εξαρτάται από τον τρόπο επιλογής των διαστημάτων κβάντισης s_i και της θέσης των σταθμών κβάντισης $\hat{X}_i$.

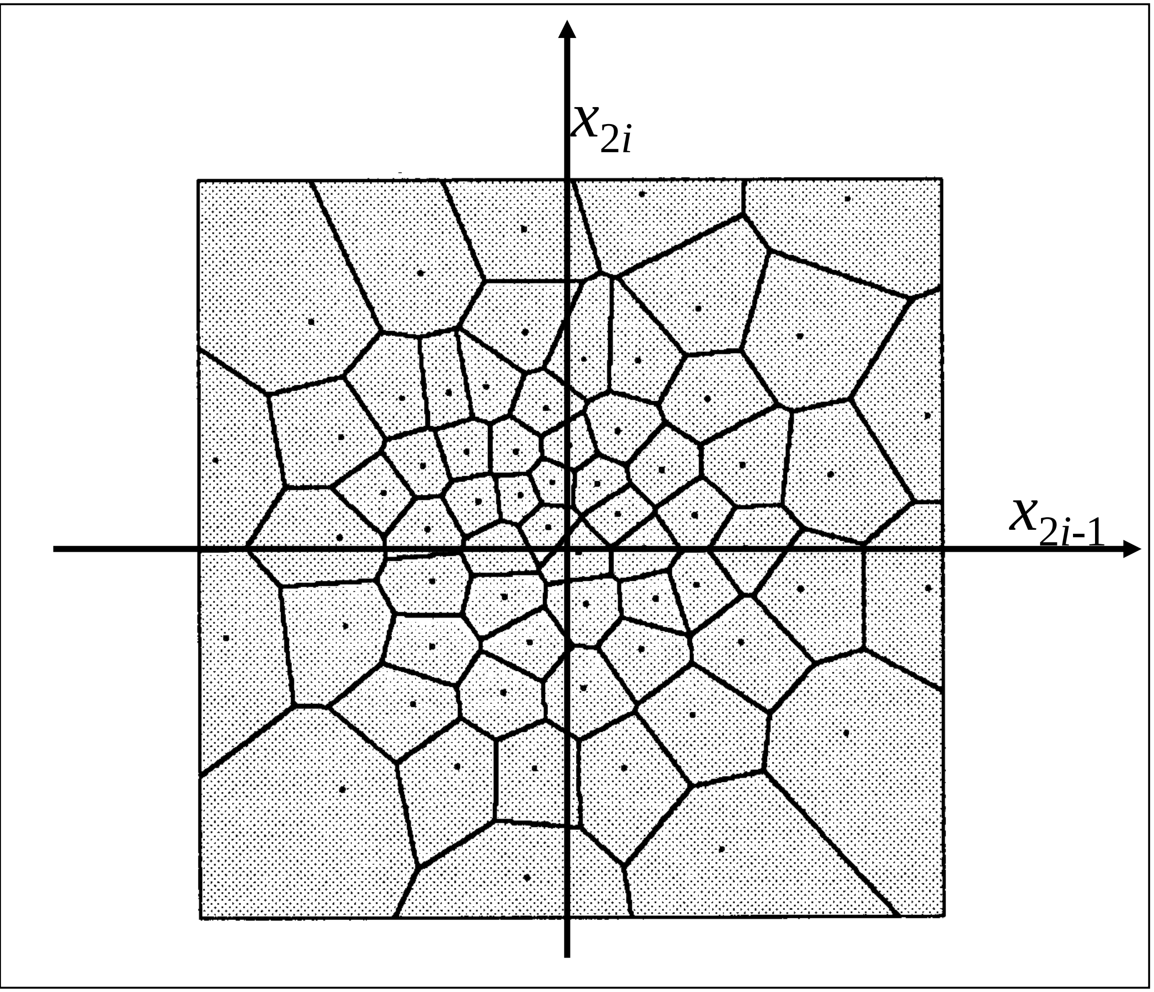
Όταν έχουν επιλεγεί με βέλτιστο τρόπο τα s_i και τα $\hat{X}_i$ η σχέση R-D βελτιώνεται με την τάξη του κβαντιστή.

Διανυσματικός Κβαντιστής (Κβαντιστής τάξης μεγαλύτερης από 1)

Έστω η ακολουθία δειγμάτων $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ ενός αναλογικού σήματος $x(t)$ με Gaussian PDF.

Θεωρείστε το διαχωρισμό των δειγμάτων σε ζεύγη:

$$(x_1,x_2),\ (x_3,x_4), \ldots, (x_{2i-1},x_{2i}),\ \ldots$$



Κάθε ζεύγος δειγμάτων τοποθετείται στο Καρτεσιανό επίπεδο, ευρίσκεται το κελί στο οποίο ανήκει και αντικαθίσταται από τη στάθμη κβάντισης

Ο κβαντιστής αυτός καλείται κβαντιστής δευτέρας τάξης, ενώ εκείνος με τη βαθμωτή κβάντιση θεωρείται πρώτης τάξης.

Η ιδέα μπορεί να γενικευθεί και να διαχωριστεί η ακολουθία δειγμάτων σε *n*-άδες οι οποίες θα κβαντιστούν από κβαντιστή *n* τάξης , σε κελιά στις *n* διαστάσεις.

Αποδεικνύεται ότι για βέλτιστο καθορισμό των οριακών γραμμών (γενικότερα υπερεπιφανειών) των κελιών και των αντίστοιχων σταθμών κβάντισης, η σχέση *R*-*D* βελτιώνεται ή παραμένει αναλλοίωτη.

Για Gaussian PDF έχουμε πάντα βελτίωση της σχέσης *R*-*D* με την αύξηση της τάξης του κβαντιστή

Ο Shannon για Gaussian PDF έδωσε τη βέλτιστη σχέση *R*-*D*:

ΘΕΩΡΗΜΑ SHANON

Βέλτιστη Σχέση μεταξύ Παραμόρφωσης και Ρυθμού Κωδικοποίησης για τα Συνεχή Σύμβολα μιας Διακριτής σε Χρόνο Πηγής.

