

Μαθηματικά για την Πληροφορική και τις Τηλεπικοινωνίες

Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση

Ι. Γ. ΣΤΡΑΤΗΣ

2005

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	5
1 Οι Μιγαδικοί Αριθμοί	6
1.1 Το Σώμα των Μιγαδικών Αριθμών	6
1.2 Το Μιγαδικό Επίπεδο	8
1.3 Πολικές Συντεταγμένες - Τύποι De Moivre και Euler	12
1.3.1 Παραδείγματα - Ασκήσεις	13
2 Ακολουθίες και Σειρές Μιγαδικών Αριθμών	17
2.1 Ασκήσεις	18
2.2 Σειρές	19
2.2.1 Παραδείγματα - Ασκήσεις	20
3 Συναρτήσεις Μιγαδικών Αριθμών	21
3.1 Κατάταξη Συνόλων στο Μιγαδικό Επίπεδο	21
3.2 Συνεχείς Συναρτήσεις	22
3.2.1 Στερεογραφική Προβολή	23
3.3 Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z	24
3.3.1 Αναλυτικά Πολύνομα	24
3.3.2 Δυναμοσειρές	25
3.3.3 Αναλυτικές Συναρτήσεις	27
3.4 Οι Στοιχειώδεις Συναρτήσεις	33
3.4.1 Η Εκθετική Συναρτηση	33
3.4.2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις	34
3.4.3 Η Λογαριθμική Συναρτηση	35
3.4.4 Οι συναρτήσεις z^λ , λ^z , $\lambda \in \mathbb{C}$	37
3.4.5 Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις	37
4 Ολοκλήρωση	41
4.1 Ορισμένο ολοκλήρωμα	41
4.2 Καμπύλες	42
4.3 Ολοκλήρωμα μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής	43
4.4 Το θεώρημα Cauchy-Goursat	45

4.4.1	Διασθητική-Φυσική απόδειξη	45
4.4.2	Το θεώρημα Cauchy	47
4.4.3	Το θεώρημα Cauchy-Goursat	47
4.5	Απλά και Πολλαπλά Συνεκτικά Σύνολα	48
4.6	Το Αόριστο Ολοκλήρωμα	50
4.7	Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy	51
4.8	Το θεώρημα του Green	52
4.9	Ασκήσεις	52
5	Άλλες ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων	54
6	Αναλυτική Συνέχιση	56
7	Μεμονωμένες Ανωμαλίες Αναλυτικών Συναρτήσεων	61
7.1	1. Κατάταξη Μεμονωμένων Ανωμαλιών – Αρχή του Riemann – Θεώρημα Casorati – Weierstrass	61
7.1.1	Ανάπτυγμα Laurent	63
8	Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα	65
8.1	Δείκτης Στροφής και το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων του Cauchy	65
8.1.1	Εφαρμογές του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων	67
8.2	Εφαρμογές του θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων του Cauchy στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και σειρών	68
8.2.1	Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων	68
8.2.2	Υπολογισμός Ορίων Σειρών	77
9	Σύμμορφη Απεικόνιση	81
9.1	Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann	83
9.2	Εφαρμογές της Σύμμορφης Απεικόνισης	92
9.2.1	Προβλήματα Dirichlet και Neumann	92
9.2.2	Επίλυση προβλημάτων Dirichlet και Neumann με σύμμορφη απεικόνιση.	93
10	Εφαρμογές	96
10.1	Ηλεκτρικά κυκλώματα - Ημιτονοειδή Ρεύματα	96
10.1.1	Γραφική Αναπαράσταση Ημιτονοειδών Συναρτήσεων	96
10.1.2	Μιγαδική Αναπαράσταση	97
10.1.3	Κυκλώματα RLC	99
10.1.4	Οι κανόνες του Kirchhoff	100
10.1.5	Μιγαδικές Εμπεδήσεις σε Σειριακή ή Παράλληλη Σύνδεση	102
10.1.6	Γενίκευση της έννοιας της μιγαδικής εμπέδησης	104
10.1.7	Μιγαδικό Διάνυσμα	106
10.2	Εφαρμογές στο Στατικό Ηλεκτρισμό	107
10.2.1	Ο νόμος του Coulomb	107
10.2.2	Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου. Ηλεκτροστατικό Δυναμικό	107

