ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 2: Φώραση

Εμμανουήλ Σαγκριώτης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Σκοποί ενότητας

1. Γνωριμία με τεχνικές εκτίμησης της τιμής συμβόλου όταν αυτό συνοδεύεται από AWG θόρυβο.
2. Γνωριμία με την τεχνική υπολογισμού της πιθανότητας να συμβεί λάθος κατά την εκτίμηση του συμβόλου.

Περιεχόμενα ενότητας

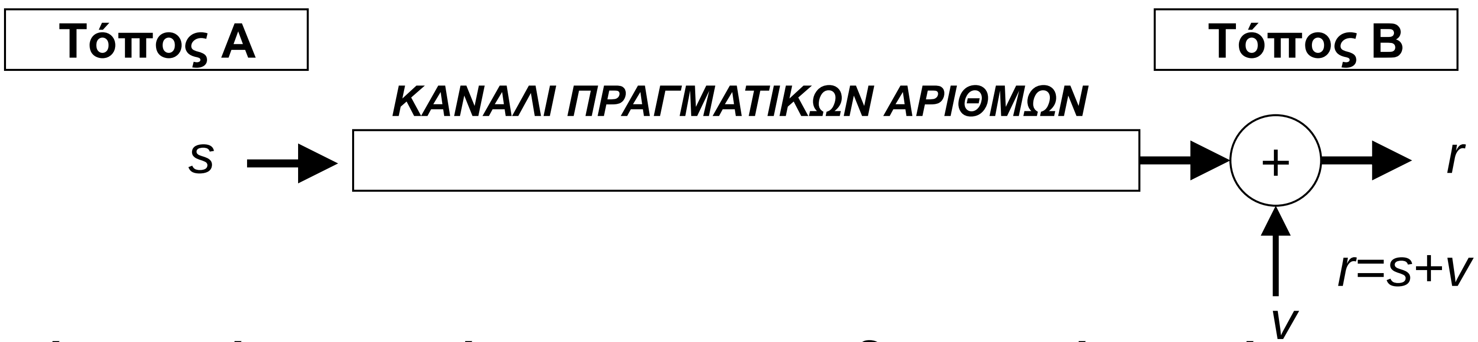
1. Κριτήρια λήψης απόφασης Μεγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood)
2. Κριτήριο Ελάχιστης Απόστασης. (Minimum Distance-mD)
3. Εξειδίκευση της υλοποίηση του κριτηρίου mD για κάθε Αστερισμό Συμβόλων.
4. Υπολογισμός Πιθανότητας λήψης εσφαλμένης Απόφασης.

Ενότητα 2

Φώραση (Decision)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Θεωρείστε ότι διαθέτουμε μια διάταξη (κανάλι πραγματικών αριθμών) μέσα από το οποίο γίνεται δυνατή η διαβίβαση ενός πραγματικού αριθμού, s από ένα τόπο Α σε έναν άλλο Β. Η διάταξη αυτή όμως προσθέτει στον αριθμό s, που διαβιβάζεται, έναν τυχαίο αριθμό v γνωστής στατιστικής. Έτσι στον τόπο Β τελικά φθάνει ο πραγματικός αριθμός $r=s+v$



Ζητείται από την τιμή του r να προσδιοριστεί η τιμή του αριθμού s, που διαβιβάστηκε έτσι ώστε η πιθανότητα να συμβεί σφάλμα να είναι ελάχιστη.

Το πιο πάνω πρόβλημα απλοποιείται αν συμφωνηθεί πως το s ανήκει σε ένα πεπερασμένου πλήθους αλφάβητο, γνωστό στο δέκτη.

Πιο Τυπικά το προηγούμενο Πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

Δίνονται οι τυχαίες μεταβλητές με πραγματικές τιμές, *r, s, v* για τις οποίες ισχύει:

$$r=s+v$$

Δίνεται ότι η *s* είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με ιστόγραμμα

$$P(s=s_1)=P(s=s_2)=1/2$$

Ο *v* είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με Gaussian PDF, $f_v(v)$, με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σ^2.

$$f_v(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

Δεδομένης της τιμής του *r* ζητείται κριτήριο (ο τρόπος) με τον οποίο να προσδιορίζεται η τιμή του *s* (δλδ ισχύει $s=s_1$ ή $s=s_2$?) έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η πιθανότητα να συμβεί λάθος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Είναι γνωστό στο δέκτη ότι το *s* ανήκει στο σύνολο {1, -1} και μια ακολουθία $\{s_n\}$ που έχει αποσταλεί έφθασε στο δέκτη ως $\{r_n\}$

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
$\{r_n\}$	-1.43	-2.67	1.13	-0.71	-2.15	0.19	0.19	0.96	-0.67

Ποια είναι η πιο πιθανή τιμή για κάθε στοιχείο της $\{s_n\}$; Η απάντηση πρέπει να δοθεί έτσι ώστε τα σφάλματα να είναι όσο το δυνατόν λιγότερα.

ΛΥΣΗ

Για την επίλυση του Προβλήματος αυτού καταρχήν υπολογίζονται οι συναρτήσεις PDF $f_r(z/s=s_1)$ και $f_r(z/s=s_2)$.

$$f_r(z\,|\,s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(z-s_1)^2}{2\sigma^2}} \qquad f_r(z\,|\,s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(z-s_2)^2}{2\sigma^2}}$$

Στη συνέχεια:
υπολογίζονται οι τιμές $f_r(r/s=s_1)$ και $f_r(r/s=s_2)$.
και η απόφαση λαμβάνεται ως κάτωθι:

$$\text{Αν} \quad f_r(r\,|\,s_1) > f_r(r\,|\,s_2) \Rightarrow s = s_1$$
$$\text{αλλιώς} \qquad \Rightarrow s = s_2$$

ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΣ ΛΟΙΠΟΝ

$$f_r(z\,|\,s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(z-s_1)^2}{2\sigma^2}} \qquad f_r(z\,|\,s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(z-s_2)^2}{2\sigma^2}}$$

Επειδή τα σύμβολα s_1 και s_2 εμφανίζονται με ίσες πιθανότητες για τον προσδιορισμό της τιμής του s από το r θα εφαρμόσουμε το *ML κριτήριο*.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ “ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ”
(MAXIMUM LIKELIHOOD-ML)

$$\begin{array}{lll} \text{Αν} \quad f_r(r\,|\,s_1) > f_r(r\,|\,s_2) & \Rightarrow & s = s_1 \\ \quad\;\; \text{αλλιώς} & \Rightarrow & s = s_2 \end{array}$$

ΑΠΛΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ML ΣΤΟ ΔΕΚΤΗ

Η σχέση της προηγούμενης διαφάνειας απλοποιείται αν λάβουμε υπόψιν ότι η συνάρτηση ln(x) είναι αύξουσα συνάρτηση, επομένως ισχύει:

$$x \geq y \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(y) \quad \forall \mathrm{x,y>0}$$

Επομένως το κριτήριο ML γίνεται:

$$\begin{array}{ll} \text{Αν} \quad \ln\left(f_r\left(r \mid s_1\right)\right) > \ln\left(f_r\left(r \mid s_2\right)\right) \Rightarrow & s = s_1 \\ \text{αλλιώς} \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow & s = s_2 \end{array}$$

Και εύκολα απλοποιείται στη Συνθήκη “Ελάχιστης Απόστασης”

$$\begin{array}{ll} \text{Αν} \quad |r - s_1| < |r - s_2| \Rightarrow & s = s_1 \\ \text{αλλιώς} \qquad\qquad \Rightarrow & s = s_2 \end{array}$$

Η τελικά:

ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΑΠΛΟΠΟΙΈΙΤΑΙ ΣΕ:

$$T_0 = \frac{s_1 + s_2}{2}, s_1 < s_2$$

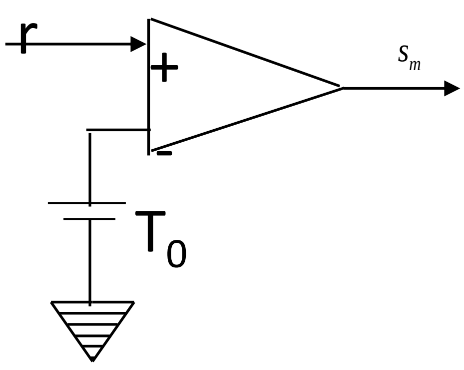
$$\text{Αν} \quad r < \mathrm{T}_0 \Rightarrow \quad s = s_1$$

$$\text{αλλιώς} \quad \Rightarrow \quad s = s_2$$

ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΜΕ ΤΟ ΠΙΟ ΚΑΤΩ ΑΠΛΟ ΚΥΚΛΩΜΑ

ΚΥΚΛΩΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ML

$$T_0 = \frac{s_1 + s_2}{2}$$



Αν στο Παράδειγμα που αναφέραμε εφαρμοστεί το ML κριτήριο απόφασης με τη μορφή της ελάχιστης απόστασης :

$$\text{Αν} \quad |r-1|<|r+1| \Rightarrow \quad s=1$$
$$\text{αλλιώς} \qquad \Rightarrow \quad s=-1$$

Υπολογίζεται η πιο πιθανή τιμή για κάθε ένα από τα στοιχεία της $\{s_n\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\{r_n\}$	-1.43	-2.67	1.13	-0.71	-2.15	0.19	0.19	0.96	-0.67
$\{s_n\}$	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1

Αν θεωρήσουμε ότι στις προηγούμενες αποφάσεις δεν υπάρχει σφάλμα, τότε επειδή ισχύει $v=r-s$

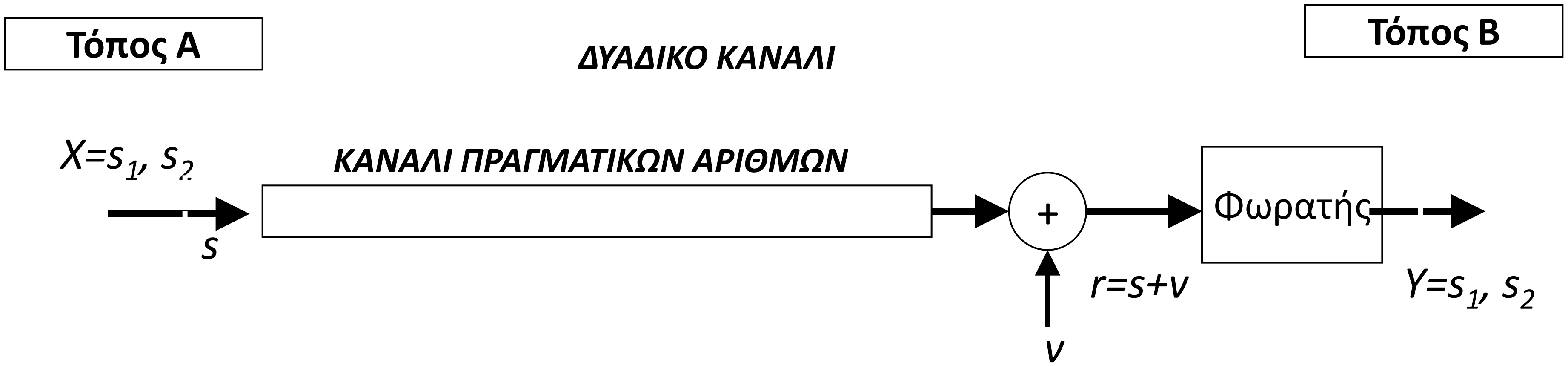
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
$\{v_n\}$	-0.43	-1.67	0.13	0.29	-1.15	-0.81	-0.81	-0.04	0.33

Και υπολογίζεται η διακύμανση σ_v^2:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{9} v^2 = 0.65$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ Pe

Προσθέτοντας στο κανάλι των πραγματικών αριθμών την βαθμίδα του φωρατή αποκτούμε ένα δυαδικό κανάλι.