Έστω πηγή που παράγει διακριτά στο χρόνο σύμβολα, $x_1,x_2, \ldots, x_n,\ldots$, τα οποία είναι πραγματικοί αριθμοί, ακολουθούν Gaussian Κατανομή, και είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητα.

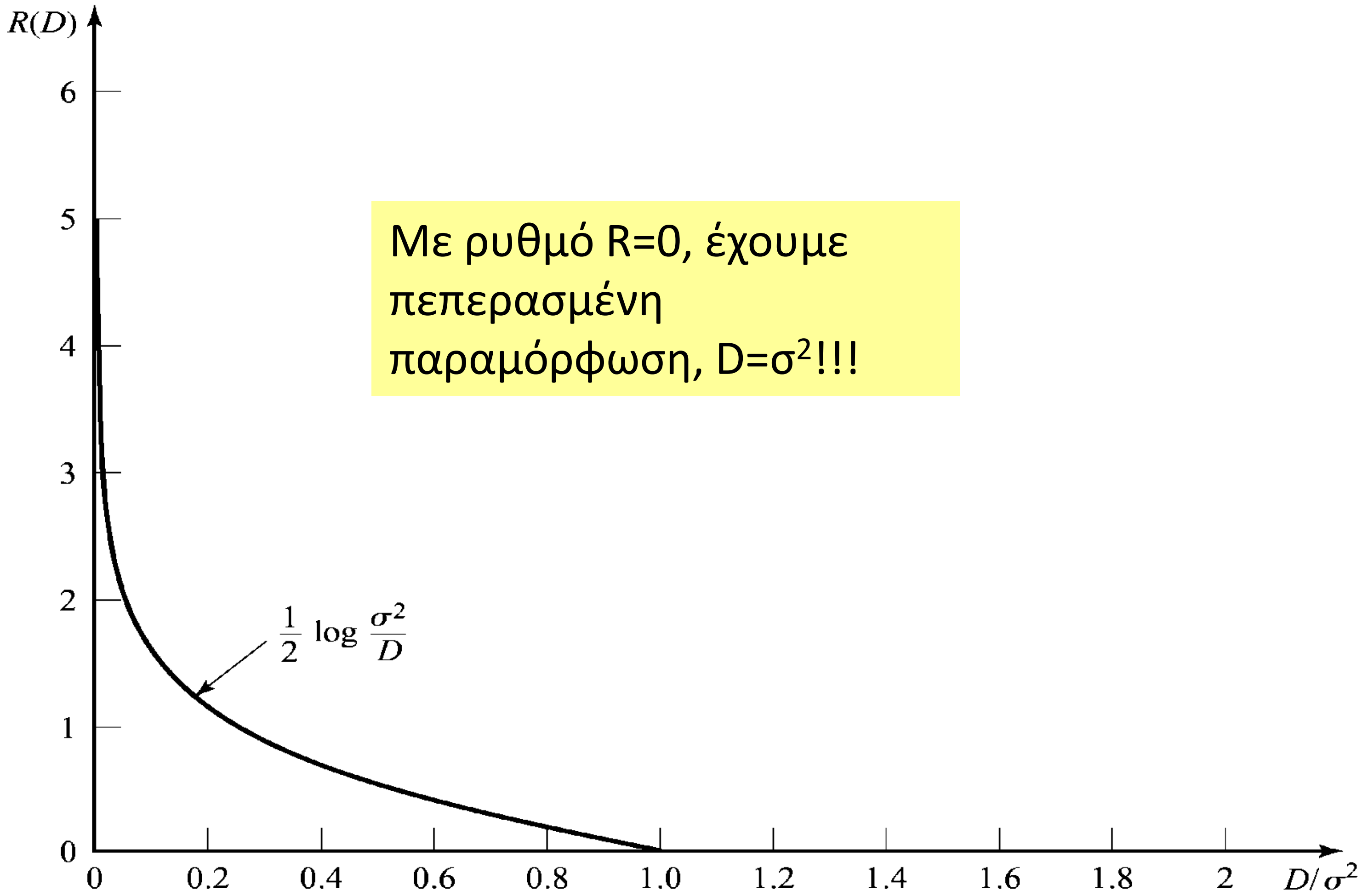
Κάθε προσπάθεια κωδικοποίησης της πιο πάνω ακολουθίας $x_1,x_2, \ldots, x_n,\ldots$, δημιουργεί παραμόρφωση στην ανακτημένη ακολουθία D που εξαρτάται από το ρυθμό κωδικοποίησης R. Η ευνοϊκότερη σχέση μεταξύ R και D αποδεικνύεται ότι είναι:

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma^2}{D}\right) & 0 < \mathrm{D} \le \sigma^2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ SHANON

Βέλτιστη Σχέση Ρυθμού-Παραμόρφωσης

(Rate-Distortion Function)



Με ρυθμό R=0, έχουμε πεπερασμένη παραμόρφωση, $D=\sigma^2$!!!

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}, & 0 \leq D \leq \sigma^2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad d(x,\hat{x}) = (x-\hat{x})^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην αναπαράσταση μιας Gaussian πηγής με μέση τιμή μηδέν και μοναδιαία διακύμανση, ποια είναι η ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση αν χρησιμοποιούνται 8 bits/έξοδο πηγής; Με ποιο συντελεστή μειώνεται η παραμόρφωση αν χρησιμοποιήσουμε 16 bits/έξοδο πηγής;

Λύση Χρησιμοποιώντας τη σχέση $D(R) = \sigma^2 2^{-2R}$ με $R = 8$ και $\sigma = 1$, έχουμε $D = \frac{1}{2^{16}} \approx 1.52 \times 10^{-5}$. Αν αντί 8, χρησιμοποιηθούν 16 bits, η παραμόρφωση μειώνεται περίπου κατά 48 dB, ή μ' ένα συντελεστή 4^8.

Το PCM της Σταθερής Τηλεφωνίας.