10.2.3 Το θεώρημα του Gauss	108
10.2.4 Το μιγαδικό ηλεκτροστατικό δυναμικό	108
10.2.5 Γραμμικά φορτία	109
10.2.6 Αγωγοί	109
10.2.7 Χωρητικότητα	109
10.2.8 Ασκήσεις	109
Βιβλιογραφία	115

Εισαγωγή

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν βοήθημα μελέτης των φοιτητών του τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, για το μάθημα “Μαθηματικά για την πληροφορική και τις τηλεπικοινωνίες”. Περιέχουν και ενότητες που ο χρόνος δεν επιτρέπει να διδαχθούν στο μάθημα, αλλά εμφανίζονται εδώ για την καλύτερη επαφή των φοιτητών με το αντικείμενο του μαθήματος. Ιδιαίτερα σημαντικές εφαρμογές της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων όπως ο ασυμπτωτικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων και τα προβλήματα Riemann - Hilbert, δεν περιέχονται στις σημειώσεις αυτές. Όλα τα αποτελέσματα παρατιθενται χωρίς απόδειξη, εφ’όσον (λόγω της φιλοσοφίας του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών για το συγκεκριμένο μάθημα) ο στόχος των παραδόσεων είναι η χρηστικότητα των μαθηματικών εννοιών και εργαλείων, και ο χρόνος που διατίθεται είναι σαφώς περιορισμένος. Οι αποδείξεις, καθώς και πληρέστερη ανάπτυξη του θέματος, μπορούν να βρεθούν στα συγγράμματα της βιβλιογραφίας. Ευχαριστώ τους φίλους και συναδέλφους καθηγητές Σ. Θεοδωρίδη, Η. Κουτσουπιά, Θ. Σφηκόπουλο (Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών) και Ν. Αλικάκο, Σ. Μερκουράκη, Σ. Τερσένοβ, Τ. Χατζηαφράτη (Τμήμα Μαθηματικών) για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχαμε κατά τη διάρκεια της συγγραφής αυτών των σημειώσεων και τις παρατηρήσεις τους. Επίσης, ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών κ. Π. Μπουμπούλη και τη μεταπτυχιακή φοιτήτρια του ίδιου τμήματος κα. Μ. Κοτέ για τη δακτυλογράφηση αυτών των σημειώσεων.

Ι.Γ. Στρατής
Χειμώνας 2005

Κεφάλαιο 1

Οι Μιγαδικοί Αριθμοί

Ήδη από τον 16^ο αιώνα εμφανίζονται αριθμοί της μορφή $a + b\sqrt{-1}$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ο Cardan τους χρησιμοποίησε για τη λύση εξισώσεων 2^{ου} και 3^{ου} βαθμού. Το 18^ο αιώνα ο Euler έκανε χρήση των μιγαδικών αριθμών για τη λύση διαφορικών εξισώσεων.

Οι μιγαδικοί αριθμοί είχαν «φτωχή φήμη» ως το 1830, έτυχαν όμως ευρύτερης αποδοχής κυρίως χάρη στη γεωμετρική τους αναπαράσταση και στον Gauss. Ο πρώτος πλήρης και αυστηρός ορισμός οφείλεται στον (σύγχρονο του Gauss) Hamilton.

Σχέση των μιγαδικών με τη Φυσική: Μηχανική των Ρευστών, Ηλεκτρομαγνητισμός, Θερμότητα, κλπ.

1.1 Το Σώμα των Μιγαδικών Αριθμών

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών (a, b) με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό που ορίζονται ως εξής:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Ιδιότητες

Έστω $z_k = (a_k, b_k)$ τυχόντες μιγαδικοί αριθμοί. Τότε

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης*
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ *προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης*
- $(0, 0)$ *ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης*

αντίθετος του $z = (a, b)$, είναι ο $-z = (-a, -b)$

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$. Τότε

- $\lambda(\mu z) = (\lambda\mu)z$
- $(\lambda + \mu)z = (\lambda z + \mu z)$
- $\lambda(z + w) = \lambda z + \lambda w$
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$ αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού
- $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$ προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ επιμεριστικότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση
- $(1, 0)$ ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού

αντίστροφος του $z = (a, b) \neq (0, 0)$, είναι ο $\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$

Συνεπώς το \mathbb{C} είναι ένα σώμα (αντιμεταθετικός δακτύλιος με αντίστροφο πολλαπλασιασμού.)