Η πιθανότητα σφάλματος, P_e, στο κανάλι αυτό είναι:

$$P_e = P\left(Y = s_2 \ \& \ X = s_1\right) + P\left(Y = s_1 \ \& \ X = s_2\right)$$

$$= P\left(Y = s_2 | X = s_1\right) P\left(X = s_1\right) + P\left(Y = s_1 | X = s_2\right) P\left(X = s_2\right)$$

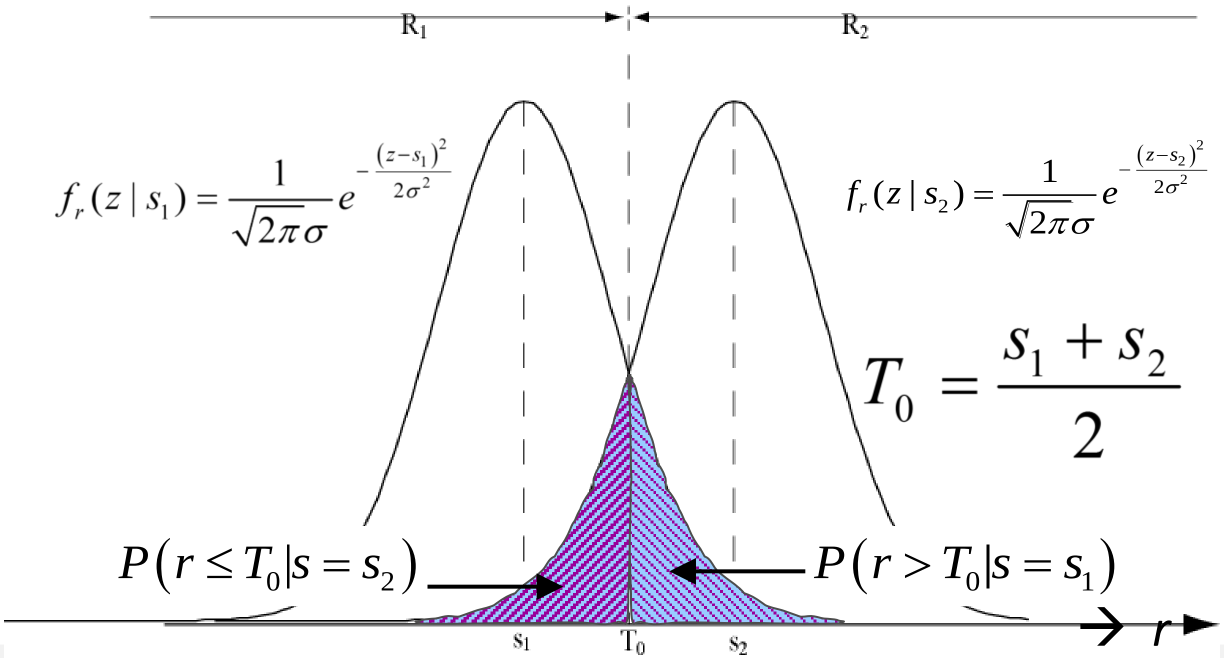
$$P_e = P\left(Y{=}s_2\ \&\ X = s_1\right) + P\left(Y{=}s_1\ \&\ X = s_2\right)$$

$$= P\left(Y{=}s_2 | X = s_1\right) P\left(X = s_1\right) + P\left(Y{=}s_1 | X = s_2\right) P\left(X = s_2\right)$$

Και με βάση τον τρόπο λειτουργίας του καναλιού

$$P_e = P\left(r > T_0 | s = s_1\right)\frac{1}{2} + P\left(r \le T_0 | s = s_2\right)\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left[P\left(r > T_0 | s = s_1\right) + P\left(r \le T_0 | s = s_2\right)\right]$$



$$P\left(r > T_0 | s = s_1\right) = Q\left(\frac{T_0 - s_1}{\sigma}\right)$$

$$P\left(r \le T_0 | s = s_2\right) = 1 - P\left(r > T_0 | s = s_2\right) = 1 - Q\left(\frac{T_0 - s_2}{\sigma}\right)$$

Και επειδή έχουμε επιλέξει $T_0=(s_1+s_2)/2$

$$P\left(r > T_0 | s = s_1\right) = Q\left(\frac{s_2 - s_1}{2\sigma}\right) =$$

$$P\left(r \le T_0 | s = s_2\right) = 1 - P\left(r > T_0 | s = s_2\right) = 1 - Q\left(\frac{s_1 - s_2}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{s_2 - s_1}{2\sigma}\right)$$

Και $$P_e = Q\left(\frac{s_2 - s_1}{2\sigma}\right)$$

$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{|s_1 - s_2|}{2\sigma}\right)}$$

Παράδειγμα:

Για τυπική απόκλιση σ=0.5 και για κάθε τιμή s_1, s_2 = -2:1:2 να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος

Απάντηση:

s_1,s_2	s_2=-2	s_2=-1	s_2=-0	s_2=1	s_2=2
s_1=-2	0.5	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)
s_1=-1	Q(1)	0.5	Q(1)	Q(2)	Q(3)
s_1=0	Q(2)	Q(1)	0.5	Q(1)	Q(2)
s_1=1	Q(3)	Q(2)	Q(1)	0.5	Q(1)
s_1=2	Q(4)	Q(3)	Q(2)	Q(1)	0.5

δηλαδή

s_1,s_2	s_2=-2	s_2=-1	s_2=-0	s_2=1	s_2=2
s_1=-2	0.5	0.16	0.023	1.3 X10^{-3}	3.2 X10^{-5}
s_1=-1	0.16	0.5	0.16	0.023	1.3 X10^{-3}
s_1=0	0.023	0.16	0.5	0.16	0.023
s_1=1	1.3 X10^{-3}	0.023	0.16	0.5	0.16
s_1=2	3.2 X10^{-5}	1.3 X10^{-3}	0.023	0.16	0.5

Άσκηση:

Σε κάποιο Τηλεπ. Σύστημα με σ σταθερό και δύο σύμβολα έχει επιβληθεί να ισχύει:

$$s_1^2+ s_2^2=2E=\text{σταθερά}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των s_1 και s_2 η αντίστοιχη τιμή της πιθανότητας γίνεται ελάχιστη.

Απάντηση: Ως γνωστόν ισχύει:

$$P_e = Q\left(\frac{|s_1 - s_2|}{2\sigma}\right)$$

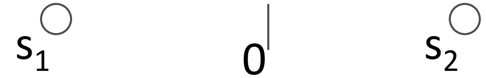
Επειδή η συνάρτηση Q είναι γνησίως φθίνουσα για να ελαχιστοποιήσουμε την P_e αρκεί να επιλεγούν τα s_1 και s_2 έτσι ώστε $|s_1-s_2|=$ μέγιστο (με δεδομένο $s_1^2+s_2^2=2E$).

Ισχύουν:

1. $|s_1-s_2| \le |s_1|+|s_2|$ και το = ισχύει όταν s_1,s_2 ετερόσημα.
2. $(|s_1|+|s_2|)^2= |s_1|^2+|s_2|^2+2|s_1||s_2| \le |s_1|^2+|s_2|^2+|s_1|^2+|s_2|^2$ και το = ισχύει όταν $|s_1|=|s_2|$

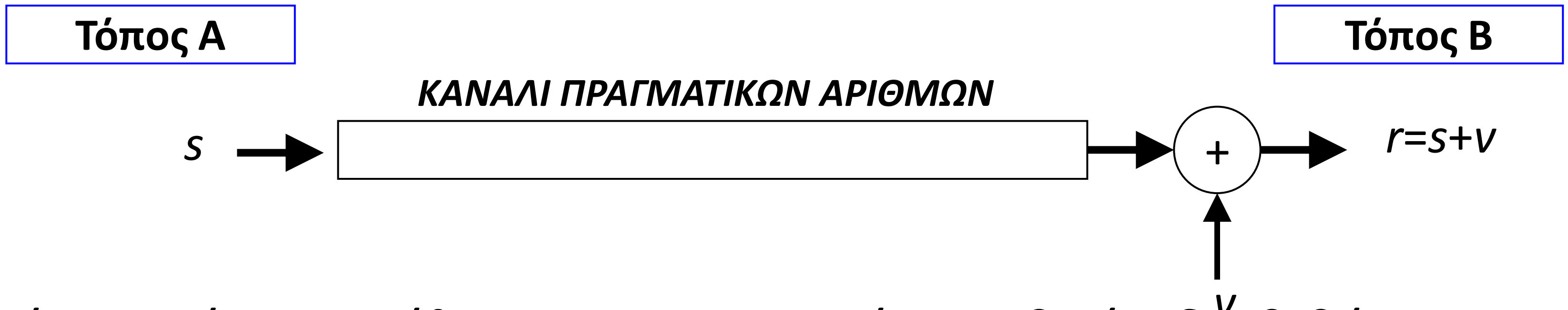
➔ $\max\{|s_1-s_2|^2\}= |s_1|^2+|s_2|^2+|s_1|^2+|s_2|^2$ και ισχύει όταν s_1,s_2 ετερόσημα και $|s_1|=|s_2|$ δηλαδή όταν $s_1=-s_2$ οπότε ισχύει $|s_1-s_2|^2 =4E$ και η πιθανότητα σφάλματος P_e

$$P_e = Q\left(\frac{\sqrt{4E}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E}}{\sigma}\right)$$



Αντίποδα Σήματα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ



Μέσα από το κανάλι των πραγματικών αριθμών διαβιβάζονται σύμβολα – πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν σε αλφάβητο με M στοιχεία. Δίνονται:

$$s \in \{s_1, s_2, \cdots s_M\}$$

$$P(s = s_1) = P(s = s_2) = \cdots = P(s = s_M) = 1/M$$

και v συνεχής τυχαία μεταβλητή με Gaussian PDF, $f_v(v)$, με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σ^2.

$$f_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

Να βρεθεί κριτήριο απόφασης για την τιμή του s έτσι ώστε η πιθανότητα σφάλματος να είναι ελάχιστη!