Η απλούστερη μορφή PCM είναι αυτή της σταθερής τηλεφωνίας. Το PCM αυτό θεωρεί το σήμα $x(t)$ ότι έχει ένα συμμετρικό PDF γύρω από το μηδέν του οποίου οι μη μηδενικές τιμές εκτείνονται στο πεπερασμένο διάστημα

$$[-x_{max}, x_{max}].$$

Στο PCM αυτό χρησιμοποιούμε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή με N στάθμες κβάντισης όπου N είναι δύναμη του 2 με φυσικό αριθμό για εκθέτη: $N=2^{\nu}$

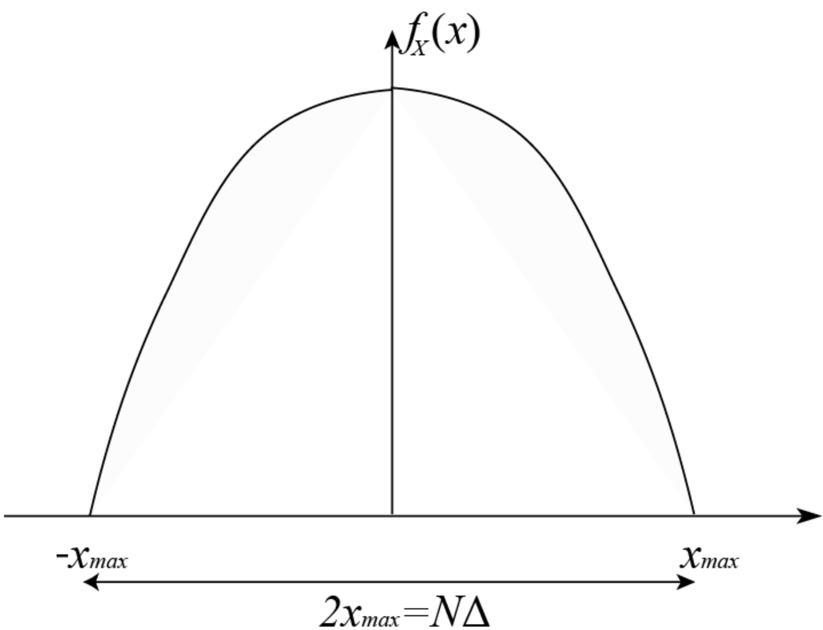
Για κωδικοποιητή πηγής χρησιμοποιείται συνήθως η απλή δυαδική αρίθμηση.

Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

Θεωρείστε ότι το σήμα $x(t)$ έχει PDF $f_X(x)$ συμμετρικό ως προς το μηδέν και ότι ισχύει $f_X(x)=0$ εκτός του πεπερασμένου διαστήματος $[-x_{max}, x_{max}]$.

Ορίζουμε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή με N διαστήματα κβάντισης ίσου μήκους Δ και ορίζουμε το μέσον κάθε διαστήματος ως στάθμη κβάντισης. Προφανώς ισχύει:

$$2x_{max}=N\times\Delta$$



Το σταθερό μήκος των διαστημάτων καβάντισης καλείται *Βήμα Κβάντισης* (Quantisation Step)

Επιπλέον ο κβαντιστής στην εφαρμογή αυτή της σταθερής τηλεφωνίας κατασκευάζεται με:

1. Ν πολύ μεγάλο, Ν>=128.
2. Ν ισούται με ακέραια δύναμη του 2 ($N=2^{\nu}$, ν θετικός ακέραιος.)

Ο ειδικός αυτός τρόπος υλοποίησης του κβαντιστή έχει ως αποτέλεσμα να απλοποιηθεί η διαδικασία του υπολογισμού της παραμόρφωσης ή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος κβάντισης *D*.

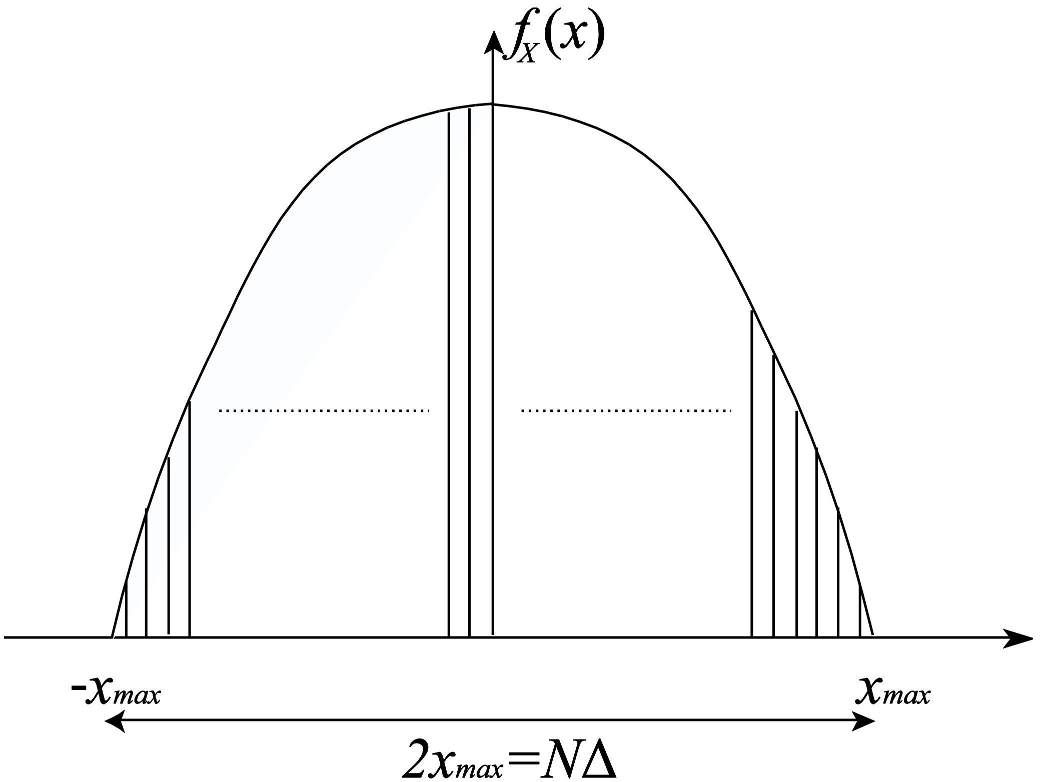
Πράγματι το σταθερό μήκος δυο *Δ* και η επιλογή τυ μέσου ως της στάθμης κβάντισης οδηγεί στο ότι για το σφάλμα κβάντισης:

$$\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$$

σε οποιοδήποτε διάστημα κβάντισης s_j και αν ανήκει το x_i, ισχύει:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \tilde{x} < \frac{\Delta}{2}$$

Επιπλέον ο μεγάλος αριθμός *N των* διαστημάτων στα οποία διαχωρίζεται το διάστημα τιμών της $\{x_n\}$ έχει ως αποτέλεσμα να ισχύει με καλή προσέγγιση ότι το σε κάθε διάστημα s_i το x έχει ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ των δύο άκρων του διαστήματος.