Μια ιδιότητα του \mathbb{R} που δεν μεταφέρεται στο \mathbb{C} είναι εκείνη της διάταξης. Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι το $i = (0, 1)$ δεν μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε ως αρνητικό ή θετικό, χωρίς να υποπέσουμε σε αντίφαση.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $(a, 0)$ με τους πραγματικούς αριθμούς a . Φαίνεται αμέσως ότι αυτή η αντιστοιχία διατηρεί τις αριθμητικές πράξεις που ορίσαμε, κι έτσι δεν δημιουργείται σύγχυση αν αντικαταστήσουμε το $(a, 0)$ με το a . Μ' αυτή την έννοια λέμε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών της μορφής $(a, 0)$ είναι ισόμορφο με το \mathbb{R} . Έτσι, λέμε ότι το $(0, 1)$ είναι η τετραγωνική ρίζα του -1 , αφού $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Συμβολίζουμε με i το $(0, 1)$.

Παρατηρούμε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός γράφεται ως εξής:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$$

και αυτή την τελευταία γραφή θα χρησιμοποιούμε στο εξής.

Επιστρέφοντας στο θέμα των τετραγωνικών ριζών, υπάρχουν δύο μιγαδικές τετραγωνικές ρίζες του -1 : το i και το $-i$. Επιπλέον, υπάρχουν δύο μιγαδικές τετραγωνικές ρίζες κάθε μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού $a + bi$. Πράγματι:

$$(x + iy)^2 = (a + bi) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4ax - b^2 = 0 \\ y = \frac{b}{2x} \end{cases}$$

οπότε

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

και έτσι

$$y = \frac{b}{2x} = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \cdot \operatorname{sgn}(b), \text{ όπου } \operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} 1, & b \geq 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$$

Παραδείγματα

- i) Οι τετραγωνικές ρίζες του $2i$ είναι οι $1 + i$ και $-1 - i$
- ii) Οι τετραγωνικές ρίζες του $-5 - 12i$ είναι οι $2 - 3i$ και $-2 + 3i$

Παρατηρούμε, τέλος, ότι οποιαδήποτε δευτεροβάθμια εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές δέχεται λύση στο \mathbb{C} . Πράγματι:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Αντίθετα, όπως γνωρίζουμε, το $x^2 + 1 = 0$, π.χ., δεν έχει ρίζα στο \mathbb{R} . Δηλ. το \mathbb{C} είναι αλγεβρικός κλειστό (αφού το ανωτέρω ισχύει για κάθε πολυωνυμική εξίσωση).

1.2 Το Μιγαδικό Επίπεδο

$$(a, b) \leftrightarrow a + ib$$

άξονας των $x \leftrightarrow$ πραγματικός άξονας

άξονας των $y \leftrightarrow$ φανταστικός άξονας

Φτιάχνουμε ένα τρίγωνο με δύο πλευρές το 1 και το z_1 . Μετά φτιάχνουμε ένα όμοιο τρίγωνο, με τον ίδιο προσανατολισμό, και το z_2 να αντιστοιχεί στο 1. Τότε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο z_1 είναι το $z_1 z_2$ (σχήμα 1.2(α)).

Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιασμός επί i είναι γεωμετρικά ισοδύναμος με στροφή 90° αντίθετα με τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού (σχήμα 1.2(β)).

Τώρα, αν $z = x + iy$, έχουμε τους εξής όρους:

$\operatorname{Re} z := x$: το πραγματικό μέρος του z .

$\operatorname{Im} z := y$: το φανταστικό μέρος του z , $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

$\bar{z} := x - iy$: ο συζυγής του z .