ΛΥΣΗ

Για την επίλυση του Προβλήματος αυτού καταρχήν υπολογίζονται οι συναρτήσεις PDF $f_r(z/s=s_1)$, $f_r(z/s=s_2)$, ... και $f_r(z/s=s_M)$

$$f_r(z|s_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(z-s_1)^2}{2\sigma^2}} \quad f_r(z|s_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(z-s_2)^2}{2\sigma^2}} \quad f_r(z|s_M)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(z-s_M)^2}{2\sigma^2}}$$

Στη συνέχεια:
υπολογίζονται οι τιμές $f_r(r/s=s_1)$, $f_r(r/s=s_2)$ ...και $f_r(r/s=s_M)$.
και η απόφαση λαμβάνεται ως ακολούθως:

Επειδή τα σύμβολα του αλφαβήτου εμφανίζονται με ίσες πιθανότητες θα εφαρμοστεί και εδώ το κριτήριο ML.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΓΙΑ ΑΛΦΑΒΗΤΟ ΜΕ Μ ΤΙΜΕΣ

Αν $\quad f_r(r|s_i)>f_r(r|s_j),\forall j\in\{1,2,\cdots,M\},j\neq i\Rightarrow \quad s=s_i$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΓΙΑ GAUSSIAN ΘΟΡΥΒΟ ΚΑΙ ΑΛΦΑΒΗΤΟ ΜΕ M ΤΙΜΕΣ

$$\text{Αν} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-s_i)^2}{2\sigma^2}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-s_j)^2}{2\sigma^2}}, \forall j \in \{1,2,\cdots,M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

Λογαριθμίζοντας την προηγούμενη σχέση, το ML απλοποιείται στο κριτήριο ελάχιστης απόστασης:

Κριτήριο "Ελάχιστης Απόστασης"

$$\text{Αν} \quad | r - s_i | < | r - s_j |, \forall j \in \{1,2,\cdots,M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

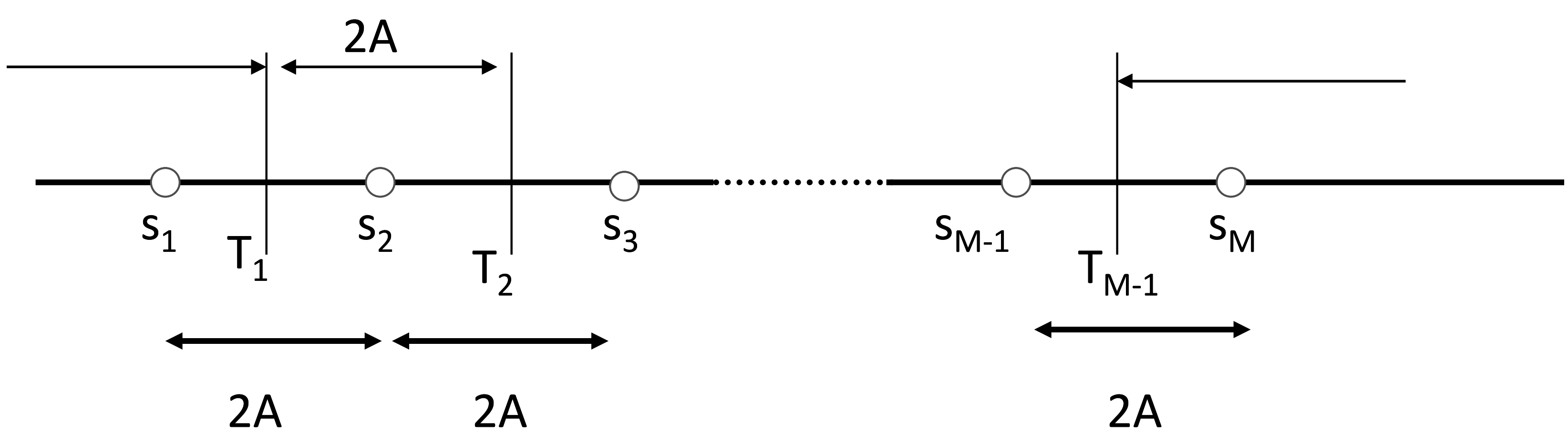
Δηλδ. για Gaussian κατανομή του ν το κριτήριο ML απλοποιείται στο κριτήριο "Ελάχιστης Απόστασης"

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ML ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ

Στην πράξη τα $s_1, s_2, \ldots, s_M$ επιλέγονται ώστε τα γειτονικά σύμβολα να ισαπέχουν, δηλαδή:

$$s_{i+1} - s_i = 2A \text{ για } i = 1,2,\ldots,M-1$$

και ορίζονται τα κατώφλια: $T_i = (s_i + s_{i+1})/2$ για $i=1,2,\ldots,M-1$



Με τον ορισμό των κατωφλίων αυτών το κριτήριο Ελάχιστης Απόστασης καταλήγει:

$$\text{Αν} \quad r < T_1 \Rightarrow s = s_1$$
$$\text{Αν} \quad r > T_{M-1} \Rightarrow s = s_M$$
$$\text{Αν} \quad T_{i-1} < r < T_i \Rightarrow s = s_i \quad i = 2,3,\ldots,M-1$$

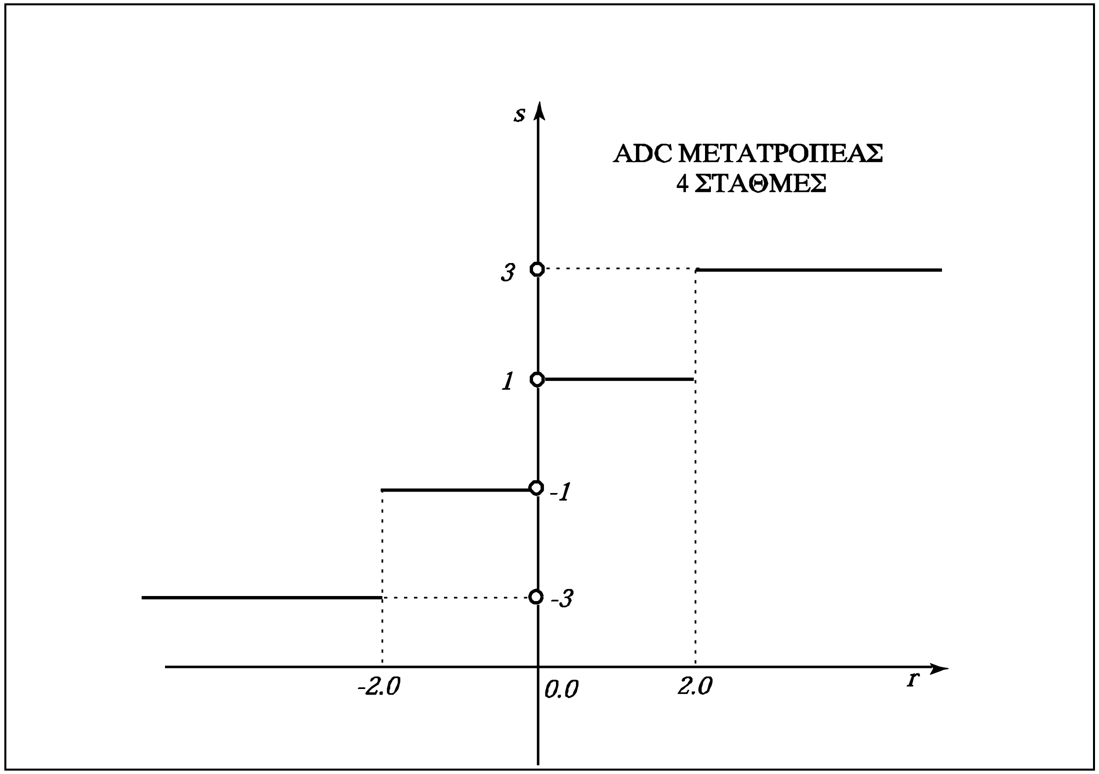
Οι σχέσεις αυτές μπορούν να υλοποιηθούν από το κύκλωμα ενός Αναλογοψηφιακού Μετατροπέα (Analog to Digital Converter-ADC)

Παράδειγμα ADC με 4 στάθμες για την υλοποίηση της βέλτιστης φώρασης σε ένα 4-δικό σύστημα.

Για ένα σύστημα στο οποίο το αλφάβητο είναι το {-3, -1, 1,3}.

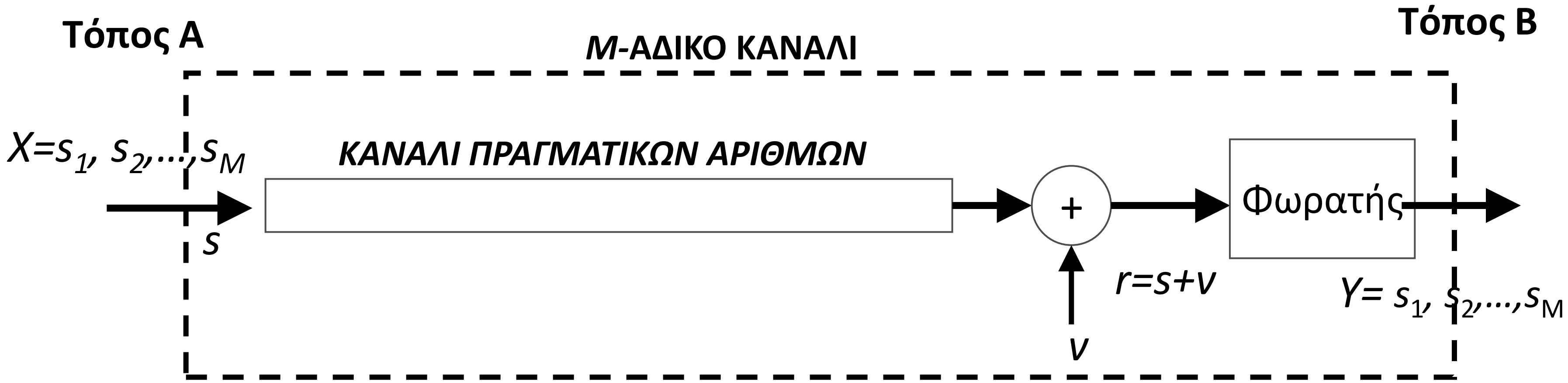
Οι τιμές των κατωφλίων θα είναι: {-2,0,2}.

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η χαρακτηριστική μεταφοράς του ADC με τις 4 στάθμες.



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ Pe ΣΕ ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ Μ ΣΥΜΒΟΛΑ

Προσθέτοντας στο κανάλι των πραγματικών αριθμών την βαθμίδα του φωρατή αποκτούμε ένα *M*-δικό κανάλι.



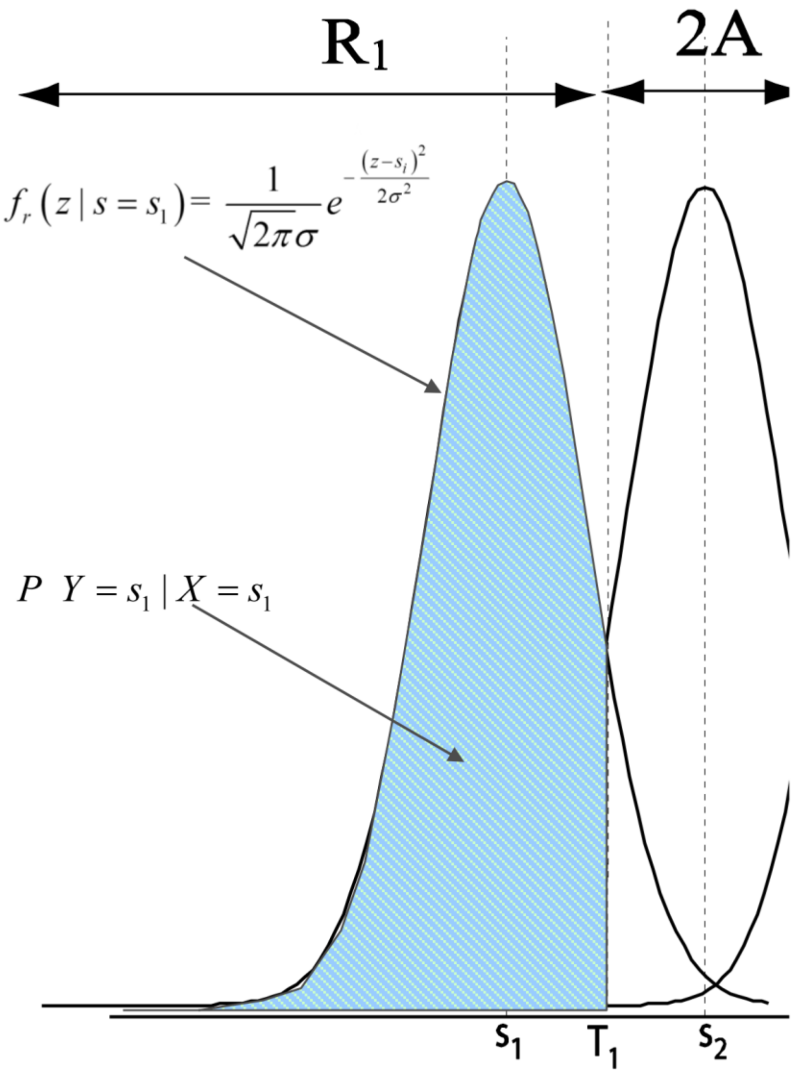
Η Πιθανότητα Σφάλματος, P_e ισούται:

$$P_e = P\left(X \neq Y\right) = 1 - P\left(X = Y\right) = 1 - \sum_{i=1}^{M} P\left(Y = s_i \,\&\, X = s_i\right)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\left(Y = s_i \mid X = s_i\right) P\left(X = s_i\right) = 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} P\left(Y = s_i \mid X = s_i\right)$$