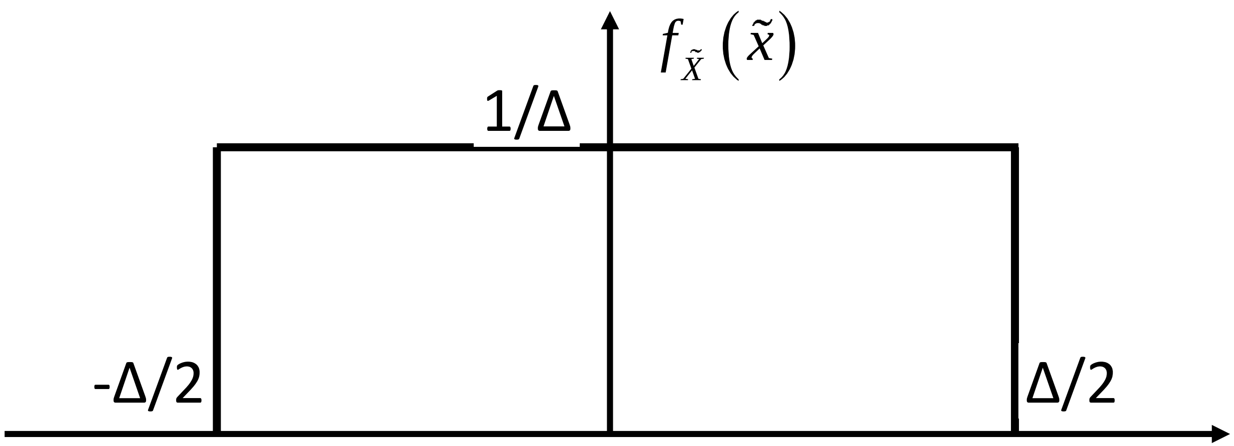


Επειδή ισχύει

$$\tilde{x} = x - \hat{X}_i = x - \frac{s_{istart} + s_{iend}}{2}$$

το σφάλμα κβάντισης έχει ομοιόμορφο κατανομή στο διάστημα τιμών του.

Δηλαδή ανεξάρτητα από σε ποιο διάστημα βρισκόμαστε και ανεξάρτητα από το PDF του σήματος, $f_X(x)$, ισχύει:



Στο PCM η κωδικοποίηση γίνεται με κώδικα σταθερού μήκους. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε το πλήθος των διαστημάτων κβάντισης *N* ίσο με δύναμη του 2 (2^{v}) και επομένως οι δυαδικές κωδικές λέξεις θα έχουν μήκος *v*. Συνήθως χρησιμοποιείται η απλή δυαδική αρίθμηση.

Για παράδειγμα, αν στον κβαντιστή της προηγούμενης διαφάνειας χρησιμοποιήσουμε 256 στάθμες κβάντισης, αυτές θα είναι:

$$\hat{X}_0 = -x_{\max} + \frac{\Delta}{2}, \hat{X}_1 = -x_{\max} + \frac{\Delta}{2} + \Delta, \hat{X}_2 = \cdots$$

Και γενικά ισχύει:

$$\hat{X}_i = -x_{\max} + \frac{\Delta}{2} + i\Delta, i = 0,1,\ldots,255$$

Στη συνέχεια οι *N* στάθμες κβάντισης κωδικοποιούνται με λέξεις των *ν* bits, συνήθως τον ισοδύναμο δυαδικό αριθμό του δείκτη της στάθμης κβάντισης:

$$\hat{X}_0 : 00000000, \hat{X}_1 : 00000001, \hat{X}_2 : 00000010, \ldots$$
$$\ldots, \hat{X}_{64} = 00100000, \ldots., \hat{X}_{255} = 11111111$$

Το μέσο πλήθος Bits να δείγμα που χρησιμοποιούμε για την κωδικοποίηση καλούμε *Μέσο Ρυθμό Κωδικοποίησης R.*

Επειδή στο PCM που περιγράφουμε χρησιμοποιούμε κωδικές λέξεις σταθερού μήκους με *ν* bits $\nu=\log_2(N)$, ισχύει:

Ρυθμός Κωδικοποίησης: $\nu=\log_2(N)$

Και επομένως

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N} = \frac{x_{\max}}{2^{\nu-1}}$$

Έχοντας το PDF του σφάλματος κβάντισης μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση του σφάλματος αυτού.

$$E[\tilde{X}^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta}\tilde{x}^2\,d\tilde{x} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} = \frac{x_{\max}^2}{3\times 4^{\nu}}$$

Και επομένως το πηλίκο σήμα προς θόρυβο, SQNR, του κβαντισμένου σήματος γίνεται:

$$\mathrm{SQNR} = \frac{\overline{X^2}}{\overline{\tilde{X}^2}} = \frac{3\times N^2\overline{X^2}}{x_{\max}^2} = \frac{3\times 4^{\nu}\overline{X^2}}{x_{\max}^2}$$

Στον τελευταίο τύπο διακρίνουμε τον παράγοντα

$$\frac{\overline{X^2}}{x_{\max}^2}$$

Το πηλίκο αυτό εξαρτάται από τη στατιστική του σήματος $x(t)$ και μπορούμε να διακρίνουμε ότι είναι η διακύμανση του σήματος $x(t)/x_{max}$. Δηλαδή το πηλίκο αυτό ισούται με την ισχύ της κανονικοποιημένης μορφής του σήματος $x(t)$.