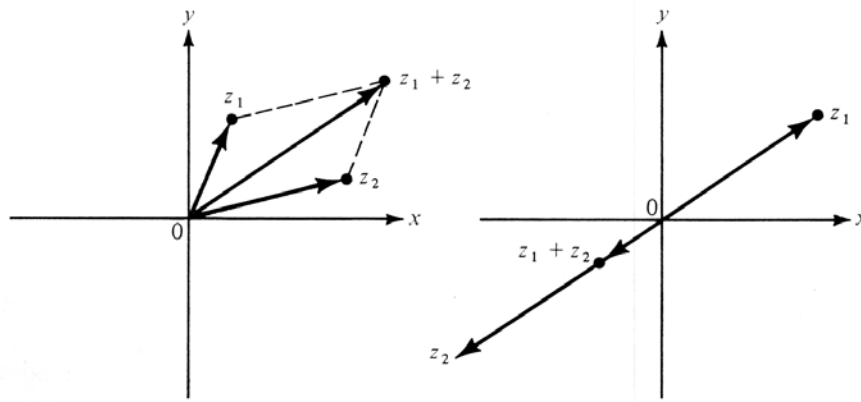
$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$: η απόλυτη τιμή, ή μέτρο, ή νόρμα του z .

$\arg z := \theta$: το όρισμα του z , οπότε

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \quad \cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

Παραδείγματα

- (i) $\operatorname{Re} z > 0$: το δεξί ημιεπίπεδο (βλέπε σχήμα 1.3).
- (ii) $\{z : z = \bar{z}\}$: η πραγματική ευθεία.



Σχήμα 1.1: Πρόσθεση.

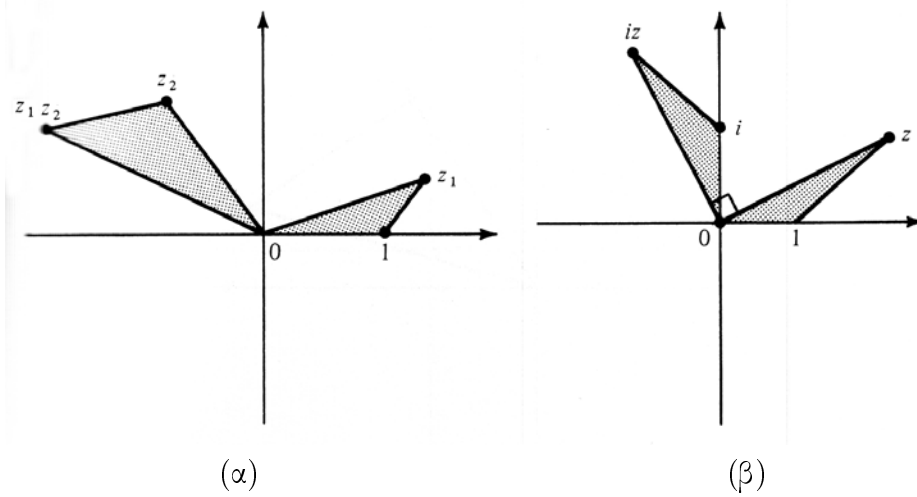
(iii) $\{z : -\theta < \arg z < \theta\}$: βλέπε σχήμα 1.4.

(iv) $\{z : |z + 1| < 1\}$: βλέπε σχήμα 1.5.

(v) $\{z : \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2}\} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$: το άνω ημιεπίπεδο.

Πρόταση 1.2.1 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, τότε:

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$
4. $\overline{\bar{z}} = z$
5. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
6. $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
7. $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$
8. $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$
9. $z\bar{z} = |z|^2, |zw| = |z||w|$
10. $|z + w| \leq |z| + |w|$: τριγωνική ανισότητα



Σχήμα 1.2: Πολλαπλασιασμός.

11. $||z| - |w|| \leq |z - w|$

12. $|z| \leq |Re z| + |Im z|$

13. $|z_1 w_1 + \dots + z_k w_k|^2 \leq (|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2) (|w_1|^2 + \dots + |w_k|^2)$

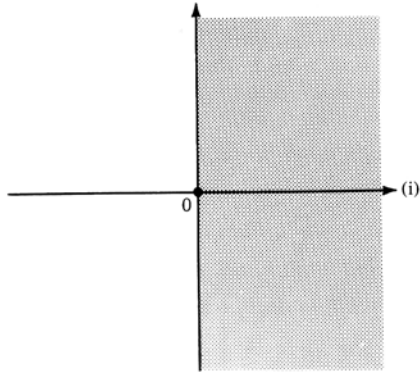
ανισότητα Cauchy - Schwarz

το ' = ' ισχύει $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} : (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \\ \text{και } \lambda z_j = \mu \bar{w}_j, j = 1, \dots, k \end{cases}$