Θυμηθείτε ότι ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση που τα γειτονικά σύμβολα απέχουν σταθερή απόσταση 2A και δεχθείτε ότι ισχύει:

$s_1 > s_2 > \ldots > s_M$

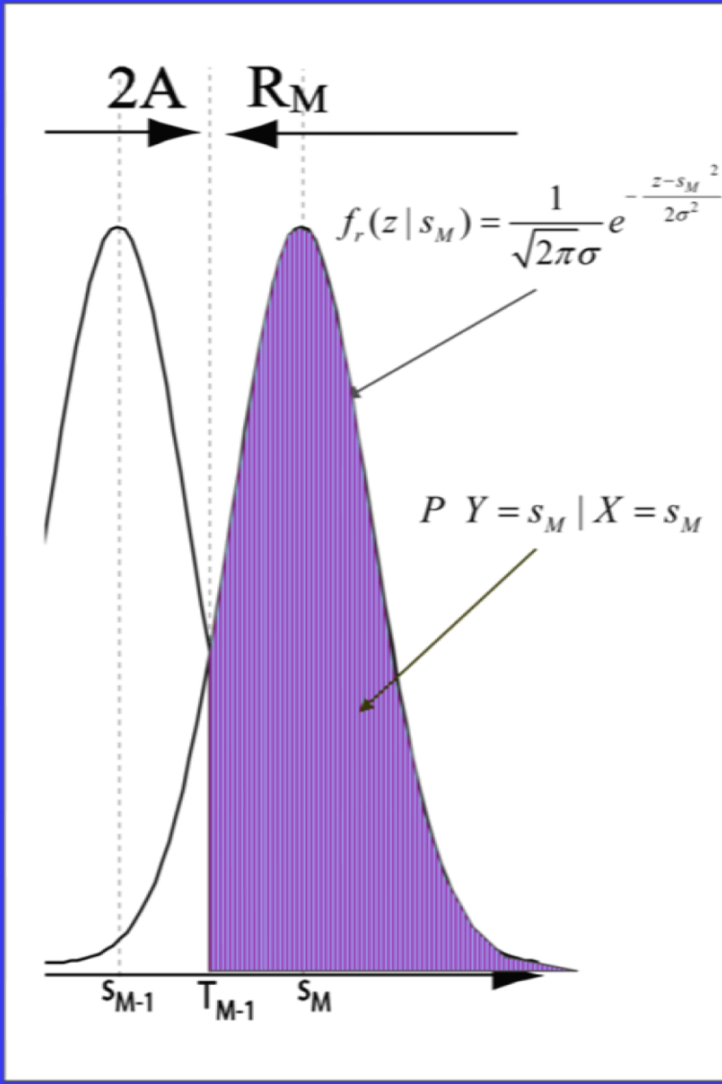


$$P\left(Y = s_1 \mid X = s_1\right) = P(r < T_1 \mid s = s_1) =$$

$$1 - P(r > T_1 \mid s = s_1) = 1 - Q\left(\frac{T_1 - s_1}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Y = s_1 \mid X = s_1\right) = 1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

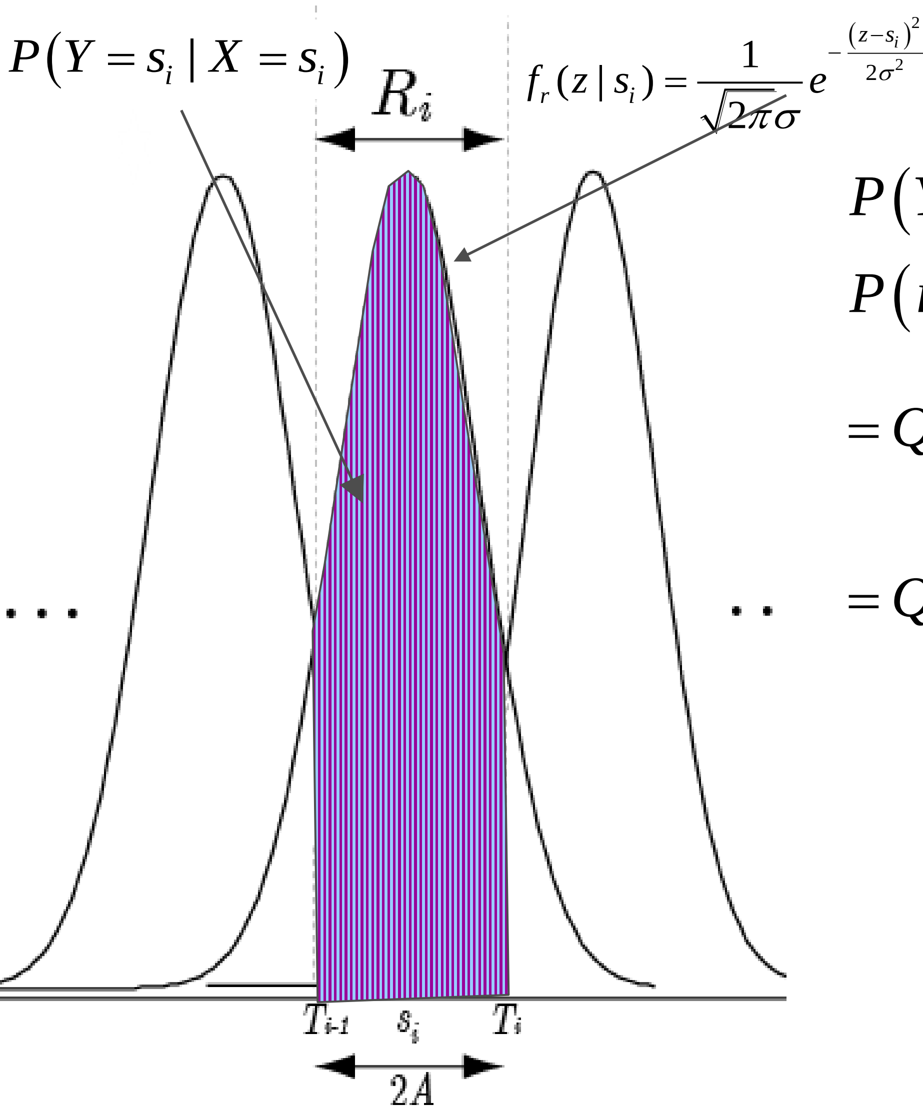
Υπολογισμός της $P\left(Y=s_M \mid X=s_M\right)$



$$P\left(Y=s_M \mid X=s_M\right)=P\left(r>T_{M-1} \mid s=s_M\right)=Q\left(\frac{T_{M-1}-s_M}{\sigma}\right)=Q\left(\frac{-A}{\sigma}\right)=1-Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Y=s_M \mid X=s_M\right)=1-Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Υπολογισμός της $P\left(Y=s_i \mid X=s_i\right), i=2,3,\cdots,M-1$



$$P\left(Y=s_i \mid X=s_i\right)=P\left(T_i>r>T_{i-1} \mid s=s_i\right)=$$
$$P\left(r>T_{i-1} \mid s=s_i\right)-P\left(r>T_i \mid s=s_i\right)=$$
$$=Q\left(\frac{T_{i-1}-s_i}{\sigma}\right)-Q\left(\frac{T_i-s_i}{\sigma}\right)=$$
$$=Q\left(\frac{-A}{\sigma}\right)-Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)=1-2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Y=s_i \mid X=s_i\right)=1-2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΣΕ ΚΑΝΑΛΙ M ΜΕ ΣΥΜΒΟΛΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

$$P_e = 1 - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P\left(Y = s_i \mid X = s_i\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{M}\left[1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \left(\mathrm{M}-2\right)\left(1 - 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right) + 1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right]$$

$$\boxed{\mathrm{P_e} = 2\frac{\mathrm{M}-1}{\mathrm{M}}\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{A}}{\sigma}\right)}$$

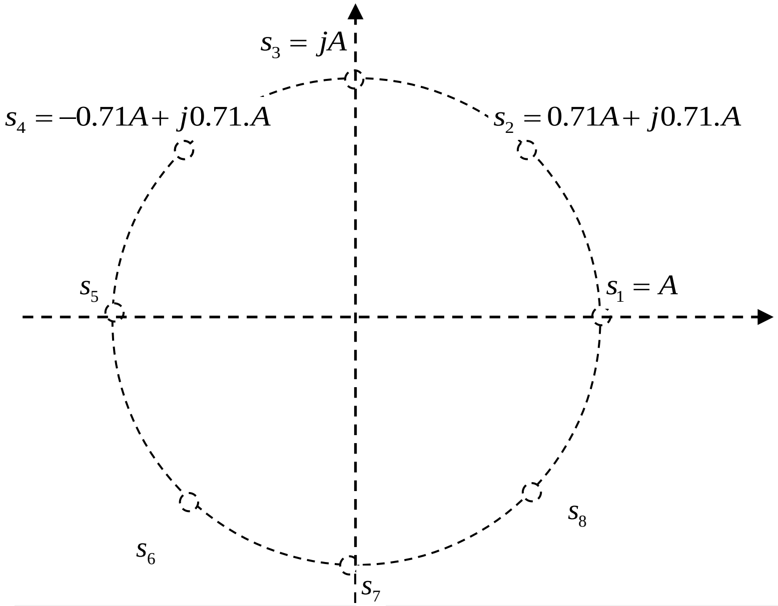
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΦΟΡΑΣΗΣ στις 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Για τους μιγαδικούς αριθμούς:

$r=s+v$ όπου s μια τυχαία διακριτή μεταβλητή με M δυνατές μιγαδικές τιμές, τις s_1, s_2,…,s_M και με ιστόγραμμα εμφάνισης

$$P(s=s_1)=P(s=s_2)=\cdots=P(s=s_M)=1/M$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

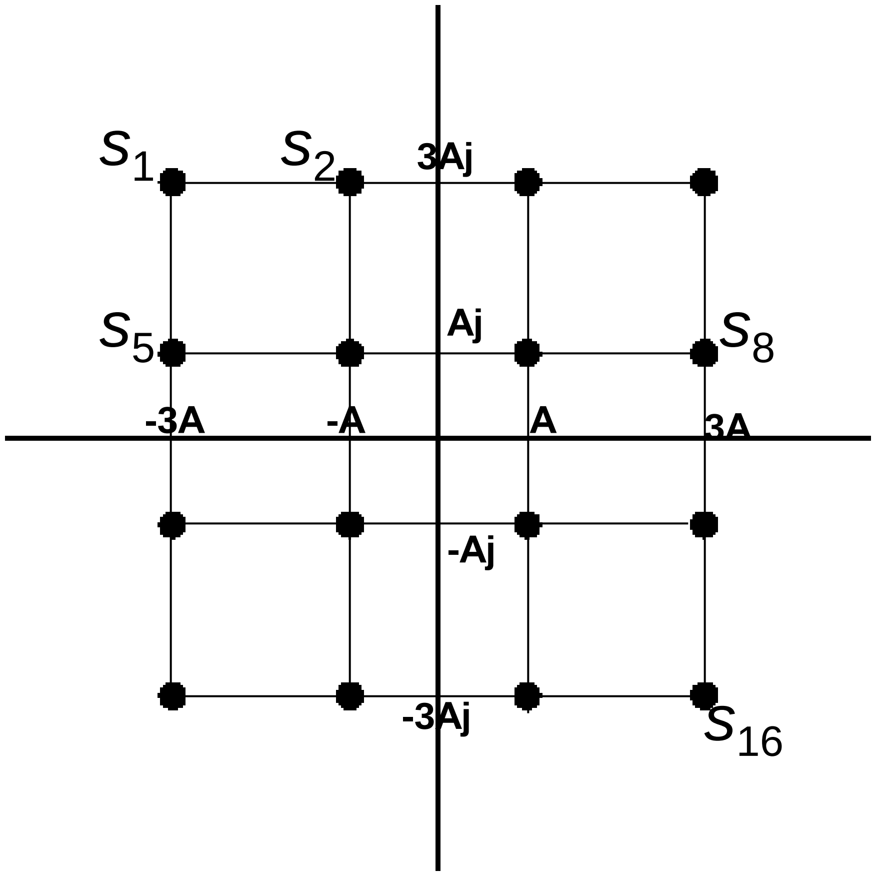


1. 8-PSK

Χαρακτηριστικό του αστερισμού αυτού: “όλα τα σύμβολα έχουν το ίδιο μέτρο”

Το σχήμα αυτό του αστερισμού το συναντάμε και με 4 σύμβολα (4-PSK ή QPSK)

Παράδειγμα-2:
Αστερισμός με 16 μιγαδικά σύμβολα.