Θα συμβολίζουμε λοιπόν το πηλίκο αυτό με P_{mn}

$$P_{mn} = \frac{\overline{X^2}}{x_{\max}^2}$$

Οπότε:

$$SQNR = 3 \cdot 4^{\nu} P_{mn}$$

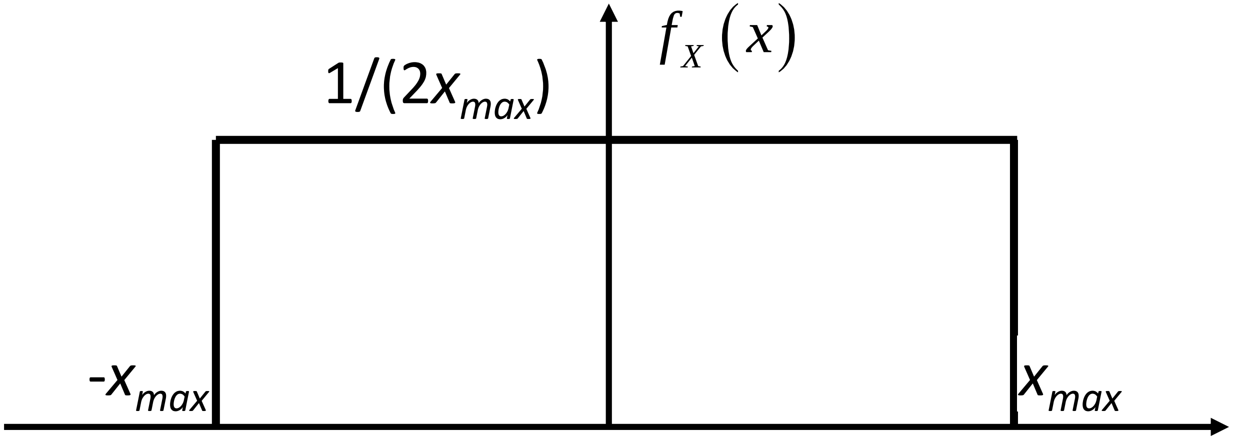
και αν υπολογίσουμε την ποιότητα σε decibels

$$SQNR_{dB} = 6v + 4.8 + P_{mn|\mathrm{dB}}$$

Ο τελευταίος τύπος μας δείχνει ότι κάθε αύξηση της τιμής του ρυθμού κωδικοποίησης *ν* κατά μία μονάδα, αυξάνει την ποιότητα του σήματος κατά 6 dB.

Στον ίδιο τύπο διακρίνουμε τον προσθετέο $P_{mn\mathrm{dB}}$ της οποίας η τιμή εξαρτάται αποκλειστικά από το PDF $f_X(x)$ του σήματος που διαβιβάζεται μέσω του PCM. Για ένα σήμα $x(t)$ με ομοιόμορφο PDF η P_{mn}

Για παράδειγμα όταν το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει ομοιόμορφο PDF η P_{mn}=1/3 και $P_{mn\mathrm{dB}}$=-4.8 dB.



Πράγματι, αν το PDF του διαβιβαζόμενου σήματος είναι όπως στο σχήμα, θα ισχύει:

$$E[x]=0$$

και

$$\sigma_x^2 = E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{2}{2x_{\max}} \int_0^{x_{\max}} x^2 dx = \frac{x_{\max}^2}{3}$$

άρα P_{mn}=1/3 και $P_{mn\mathrm{dB}}$=-4.8 dB

Οπότε για σήμα $x(t)$ με ομοιόμορφο PDF οι αντίστοιχοι τύποι της ποιότητας απλοποιούνται σε

$$SQNR = 4^{v} = 2^{2v}$$

$$SQNR_{dB} = 6v$$

Απαιτήσεις ενός συστήματος PCM σε Εύρος Ζώνης BC και Ισχύ Λήψης PR

Ρυθμός Δημιουργίας Δυαδικών Δεδομένων, R_b

Αν f_S είναι η συχνότητα δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος και v bits/sample ο ρυθμός κωδικοποίησης του PCM, τότε ο Ρυθμός Δημιουργίας Δυαδικών Δεδομένων R_b ισούται με:

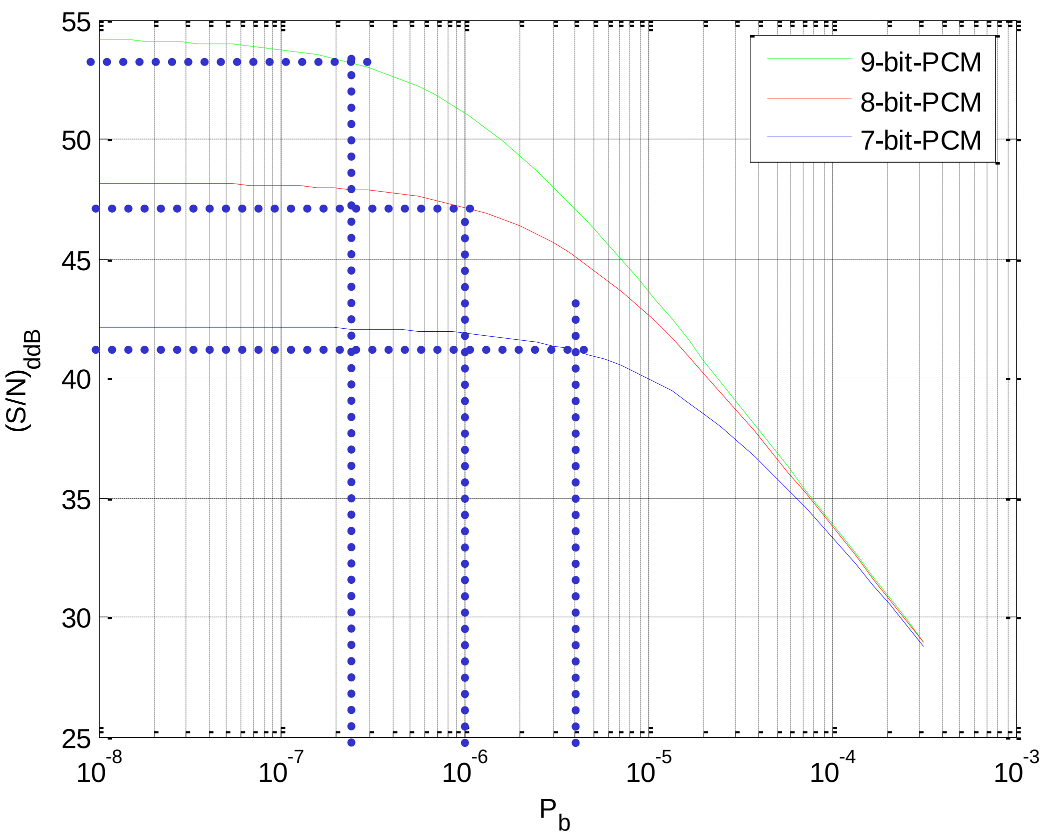
$$R_b=f_S v$$

Ποιότητα Σήματος στον Προορισμό, $(S/N)_d$ - Πιθανότητα Κατωφλίου P_{th}.

Όταν τα δυαδικά δεδομένα που δημιουργήθηκαν από το PCM διαβιβαστούν μέσα από ένα δυαδικό κανάλι με πιθανότητα σφάλματος P_b, τα ανακατασκευασμένα δείγματα στον δέκτη θα έχουν υποστεί μια επιπλέον παραμόρφωση που οφείλεται στα σφάλματα του καναλιού. Αποδεικνύεται ότι η παραμόρφωση αυτή (θόρυβος) έχει ως αποτέλεσμα η ποιότητα του σήματος στον προορισμό να γίνει τελικά $(S/N)_d$.

$$(S/N)_d = \frac{(S/N)_{\max}}{1+4P_b 4^v}$$

όπου $(S/N)_{max}$ είναι η ποιότητα της ακολουθίας των κβαντισμένων δειγμάτων αμέσως μετά την κβάντιση και v είναι ο ρυθμός κωδικοποίησης των δειγμάτων.



Στο παραπλεύρως διάγραμμα έχει χαραχθεί η σχέση του $(S/N)_{d\text{-}dB}$ συναρτήσει της P_b για ένα σήμα με ομοιόμορφο PDF και για ρυθμούς κωδικοποίησης v=7,8 και 9 bits/sample.

Από το διάγραμμα αυτό μπορείτε να διαπιστώσετε ότι για μικρές τιμές της πιθανότητας σφάλματος, P_b του δυαδικού καναλιού, η ποιότητα $(S/N)_{d\text{-}dB}=6v$, δηλαδή είναι ίδια με την ποιότητα στην έξοδο του κβαντιστή.

Αντίθετα για μεγάλες πιθανότητες σφάλματος η τιμή της ποιότητας καταρρέει.

Στην πράξη ορίζεται η τιμή P_{th} ως η τιμή της P_b που εξασφαλίζει ποιότητα ίση με 1 dB μικρότερη από τη μέγιστη τιμή. Εφαρμόζοντας τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η P_{th} δίνεται από τη σχέση:

$$P_{th} = 4^{-(v+2)}$$

Αν εξασφαλιστεί να ισχύει $P_b < P_{th}$, τότε η ποιότητα του σήματος στον προορισμό είναι περίπου ίση με αυτήν της εξόδου στον κβαντιστή.

Σημειώστε ότι τιμή της P_b πολύ μικρότερη της P_{th} δεν προσφέρει καμία αύξηση στην ποιότητα αλλά απλώς αυξάνει την απαίτηση της ισχύος λήψης στο δέκτη.

Στο διάγραμμα διακρίνονται οι τιμές της P_{th} για τις αντίστοιχες τιμές του *v*.

Παράδειγμα

Ένα σήμα ομιλίας με ομοιόμορφο PDF και με εύρος ζώνης W=5 KHz διαβιβάζετε με σύστημα PCM. Για το σκοπό αυτό το σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό f_S=12 KHz και τα δυαδικά δεδομένα διαβιβάζονται χρησιμοποιώντας ένα AWGN κανάλι με φασματική πυκνότητα $N_0/2=10^{-12}$ Watt/Hz. Για τα ακόλουθα συστήματα PCM:

7 bits/B-PAM	7 bits/Q-PSK	7 bits/8-PAM	7 bits/8-PSK
8 bits/B-PAM	8 bits/Q-PSK	8 bits/8-PAM	8 bits/8-PSK
10 bits/B-PAM	10 bits/Q-PSK	10 bits/8-PAM	10 bits/8-PSK

Να προσδιορίσετε:

α) την ποιότητα στον προορισμό $(S/N)_{d,dB}$, τον απαιτούμενο ρυθμό διαβίβασης δυαδικών δεδομένων R_b, και τον αντίστοιχο ρυθμό διαβίβασης συμβόλων, R.

β) Την τιμή της πιθανότητας κατωφλίου P_{th} την αντίστοιχη τιμή της πιθανότητας σφάλματος ανά σύμβολο, P_e και την ισχύ λήψης, P_R.

Λύση

Με δεδομένο ότι θα έχει επιλεγεί $P_b<P_{th}$, η ποιότητα στον προορισμό θα είναι ίση με την ποιότητα στην έξοδο του κβαντιστή, ίση με 6*ν* dB.