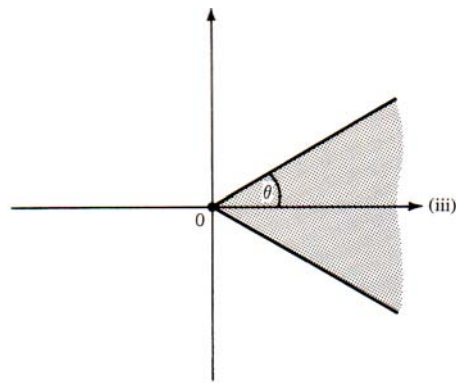
14. $arg \bar{z} = -arg z$

15. $arg(zw) = arg z + arg w \pmod{2\pi}$

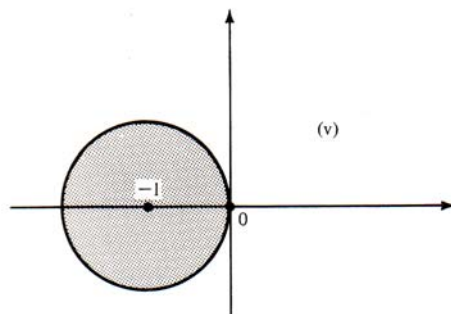
16. $arg \frac{z}{w} = arg z - arg w \pmod{2\pi}$



Σχήμα 1.3: $\operatorname{Re} z > 0$.



Σχήμα 1.4: $\{z : -\theta < \arg z < \theta\}$.



Σχήμα 1.5: $\{z : |z + 1| < 1\}$.

1.3 Πολικές Συντεταγμένες - Τύποι De Moivre και Euler

Ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός προσδιορίζεται πλήρως από την απόλυτη τιμή του και το όρισμά του.

Αν $z = x + iy$ με $|z| = r$ και $\arg z = \theta$, τότε

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{και}$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Τα r, θ λέγονται *πολικές συντεταγμένες* του z και η προηγούμενη σχέση δίνει την πολική μορφή του z .

Αυτή η μορφή είναι πολύ χρήσιμη σε υπολογισμούς, αφού αν

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

τότε

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{τύπος του de Moivre})$$

Η τελευταία αυτή σχέση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση εξισώσεων της μορφής $z^n = z_0$.

Παράδειγμα: Η εύρεση των κυβικών ριζών της μονάδας.

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\Leftrightarrow r = 1, \quad 3\theta = 0 \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η πολική μορφή των τριών αυτών ριζών δείχνει ότι είναι οι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο. Ομοίως, οι n -οστές ρίζες ενός $z \in \mathbb{C}$ είναι οι κορυφές κανονικού πολυγώνου με n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας $r^{\frac{1}{n}}$.

Συχνά χρησιμοποιείται ο τύπος του Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Παρατήρηση

Έστω $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi))$.

Το σύνολο των γωνιών $\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$ είναι το $argz$.

Κύρια τιμή του ορίσματος, $Argz$, είναι εκείνο το όρισμα που ανήκει στο $(-\pi, \pi]$. Ισχύει $argz = (Argz)(mod 2\pi)$.

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $arg_{\lambda}z$ εκείνη την τιμή του $argz$ για την οποία ισχύει $\lambda < arg_{\lambda}z \leq \lambda + 2\pi$.

Εύρεση του $Argz$

$$z = x + iy, x^2 + y^2 \neq 0$$

Θεωρούμε τον $z^* = |x| + i|y|$ και βρίσκουμε το $Argz^* = \phi$,

$$\phi = \arctan \frac{|y|}{|x|}, \left(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Εν συνεχεία βρίσκουμε σε ποίο τεταρτημόριο βρίσκεται ο z .

1.3.1 Παραδείγματα - Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το $arg_{\frac{3\pi}{2}}(-1 - i)$

Λύση

$$z := -1 - i \Rightarrow z^* = 1 + i \Rightarrow$$

$$Argz^* = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$Argz = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \text{ και } argz = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Τώρα } \frac{3\pi}{2} < 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k \Rightarrow k = 2, \text{ δηλαδή}$$

$$arg_{\frac{3\pi}{2}}(-1 - i) = 4\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

2. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε οι $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ να είναι συνευθειακοί.