2. 16-QAM

Παράδειγμα Τιμών των Συμβόλων του Αστερισμού 16-QAM

s_1=-3A+j3A

s_8=3A+jA

s_{16}=3A-j3A

Στα συστήματα αυτά η ακολουθία θορύβου είναι επίσης μιγαδική. Συγκεκριμένα:

Ο *v* είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με τιμή μιγαδική. Τόσο το πραγματικό μέρος, (v_{Re}) όσο και το φανταστικό, ($v_{I\mu}$) είναι τυχαίες μεταβλητές, στατιστικά ανεξάρτητες και με την ίδια ακριβώς κατανομή (Independent and Identically Distributed –iid). Και οι δύο περιγράφονται από Gaussian PDF, $f_v(v)$, με μέση τιμή μηδέν και την διακύμανση σ^2.

$$f_{v_{\mathrm{Re}}}(z) = f_{v_{\mathrm{Im}}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

Το PDF του θορύβου *v*, $f_v(v)$ είναι πραγματική συνάρτηση αλλά εξαρτάται από δύο μεταβλητές τις v_{Re} και τη v_{Im}. Επειδή v_{Re} και v_{Im} είναι τυχ. μεταβλητές μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητες με Gaussian κατανομή θα ισχύει:

$$f_v(v) = f_v(v_{\mathrm{Re}} + jv_{\mathrm{Im}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{v_{\mathrm{Re}}^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{v_{\mathrm{Im}}^2}{2\sigma^2}}$$

ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΓΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

Για τον προσδιορισμό της πιο πιθανής τιμής του συμβόλου που έχει σταλεί, από τον μιγαδικό αριθμό *r* που έλαβε ό δέκτης εφαρμόζεται και εδώ το κριτήριο Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ML).

Αυτό ισχύει αφού και στην περίπτωση αυτή τα σύμβολα δεχθήκαμε ότι εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα.

Ορίζονται λοιπόν τα υποσυνθήκη PDF:

$$f_r(z \mid s_i) = f_r(z_{\mathrm{Re}} + jz_{\mathrm{Im}} \mid s_{i\,\mathrm{Re}} + js_{i\,\mathrm{Im}}) = f_{r_{\mathrm{Re}}}(z_{\mathrm{Re}} \mid s_{i\,\mathrm{Re}}) f_{r_{\mathrm{Im}}}(z_{\mathrm{Im}} \mid s_{i\,\mathrm{Im}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_{\mathrm{Re}} - s_{i\,\mathrm{Re}})^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_{\mathrm{Im}} - s_{i\,\mathrm{Im}})^2}{2\sigma^2}}$$

$$i = 1, 2, \cdots, M$$

Στη συνέχεια:
υπολογίζονται οι τιμές $f_r(r|s=s_1)$, $f_r(r|s=s_2)$ ...και $f_r(r|s=s_M)$.
και η απόφαση λαμβάνεται ως ακολούθως:

$$\text{Αν} \quad f_r\left(r \mid s_i\right) > f_r\left(r \mid s_j\right), \forall j \in \{1, 2, \cdots, M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΓΙΑ ΑΣΤΕΡΙΣΜΟ ΜΕ Μ ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ML κριτήριο καταλήγει

$$\text{Αν} \quad \ln\left(f_r\left(r \mid s_i\right)\right) > \ln\left(f_r\left(r \mid s_j\right)\right), \forall j \in \{1, 2, \cdots, M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

$$\text{Αν} \quad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\left(r_{\mathrm{Re}} - s_{i\mathrm{Re}}\right)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\left(r_{\mathrm{Im}} - s_{i\mathrm{Im}}\right)^2}{2\sigma^2}} \right) > \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\left(r_{\mathrm{Re}} - s_{j\mathrm{Re}}\right)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\left(r_{\mathrm{Im}} - s_{j\mathrm{Im}}\right)^2}{2\sigma^2}} \right),$$

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

$$\text{Αν} \quad \left(r_{\mathrm{Re}} - s_{i\mathrm{Re}}\right)^2 + \left(r_{\mathrm{Im}} - s_{i\mathrm{Im}}\right)^2 < \left(r_{\mathrm{Re}} - s_{j\mathrm{Re}}\right)^2 + \left(r_{\mathrm{Im}} - s_{j\mathrm{Im}}\right)^2$$

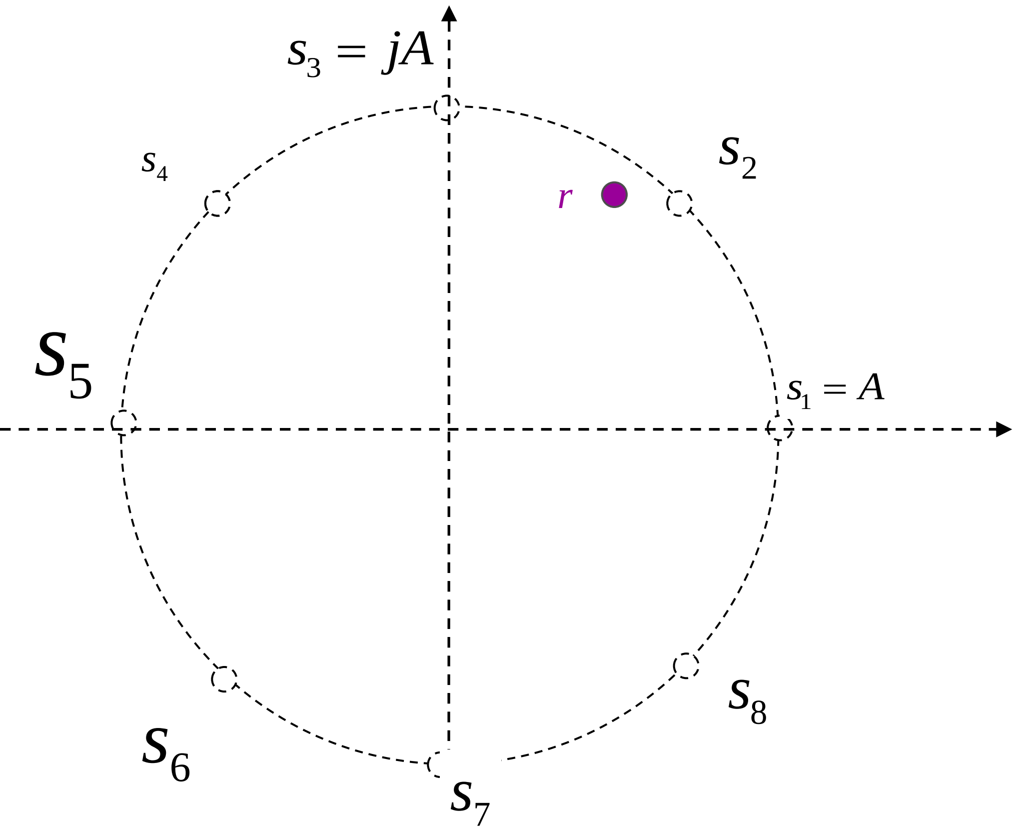
$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΤΟ
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΚΑΤΑΛΗΓΕΙ ΣΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ

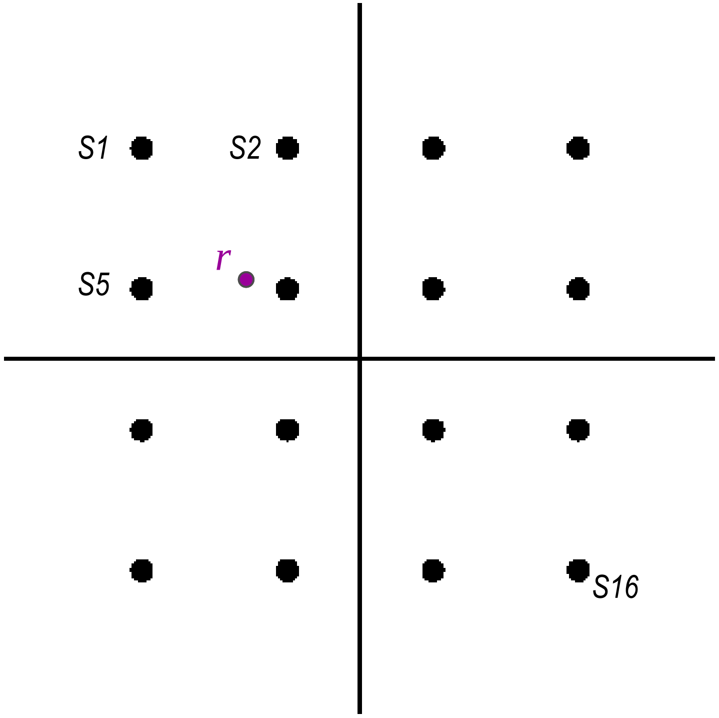
$$\text{Αν} \quad \left\| r - s_i \right\|^2 < \left\| r - s_j \right\|^2 \ \forall j \in \{1, 2, \cdots, M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML
ΓΙΑ ΑΣΤΕΡΙΣΜΟ ΜΕ Μ ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$$\text{Αν} \quad \left\| r - s_i \right\|^2 < \left\| r - s_j \right\|^2 \ \forall j \in \{1, 2, \cdots, M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

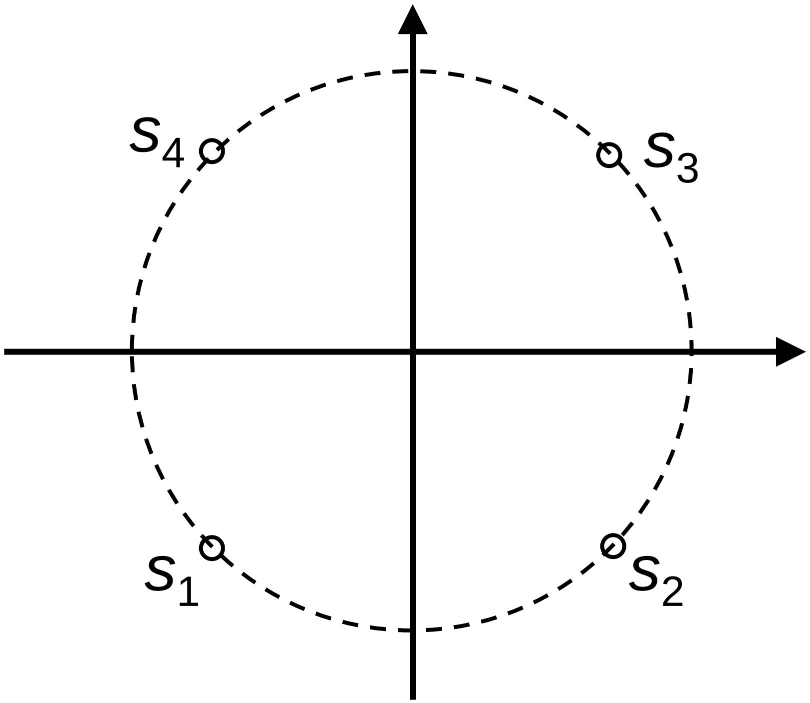


Αποτέλεσμα Φώρασης: $s=s_2$



Αποτέλεσμα Φώρασης: $s=s_6$

ΑΣΚΗΣΗ



Για τον αστερισμό του σχήματος προσπαθήστε να υλοποιήσετε το βέλτιστο φωρατή με τη βοήθεια ενός μονοδιάστατου φωρατή.