Επομένως ανεξάρτητα από το ψηφιακό σύστημα διαβίβασης της δυαδικής ακολουθίας θα ισχύει:

$$\left(S/N\right)_d = 6v$$

Παρόμοια ανεξάρτητα από το σύστημα διαβίβασης θα ισχύει:

$$R_b = f_S v \quad \text{και} \quad P_{th} = 4^{-(v+2)}$$

Οπότε:

	$\left(S/N\right)_d$	R_b	P_{th}
7 bits-PCM	42 dB	84 Kbit/sec	$4\text{x}10^{-6}$
8 bits -PCM	48 dB	96 Kbit/sec	10^{-6}
10 bits -PCM	60 dB	120 Kbit/sec	$6.4\text{x}10^{-8}$

Ο ρυθμός διαβίβασης συμβόλων *R* δίνεται από τη σχέση.

$$R = R_b / \log_2(M) = f_s v / \log_2(M)$$

Οπότε:

7 bits/B-PAM *R*=84 Ksymbols/sec	7 bits/Q-PSK *R*=42 Ksymbols/sec	7 bits/8-PAM & 7 bits/8-PSK *R*=28 Ksymbols/sec
8 bits/B-PAM *R*=96 Ksymbols/sec	8 bits/Q-PSK *R*=48 Ksymbols/sec	8 bits/8-PAM & 8 bits/8-PSK *R*=32 Ksymbols/sec
10 bits/B-PAM *R*=120 Ksymbols/sec	10 bits/Q-PSK *R*=60 Ksymbols/sec	10 bits/8-PAM & 10 bits/8-PSK *R*=40 Ksymbols/sec

Για τον προσδιορισμό της ισχύος λήψης πρέπει να γίνει χωριστός υπολογισμός για κάθε σύστημα ψηφιακής διαβίβασης. Έτσι για B-PAM :

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{R_b N_0}}\right) < P_{th} \Rightarrow P_R > \left[Q^{-1}\left(P_{th}\right)\right]^2 R_b \frac{N_0}{2}$$

Όπου Q^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της $Q(k)$.

Και αντικαθιστώντας P_{th} και R_b για 7,8 &10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ .Βλέπε επόμενο πίνακα.

<u>Για QPSK</u>

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{R_b N_0}}\right), P_b = P_e/2 = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{R_b N_0}}\right) < P_{th}$$

$$P_R > \left[Q^{-1}\left(P_{th}\right)\right]^2 R_b \frac{N_0}{2}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας P_{th} και R_b για 7,8 &10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ. Βλέπε επόμενο πίνακα.

<u>Για 8-PAM</u>

$$P_e = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2(M)P_R}{(M^2-1)R_b N_0}}\right) \Rightarrow P_b = P_8/3 = \frac{1}{3}\times\frac{2\times 7}{8}Q\left(\sqrt{\frac{6\times 3P_R}{63R_b N_0}}\right) < P_{th}$$

Οπότε: $$P_R > 7\left[Q^{-1}\left(\frac{24P_{th}}{14}\right)\right]^2 \frac{N_0}{2} R_b$$

Και για P_{th} και R_b για 7,8 &10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ. Βλέπε επόμενο πίνακα.

<u>Για 8-PSK</u>

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2(M)P_R}{R_b N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{M}}\right)\right) \Rightarrow P_b = \frac{P_8}{3} = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2\times 3P_R}{R_b N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) < P_{th}$$

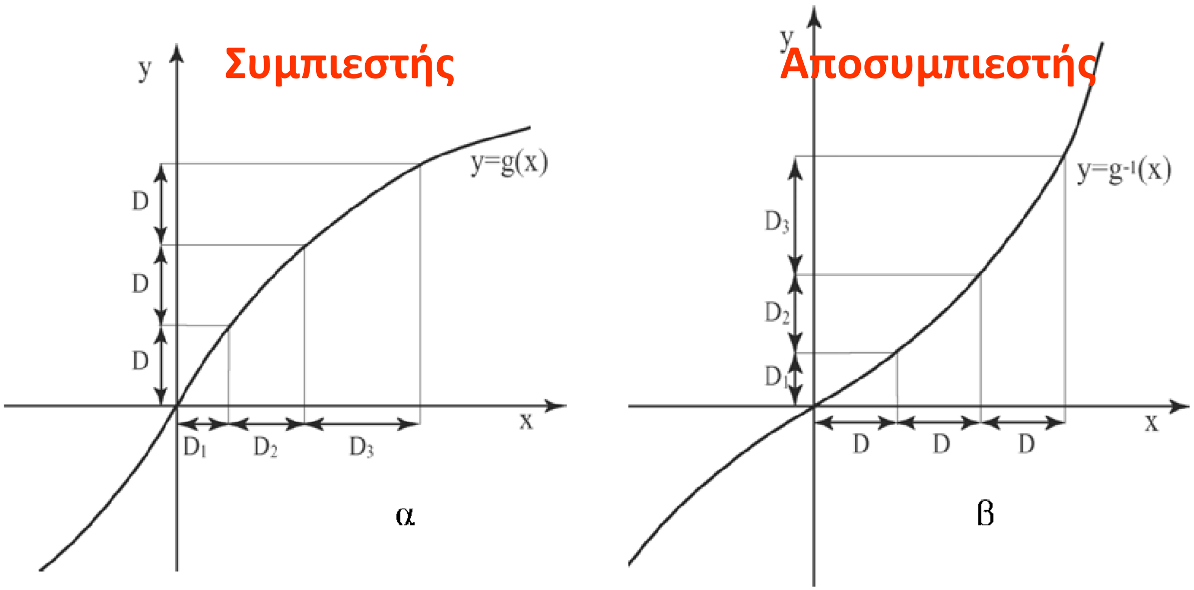
Οπότε: $$P_R > \frac{1}{3\sin^2(\pi/8)}\left[Q^{-1}\left(\frac{3P_{th}}{2}\right)\right]^2 \frac{N_0}{2} R_b$$