Λύση

- α) Έστω ότι τα z_1, z_2, z_3 είναι συνευθειακά. Η ευθεία που διέρχεται από τα z_1, z_2 έχει εξίσωση

$$z = z_1 + \tau(z_1 - z_2), \tau \in \mathbb{R},$$

η οποία επαληθεύεται και από το z_3 . Έτσι

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

- β) Έστω ότι υπάρχει $\tau \in \mathbb{R} : z_3 - z_1 = \tau(z_1 - z_2)$. Τότε

$$z_3 = z_1 + \tau(z_1 - z_2)$$

$$z_2 = z_1 - (z_1 - z_2)$$

$$z_1 = z_1 + 0(z_1 - z_2)$$

απ' όπου έπεται ότι τα z_1, z_2, z_3 βρίσκονται επί της ευθείας

$$z = z_1 + \tau(z_1 - z_2), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

3. Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k, \quad k : \text{σταθ.}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Λύση

Έστω $z_j = a_j + b_j i, \quad j = 1, 2$. Τότε

$$\frac{|x + yi - (a_1 + b_1 i)|}{|x + yi - (a_2 + b_2 i)|} = k \Rightarrow (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = k^2(x - a_2)^2 + k^2(y - b_2)^2 \Rightarrow$$

$$(1 - k^2)x^2 + 2(k^2(a_2 - a_1)x + (1 - k^2)y^2 + 2(k^2b_2 - b_1)y = k^2(a_2^2 + b_2^2) - (a_1^2 + b_1^2).$$

α) $k = 1$. Τότε

$$2(b_1 - b_2)y = 2(a_2 - a_1)x + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2,$$

που παριστάνει ευθεία (και μάλιστα τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα z_1, z_2).

β) $k \neq 1$. Τότε

$$\left(x + \frac{k^2 a_2 - a_1}{1 - k^2}\right)^2 + \left(y + \frac{k^2 b_2 - b_1}{1 - k^2}\right)^2 = A, \quad \text{όπου}$$

$$A := \frac{k^2(a_2^2 + b_2^2) - (a_1^2 + b_1^2)}{1 - k^2} + \left(\frac{k^2 a_2 - a_1}{1 - k^2}\right)^2 + \left(\frac{k^2 b_2 - b_1}{1 - k^2}\right)^2,$$

που παριστάνει κύκλο κέντρου

$$z_0 = \frac{a_1 - a_2 k^2}{1 - k^2} + i \frac{b_1 - b_2 k^2}{1 - k^2}$$

και ακτίνας $R = \sqrt{A}$.

4. Να αποδειχθεί ότι, αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $\zeta \in \mathbb{C}$, η εξίσωση

$$az\bar{z} + \zeta z + \bar{\zeta}z + b = 0$$

παριστάνει ευθεία όταν $\{a = 0 \ \& \ \zeta\bar{\zeta} > 0\}$ και κύκλο πεπερασμένης, μη μηδενικής ακτίνας όταν $\{a \neq 0 \ \& \ \zeta\bar{\zeta} > ab\}$.

Λύση

Έστω $\zeta = \gamma + i\delta$ και $z = x + iy$, ($\gamma, \delta, x, y \in \mathbb{R}$). Τότε

$$\begin{aligned}\zeta z + \overline{\zeta z} &= 2\operatorname{Re}(\zeta z) \\ &= 2\operatorname{Re}\{(\gamma + i\delta)(x + iy)\} \\ &= 2(\gamma x - \delta y)\end{aligned}$$

και έτσι

$$az\bar{z} + \zeta z + \overline{\zeta z} + b = a(x^2 + y^2) + 2\gamma x - 2\delta y + b = 0$$

(i) Αν $a = 0 \Rightarrow 2\gamma x - 2\delta y + b = 0$,

που παριστάνει ευθεία όταν $\gamma^2 + \delta^2 > 0 \Leftrightarrow \zeta\bar{\zeta} > 0$.