ΛΥΣΗ

Αν $r=\|r\|[\cos(\theta_r)+j\sin(\theta_r)]=\|r\|\exp(j\theta_r)$ είναι η τρέχουσα μιγαδική λήψη στον δέκτη, και αν συμβολίσουμε με $s_i=A[\cos(\theta_{si})+\text{j}\sin(\theta_{si})]=A\exp(j\theta_{si})$ i=1,2,…,4 τα μιγαδικά σύμβολα του αστερισμού, τότε ισχύει:

$$d_i^2=\|r-s_i\|^2=(r-s_i)(r-s_i)^*=\|r\|^2+A^2-rs_i^*-r^*s_i=$$

$$\|r\|^2+A^2-2\,\mathrm{Re}\left[rs_i^*\right]=\|r\|^2+A^2-2A\,\|r\|\,\mathrm{Re}\left(e^{j(\theta_r-\theta_{si})}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad d_i^2=\|r\|^2+A^2-2A\,\|r\|\cos(\theta_r-\theta_{si}),\, i=1,2,\ldots,M$$

$$d_i^2 = \|r\|^2 + A^2 - 2A\|r\|\cos(\theta_r - \theta_{si}), i = 1,2,\ldots,4$$
$$\Leftrightarrow d_i^2 = \|r\|^2 + A^2 - 2A\|r\|\cos(\phi_i), i = 1,2,\ldots,4$$

όπου $\varphi_i = |\vartheta_r - \vartheta_{si}|$ i=1,2,…,4.

Έτσι το κριτήριο ελάχιστης απόκλισης καταλήγει:

$$\text{Αν} \quad \cos(\phi_i) > \cos(\phi_j) \forall j \in \{1,2,\cdots,4\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

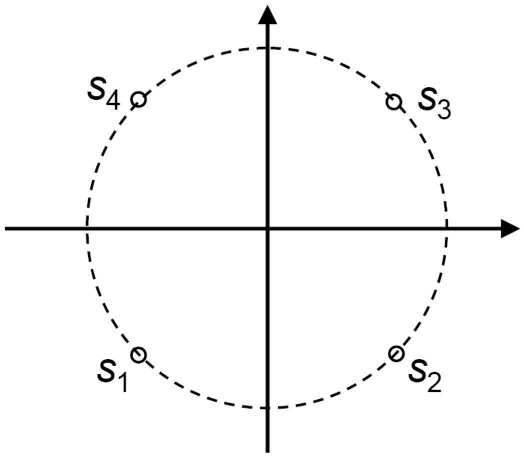
και επειδή η συνάρτηση cos(x) είναι φθίνουσα στο διάστημα [0,π], το κριτήριο καταλήγει

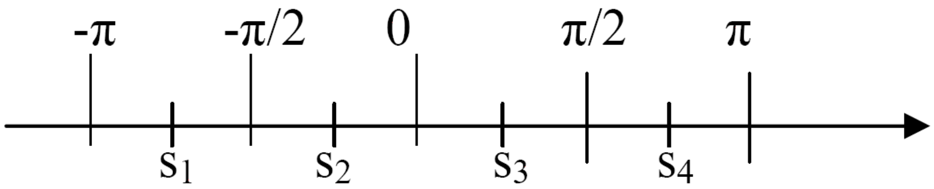
$$\text{Αν} \quad \phi_i < \phi_j \forall j \in \{1,2,\cdots,M\}, j \neq i \Rightarrow \quad s = s_i$$

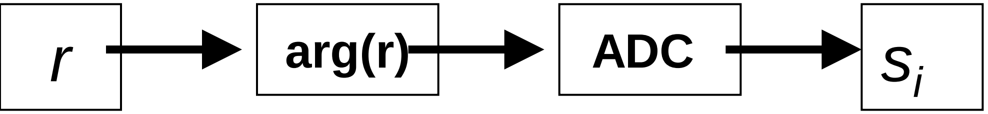
Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα μας οδηγεί στην περίπτωση του PSK να χρησιμοποιούμε το μονοδιάστατο μέγεθος $\varphi_i = |\vartheta_r - \vartheta_{si}|$ αντί της απόστασης $d_i = \|r - s_i\|$ για τη φώραση.

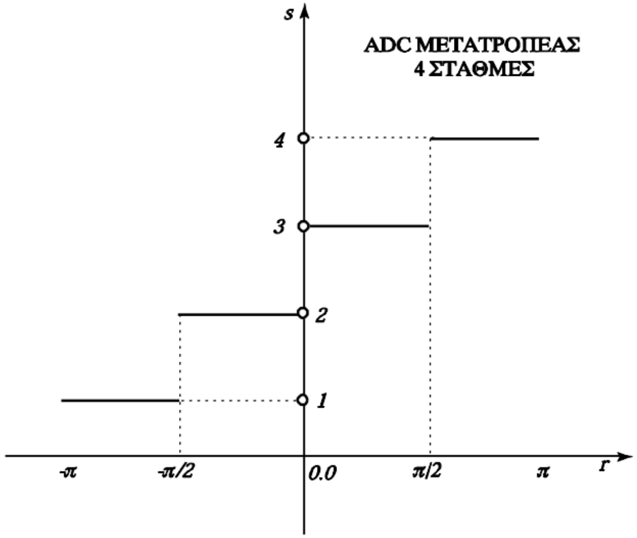
ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση, ο βέλτιστος φωρατής μπορεί να υλοποιηθεί με βάση τα ορίσματα των μιγαδικών s_i και του r:

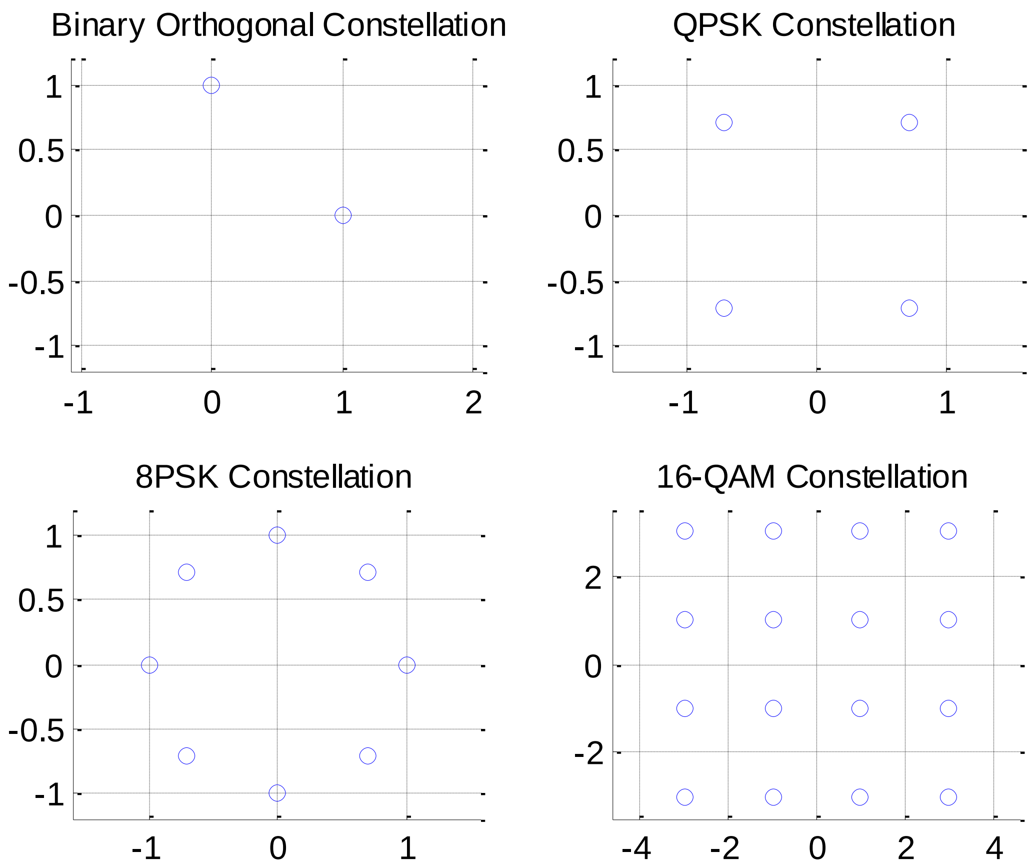




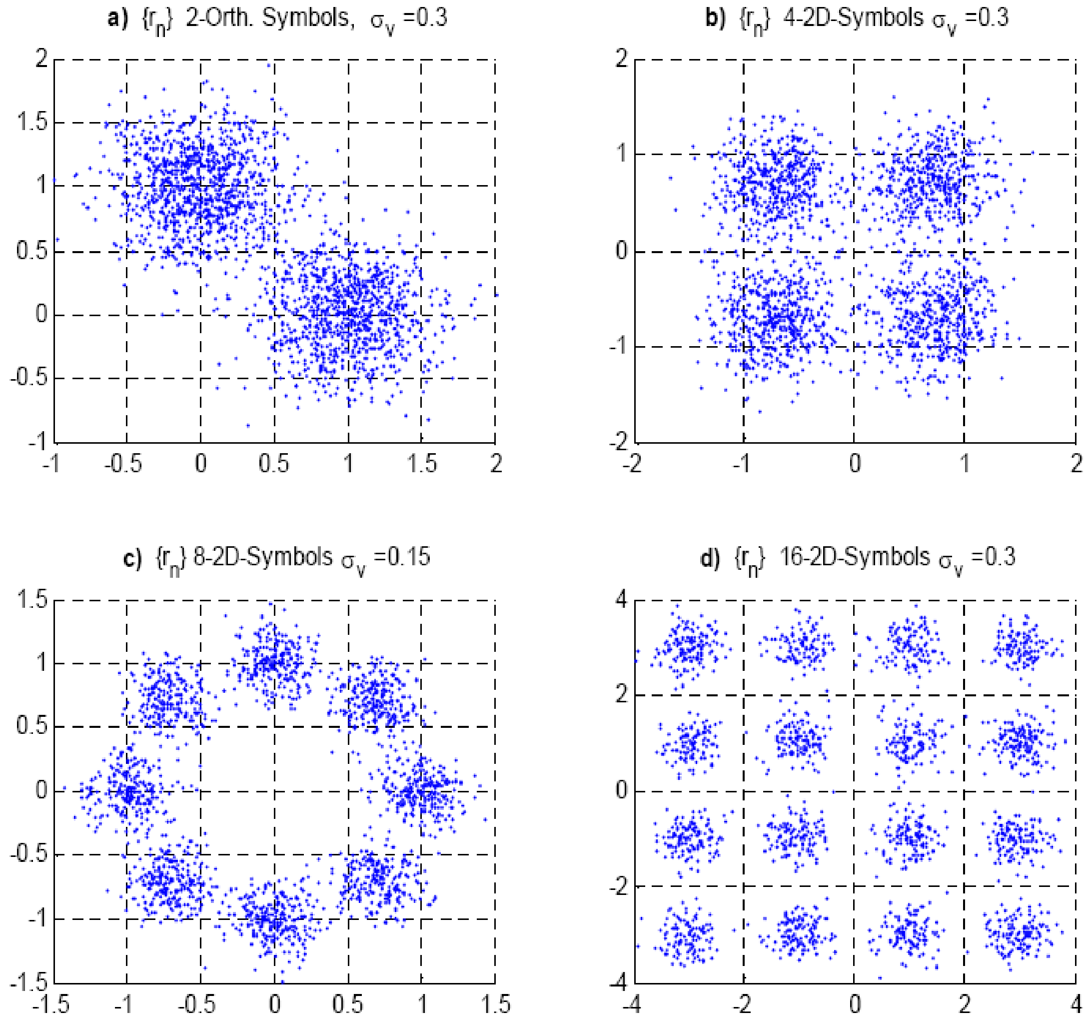




ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ ΔΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΛΗΨΗΣ ΔΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΦΟΡΑΣΗΣ ΣΤΙΣ Ν ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Για τη σχέση διανυσμάτων:

r=**s**+**v** όπου **s** μια τυχαία διακριτή διανυσματική μεταβλητή με *M* δυνατές τιμές, τα διανύσματα $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$,…,$\mathbf{s}_M$ κάθε ένα με Ν συνιστώσες:

$$\mathbf{s}_i = \left(s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_N}\right)^T$$

και με ιστόγραμμα εμφάνισης:

$$P(\mathbf{s}=\mathbf{s}_1) = P(\mathbf{s}=\mathbf{s}_2) = \cdots = P(\mathbf{s}=\mathbf{s}_M) = 1/M$$

και v τυχαία μεταβλητή, της οποίας η τιμή είναι διάνυσμα με *N* συνιστώσες όλες στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και με την ίδια κατανομή (*Independent and Identically Distributed –i.i.d.*). Gaussian με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση *σ*.

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots v_N)^T$$

$$f_{v_i}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, i = 1, 2, \ldots, N$$

Για δεδομένη τιμή του r, $\mathbf{r} = \left(r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_N}\right)^T$

να υπολογιστεί η τιμή του s με τρόπο ώστε η πιθανότητα σφάλματος, P_e να είναι ελάχιστη.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζονται οι υποσυνθήκη PDF:

$$f_{\mathbf{r}}(z \mid \mathbf{s}_i) = f_{\mathbf{r}}\left(\left(z_1, z_2, \ldots, z_N\right)^T \mid \left(s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_N}\right)\right) =$$

$$f_{r_1}(z_1 \mid s_{i_1}) f_{r_2}(z_2 \mid s_{i_2}) \cdots f_{r_N}(z_N \mid s_{i_N}), i = 1, 2, \cdots, M$$

Στη συνέχεια:
υπολογίζονται οι τιμές $f_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}/s=s_1)$, $f_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}/s=s_2)$, ..., $f_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}/\mathrm{s}=\mathrm{s}_M)$.
και η απόφαση λαμβάνεται ως ακολούθως:

$$\text{Αν} \quad f_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}_i\right) > f_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}_j\right), \forall j \in \{1, 2, \cdots, M\}, j \neq i \Rightarrow \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_i$$

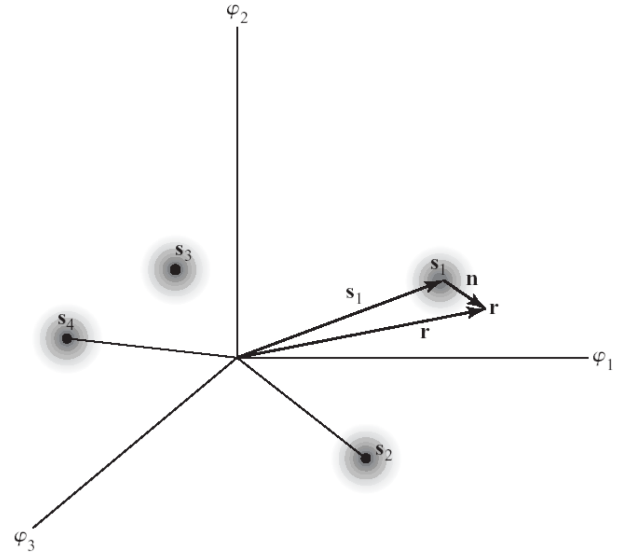
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΓΙΑ ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕ Μ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ML ΓΙΑ ΤΙΣ N ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Αν $f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i) > f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_j)$ για κάθε j=1,2,…,*M* με *i* διάφορο του *j* ➔ $\mathbf{s} = \mathbf{s}_i$

Στην περίπτωση αυτή με τον Gaussian θόρυβο, αποδεικνύεται ότι το κριτήριο ML είναι ισοδύναμο με τον **κανόνα της ελάχιστης απόστασης**:

Αν $D(\mathbf{r},\mathbf{s}_\mathrm{i}) < D(\mathbf{r},\mathbf{s}_\mathrm{j})$ για όλα τα j=1,2,…,*M* με *i* διάφορο του *j* ➔ $\mathbf{s} = \mathbf{s}_i$

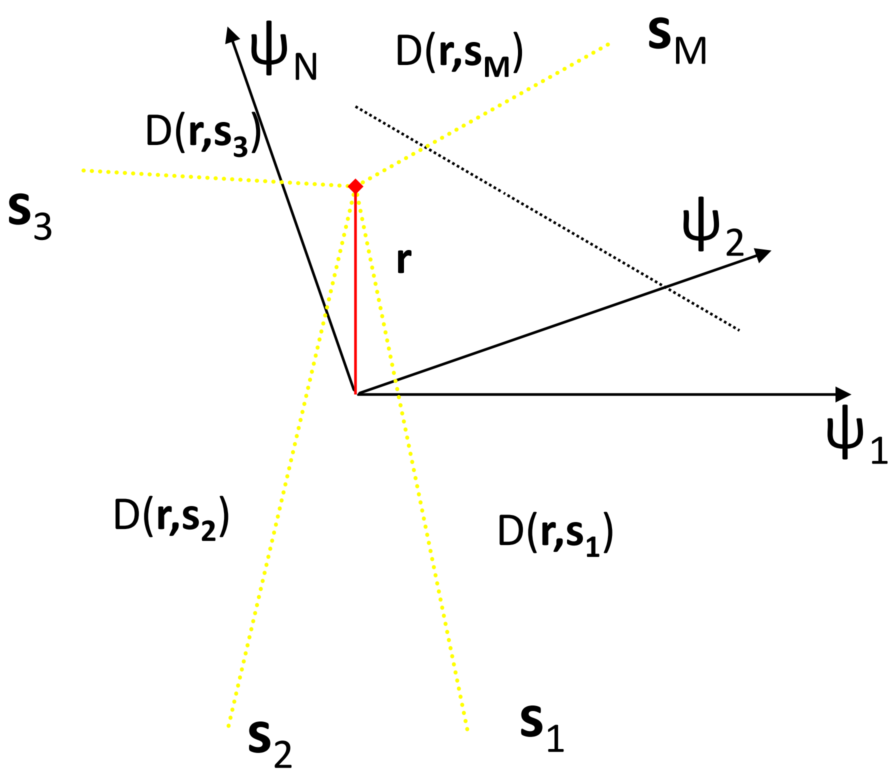


$$\mathrm{D}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\mathrm{i}) = \sum_{k=1}^{N} (r_k - s_{ik})^2$$

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΦΩΡΑΤΗΣ

$\mathbf{r}=\mathbf{s}+\mathbf{v}$ όπου $\mathbf{r} = (r_1, r_2,\ldots,r_N)$, $\mathbf{s_x} = (s_{x1}, s_{x2},\ldots,s_{xN})$ και

$\mathbf{n} = (n_1, n_2,\ldots,n_N)$. $P(\mathbf{s_1}) = P(\mathbf{s_2}) = \ldots = P(\mathbf{s_M})=1/M$



Με βάση το κριτήριο ML:

Αν $D(\mathbf{r},\mathbf{s_i})$ η μικρότερη από τις M αποστάσεις δεχόμαστε ότι ισχύει $\mathbf{s}_m=\mathbf{s_i}$

Απόδειξη

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_i \Leftrightarrow f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i) > f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_j)$ Για κάθε j=1,2,…,M και j διάφορο του i

ισοδύναμα

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_i \Leftrightarrow \ln(f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i)) > \ln(f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_j))$ Για κάθε j=1,2,…,M και j διάφορο του i

Ισχύει όμως

$$f(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}_i) = \prod_{k=1}^{N} f(r_k\,|\,s_{ik}), \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

$$\ln\left(f(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}_i)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{N} f(r_k|s_{ik})\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(f(r_k|s_{ik})\right), \quad i = 1,2,\ldots,M$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2\sigma^2}\right)\right), \quad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{M}$$

$$= N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right) + \sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2\sigma^2}\right), \quad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{M}$$

$$= N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(r_k - s_{ik})^2, \quad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{M}$$

Δηλαδή

$$\ln\left(f\left(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}_i\right)\right) = N\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}\left(r_k - s_{ik}\right)^2, \quad \mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{M}$$

ή

$$\ln\left(f\left(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}_i\right)\right) = N\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}D\left(\mathbf{r},\mathbf{s}_i\right), \quad \mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{M}$$

Επομένως

$$\sigma^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{5}\left[\left(\mathrm{Re}\left(v_i\right)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left(v_i\right)\right)^2\right]$$

$$\ln\left(f\left(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}_i\right)\right) > \ln\left(f\left(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}_j\right)\right) \Leftrightarrow D\left(\mathbf{r},\mathbf{s}_i\right) < D\left(\mathbf{r},\mathbf{s}_j\right)$$

Και το κριτήριο ML καταλήγει

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_\mathrm{i} \Leftrightarrow D(\mathbf{r}\text{-}\mathbf{s}_i) < D(\mathbf{r}\text{-}\mathbf{s}_j)$ Για κάθε $j=1,2,\ldots,M$ και j διάφορο του i

που αποτελεί το Κριτήριο Ελάχιστης Απόστασης

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι σε ένα QAM ισχύει:

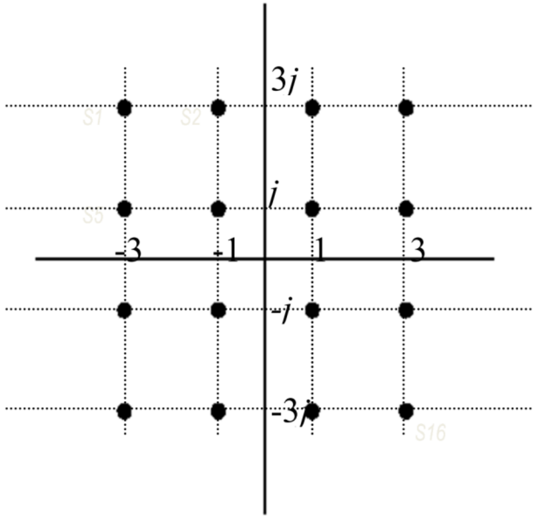
Αν τα σύμβολα του QAM είναι οι μιγαδικοί $s_1, s_2, \ldots, s_M$ και ο μιγαδικός r είναι η λήψη του συστήματος, τότε ισχύει:

$$\left\| r - s_i \right\|^2 < \left\| r - s_j \right\|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\mathrm{Re}(r) - \mathrm{Re}(s_i)\right) < \left(\mathrm{Re}(r) - \mathrm{Re}(s_j)\right) \\ \text{και} \quad \left(\mathrm{Im}(r) - \mathrm{Im}(s_i)\right) < \left(\mathrm{Im}(r) - \mathrm{Im}(s_j)\right) \end{cases}$$

Η πιο πάνω διαπίστωση οδηγεί στην περίπτωση του QAM να λυθεί το πρόβλημα της φώρασης χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του μονοδιάστατου PAM χωριστά για τις οριζόντιες και χωριστά για τις κατακόρυφες συνιστώσες , μετατρέποντας το πρόβλημα σε μονοδιάστατο με λύσης AD (Αναλογοψηφιακό) μετατροπέα.