Και για P_{th} και R_b για 7,8 &10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ. Βλέπε επόμενο πίνακα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ			
α) $(S/N)_{d\,dB}$, R_b, R			
7 bits/B-PAM 42 dB, 84 Kbits/sec, 84 Ksym/sec	**7 bits/Q-PSK** 42 dB, 84 Kbits/sec, 42 Ksym/sec	**7 bits/8-PAM** 42 dB, 84 Kbits/sec, 28 Ksym/sec	**7 bits/8-PSK** 42 dB, 84 Kbits/sec, 28 Ksym/sec
8 bits/B-PAM 48 dB, 96 Kbits/sec, 96 Ksym/sec	**8 bits/Q-PSK** 48 dB, 96 Kbits/sec, 48 Ksym/sec	**8 bits/8-PAM** 48 dB, 96 Kbits/sec, 32 Ksym/sec	**8 bits/8-PSK** 48 dB, 96 Kbits/sec, 32 Ksym/sec
10 bits/B-PAM 60 dB, 120 Kbits/sec, 120 Ksym/sec	**10 bits/Q-PSK** 60 dB, 120 Kbits/sec, 60 Ksym/sec	**10 bits/8-PAM** 60 dB, 120 Kbits/sec, 40 Ksym/sec	**10 bits/8-PSK** 60 dB, 120 Kbits/sec, 40 Ksym/sec
β) P_{th}, P_e, P_R			
7 bits/B-PAM 4×10^{-6} 4×10^{-6} 1.7 μWatt	**7 bits/Q-PSK** 4×10^{-6} 8×10^{-6} 1.7 μWatt	**7 bits/8-PAM** 4×10^{-6} 1.2×10^{-5} 11 μWatt	**7 bits/8-PSK** 4×10^{-6} 1.2×10^{-5} 3.7 μWatt
8 bits/B-PAM 10^{-6} 10^{-6} 2.2 μWatt	**8 bits/Q-PSK** 10^{-6} 2×10^{-6} 2.2 μWatt	**8 bits/8-PAM** 10^{-6} 3×10^{-6} 15 μWatt	**8 bits/8-PSK** 10^{-6} 3×10^{-6} 4.8 μWatt
10 bits/B-PAM 6.4×10^{-8} 6.4×10^{-8} 3.4 μWatt	**10 bits/Q-PSK** 6.4×10^{-8} 1.3×10^{-7} 3.4 μWatt	**10 bits/8-PAM** 6.4×10^{-8} 1.9×10^{-7} 23 μWatt	**10 bits/8-PSK** 6.4×10^{-8} 1.9×10^{-7} 7.4 μWatt

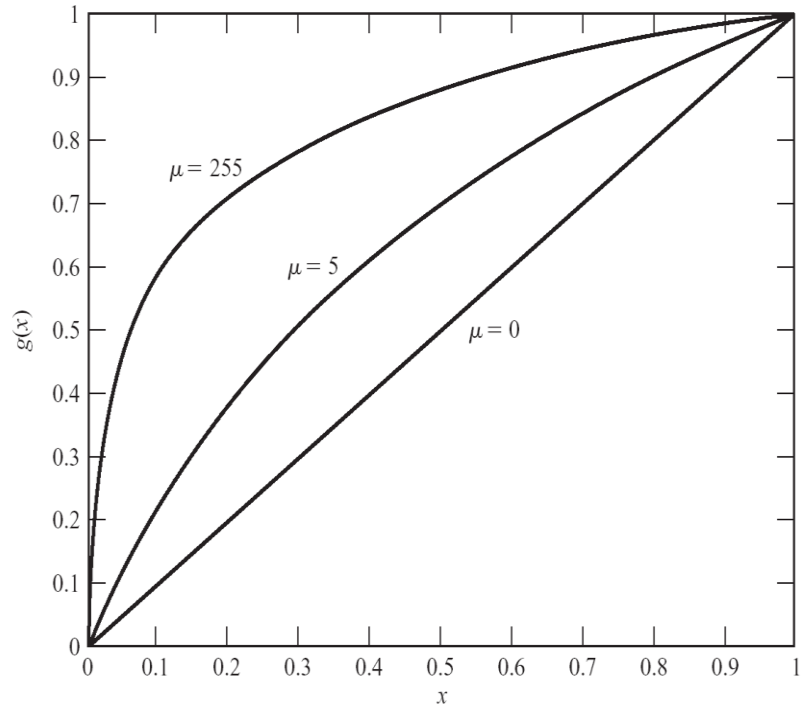
ΜΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ (ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ) PCM

Η Τεχνική Companding (compressing-expanding)



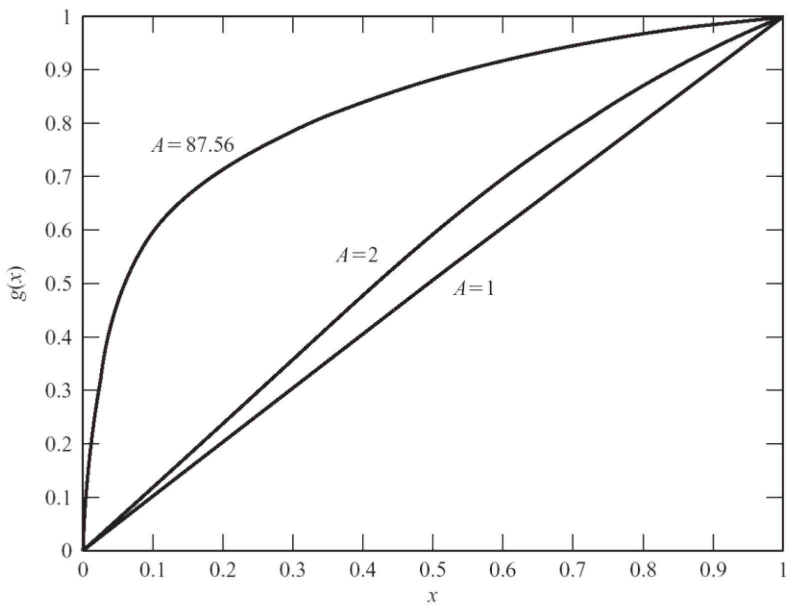
Συμπιεστής τύπου ‘μ’ (ΗΠΑ)

$$g(x) = \frac{\log\left(1+\mu\left|x/x_{\max}\right|\right)}{\log(1+\mu)} sgn(x)$$



Συμπιεστής τύπου ‘A’ (Καναδάς-Ευρώπη)

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{A\left|x/x_{\max}\right|}{1+\log A}\operatorname{sgn}(x), & 0\le\left|x/x_{\max}\right|\le 1/A\\[2ex] \dfrac{1+\log\left(A\left|x/x_{\max}\right|\right)}{1+\log A}\operatorname{sgn}(x), & 1/A\le\left|x/x_{\max}\right|\le 1\end{cases}$$



Τέλος Ενότητας

Pulse Code Modulation

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.