Προσέξτε ότι η πιο πάνω διαπίστωση ισχύει για το QPSK, αλλά όχι για όλα τα δισδιάστατα συστήματα.

Παράδειγμα



Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί τον Αστερισμό του παραπλεύρως Σχήματος. Στο Φωρατή φθάνει η ακολουθία $\{r_n\}$: $r_1 = 3.05+i1.15$, $r_2 = -2.92-i3.09$, $r_3 = -3.09+i2.98$, $r_4 = -2.90+i1.05$, $r_5 = -1.06-i2.93$.

Α) Να καταγράψετε τη μιγαδική τιμή όλων των συμβόλων του αστερισμού.

Β) Να υπολογίσετε την πιο πιθανή ακολουθία συμβόλων $\{s_n\}$ που έχει φθάσει στον φωρατή και την αντίστοιχη ακολουθία θορύβου $\{v_n\}$.

Γ) Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την διακύμανση σ_v^2 της ακολουθίας $\{v_n\}$.

Απάντηση

Α)

A={-3-i3, -3-i, -3+i, -3+i3, -1-i3, -1-i, -1+i, -1+i3, 1-i3, 1-i, 1+i, 1+i3 , 3-i3, 3-i, 3+i, 3+i3}

Β)Σύμφωνα με το κριτήριο ελάχιστης απόστασης και την παρατήρηση 1 εκτιμούμε την πιο πιθανή τιμή του s_i και την καταγράφουμε στον πίνακα (γραμμή 2). Ισχύει ότι $v_i=r_i-s_i$ και έτσι υπολογίζεται Η Τρίτη γραμμή του Πίνακα.

r	$3.05+i1.15$	$-2.92-i3.09$	$-3.09+i2.98$	$-2.90+i1.05$	$-1.06-i2.93$
s	$3+i$	$-3-3\,i$	$-3+3i$	$-3+i$	$-1-3i$
$v=r-s$	$0.05+i0.15$	$0.08-i0.09$	$-0.09-i0.02$	$0.10+i0.05$	$-0.06+i0.07$

Γ)Θυμηθείτε ότι τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος του θορύβου ακολουθούν Gaussian κατανομή, έχουν μηδενική μέση τιμή, την ίδια διακύμανση σ^2 και είναι στατιστικά ανεξάρτητα. Επομένως η διακύμανση μπορεί να εκτιμηθεί από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{1}{10}\sum_{\iota=1}^{5}\left(\left(\mathrm{Re}\left(v_i\right)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left(v_i\right)\right)^2\right)$$

Και αντικαθιστώντας βρίσκουμε σ^2=0.0069

<u>Παράδειγμα</u>

Υπολογίστε την πιθανότητα σφάλματος ενός M-QAM συναρτήσει της Πιθανότητας σφάλματος ενός k-PAM (μονοδιάστατο σύστημα με k σύμβολα) με $k^2=M$

Απάντηση

Σύμφωνα με την παρατήρηση 1, θα συμβεί σφάλμα στη φώραση, αν συμβεί αντίστοιχα στην πρώτη ή στη δεύτερη διάσταση.

$$P_{eM-QAM} = P\left(οριζόντιο \quad ή \quad κατακόρυφο\right) =$$

$$P\left(οριζόντιο\right) + P\left(κατακόρυφο\right) = P\left(οριζόντιο \quad και \quad κατακόρυφο\right) =$$

$$\frac{2\left(k-1\right)}{k} Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{2\left(k-1\right)}{k} Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) - \left(\frac{2\left(k-1\right)}{k} Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)^2$$

Για μεγάλες τιμές του Α/σ απλοποιείται:

$$P_{eM-QAM} = 2\frac{2(k-1)}{k}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Παράδειγμα

2. Αποδείξτε ότι σε ένα ορθογώνιο σύστημα με M σύμβολα στο οποίο έχει ληφθεί το διάνυσμα $\mathbf{r}=(r_1, r_2, \ldots, r_M)^T$, το κτιτήριο ελάχιστης απόστασης απλοποιείται στον προσδιορισμό της μέγιστη συνιστώσας του $\mathbf{r}$, δηλαδή:

$$\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 < \left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_j\right\|^2 \Leftrightarrow r_i > r_j$$

Απάντηση

Αν τα σύμβολα του ορθογώνιου συστήματος είναι:

$$\mathbf{s}_1 = (A, 0, \ldots, 0)^T$$

$$\mathbf{s}_2 = (0, A, \ldots, 0)^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{s}_2 = (0, 0, \ldots, A)^T$$

τότε $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 < \left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_j\right\|^2 \Leftrightarrow \left(r_1^2 + \ldots + (r_i - A)^2 + \ldots + r_M^2\right) < \left(r_1^2 + \ldots + (r_j - A)^2 + \ldots + r_M^2\right)$

$$\Leftrightarrow (r_i - A)^2 + r_j^2 < (r_j - A)^2 + r_i^2 \Leftrightarrow -2Ar_i < -2Ar_j \Leftrightarrow r_i > r_j$$

Παράδειγμα

Δίνεται ένα σύστημα διαβίβασης διακριτών δεδομένων με ισοπίθανα σύμβολα, τα:
{ $\mathbf{s}_1=(1,0,0,0)^T$, $\mathbf{s}_2= (0,1,0,0)^T$, $\mathbf{s}_3= (0,0,1,0)^T$,$\mathbf{s}_4= (0,0,0,1)^T$}.
Στο φωρατή του συστήματος το διαβιβαζόμενο σύμβολο συνοδεύεται από προσθετικό θόρυβο, το διάνυσμα **v,** με συνιστώσες iid τυχαίες μεταβλητές, με Gaussian κατανομή. Επίσης κάθε συνιστώσα έχει μέση τιμή μηδέν και την ίδια διακύμανση σ_v^2. Επομένως για ένα άγνωστο σύμβολο **s** που αποστέλλει ο πομπός ο φωρατής λαμβάνει το διάνυσμα $\mathbf{r}=\mathbf{s}+\mathbf{v}=(r_1,r_2, r_3,r_4)^T$.

Η λήψη 4 διαδοχικών διανυσμάτων στην είσοδο του φωρατή είναι $\{\mathbf{r}_n\}$:
$(0.9 ,-0.1,0.1,0.2)^T$,$(0.2 ,-0.1,1.1,0.2)^T$,$(-0.2 ,0.8,0.1,0.2)$,
$(0.9 ,-0.1,0.1,0.2)^T$,$(0.7 ,-0.1,0.1,0.2)^T$

Α) Να υπολογίσετε την αντίστοιχη πιο πιθανή ακολουθία συμβόλων $\{\mathbf{s}_n\}$ και την αντίστοιχη ακολουθία διανυσμάτων του θορύβου.

Β) Να υπολογίσετε την κοινή διακύμανση σ_v^2 των συνιστωσών του θορύβου.

Απάντηση

A)

$\{\mathbf{r}_n{}^T\}$	(.9 ,-.1,.1,.2)	(.2 ,-.1,1.1,.2)	(-.2 ,.8,.1,.2)	(.9 ,-.1,.1,.2)	(.7 ,-.1,.1,.2)
$\{\mathbf{s}_n{}^T\}$	(1,0,0,0)	(0,0,1,0)	(0,1,0,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)
$\{\mathbf{v}_n{}^T\}$	(-.1,-.1,.1,.2)	(.2,-.1,.1,.2)	(-.2,-.2,.1,.2)	(-.1 ,-.1,.1,.2)	(-.3 ,-.1,.1,.2)

B)

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{5\times 4}\sum_{i=1}^{5}\left(v_{i1}^2 + v_{i2}^2 + v_{i3}^2 + v_{i4}^2\right) = 0.026$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος ενός ON OFF συστήματος (συμβολα τα 0 και A) και ενός δυαδικού ορθογώνιου συστήματος (σύμβολα (A και jA).

Απάντηση:

Για ON OFF, χρησιμοποιούμε τον γενικό τύπο υπολογισμού της πιθανότητας σφάλματος για το δυαδικό PAM με σύμβολα s_1 και s_2

$$P_e = Q\left(\frac{\left|s_2 - s_1\right|}{2\sigma}\right)$$

Θέτοντας $s_1=0$ και $s_2=A$ υπολογίζουμε:

$$P_e = Q\left(\frac{\mathrm{A}}{2\sigma}\right)$$

Για το ορθογώνιο δυαδικό σύστημα που είναι σύστημα 2 διαστάσεων δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του μονοδιάστατου PAM. Έτσι ξεκινάμε τον υπολογισμό εξ αρχής.

$$P_e = P\left(Y = A \,\&\, X = jA\right) + P\left(Y = jA \,\&\, X = A\right)$$

$$P_e = P\left(Y = A \mid X = jA\right)P\left(X = jA\right) + P\left(Y = jA \mid X = A\right)P\left(X = A\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left[P\left(Y = A \mid X = jA\right) + P\left(Y = jA \mid X = A\right)\right]$$

Υπολογισμός της $P\left(Y = A \mid X = jA\right)$

Αφού X=jA ο λαμβανόμενος μιγαδικός αριθμός $r=jA+v$ με $v=v_1+jv_2$

Αφού αποφασίστηκε Y=A➔ βρέθηκε Re(r)>Im(r)➔$v_1>A+v_2$➔

Ισχύει λοιπόν:

$$P(Y = A \mid X = jA) = P(v_1 > A + v_2) \Leftrightarrow$$

$$P(Y = A \mid X = jA) = P(v_1 - v_2 > A)$$

Η μεταβλητή $v_1 - v_2$ είναι Gaussian με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση:

$$\sigma_{tot}^2 = 2\sigma^2$$

Επομένως:

$$P(Y = A \mid X = jA) = P(v_1 - v_2 > A) = Q\left(\frac{A}{\sigma_{tot}}\right) = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$P(Y = jA \mid X = A) = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Και επομένως:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}A}{2\sigma}\right)$$

Αξίζει να υπολογίσουμε τους πιο πάνω τύπους συναρτήσει της μέσης ενέργειας ανά διαβιβαζόμενο Bit E_b. Ισχύει:

Για ON-OFF σύστημα

$$E_b = \frac{0 + A^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{2E_b}$$

Οπότε

$$P_{eON-OFF} = Q\left(\frac{\sqrt{2E_b}}{2\sigma}\right)$$

Για δυαδικό ορθογώνιο σύστημα

$$E_b = \frac{A^2 + A^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{E_b}$$

Οπότε

$$P_{e2-rect} = Q\left(\frac{\sqrt{2E_b}}{2\sigma}\right)$$

Τέλος Ενότητας

ΦΩΡΑΣΗ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Σαγκριώτης Εμμανουήλ. «Εισαγωγή στα Συστήματα Επικοινωνιών. Ενότητα 2: Φώραση». Έκδοση: 1.01 Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI11/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.