(ii) Αν $a \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2\frac{\gamma}{a}x - 2\frac{\delta}{a}y + \frac{b}{a} = 0$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{\gamma}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{\delta}{a}\right)^2 = r^2, \text{ όπου } r^2 = \frac{\gamma^2 + \delta^2 - ab}{a^2},$$

που παριστάνει κύκλο όταν $r^2 > 0$, δηλαδή όταν $\zeta\bar{\zeta} = \gamma^2 + \delta^2 > ab$.

5. α) Να λυθεί η εξίσωση $z^8 = 1$

β) Να λυθεί η εξίσωση $z^5 = -32$

Υπενθυμίζουμε τον τύπο του De Moivre:

Αν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, τότε $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$. Για να λύσουμε την εξίσωση

$$z^n = w$$

υποθέτουμε ότι $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $w = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$

και έχουμε

$$\begin{aligned}r &= \sqrt[n]{\rho} \text{ και } n\theta = \phi + 2k\pi \Rightarrow \\ z &= \sqrt[n]{\rho} \left\{ \cos \left(\frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) \right\}\end{aligned}$$

Λύση

α) Αφού $1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$, έχουμε

$$\begin{aligned}z &= \cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \\ &= 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, i, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} -32 &= 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\}, k \in \mathbb{Z} \\ &= 2^5\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\} \end{aligned}$$

$$z = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right\}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

6. Αν $|z| = 1$, ν.δ.ο. $\left|\frac{w_1z+w_2}{w_2z+w_1}\right| = 1$, για οποιουσδήποτε $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$.

Λύση

Έχουμε

$$\frac{w_1z + w_2}{w_2z + w_1} \stackrel{z\bar{z}=|z|^2=1}{=} \frac{w_1z + w_2}{(\overline{w_2z + w_1})z}$$

οπότε

$$\left|\frac{w_1z + w_2}{w_2z + w_1}\right| = \frac{|w_1z + w_2|}{|w_2 + w_1\bar{z}||z|} \stackrel{|z|=|\bar{z}|}{=} \frac{|w_1z + w_2|}{|w_1\bar{z} + w_2||z|} = \frac{|\overline{w_1\bar{z} + w_2}|}{|w_1\bar{z} + w_2||z|} = 1$$

7. Μιγαδικός Συμβολισμός

Εξίσωση Ευθείας: $z = w_1 + w_2\tau$, $w_1, w_2 \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{R}$

Εξίσωση Κύκλου: $|z - w| = r$, $w \in \mathbb{C}, r > 0$

Εξίσωση Έλλειψης: $|z - w| + |z + w| = 2a$, $w \in \mathbb{C}, a > 0$, εστίες: $\pm w$, μεγάλος ημιάξονας: a .

8. $z = re^{i\theta}$

$$ze^{ia} = re^{i\theta}e^{ia} = re^{i(\theta+a)}$$

Δηλαδή, z επί e^{ia} σημαίνει στροφή του z κατά τη θετική φορά κατά γωνία a .

9. i) Έστω $p + qi$ ρίζα της $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ με $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}$. Τότε η $p - qi$ είναι επίσης ρίζα (θέσε $p + qi = re^{i\theta}$ και μετά γράψε τη συζυγή εξίσωση).

ii) $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0 \Rightarrow z = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5-i)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow z = 2 - 3i$, ή $z = 1 + i$.

OXI συζυγείς ρίζες. (Εδώ οι συντελεστές είναι μιγαδικοί αριθμοί.)

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και Σειρές Μιγαδικών Αριθμών

Ορισμός 2.0.1 $z_n \rightarrow z \stackrel{\text{ώς}}{\Leftrightarrow} |z_n - z| \rightarrow 0$ (συγκλίνει στο \mathbb{R})

Παρατηρούμε ότι $z_n \rightarrow z \Rightarrow \begin{matrix} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \end{matrix}$

Ορισμός 2.0.2 $\{z_n\}$ ακολουθία Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z} : n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$

Πρόταση 2.0.1 Η $\{z_n\}$ είναι συγκλίνουσα \Leftrightarrow η $\{z_n\}$ είναι Cauchy.

Ορισμός 2.0.3 Μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ συγκλίνει αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ συγκλίνει, όπου $s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. Το όριο, τότε, της $\{s_n\}$ λέγεται όριο της σειράς.

Ιδιότητες

- (1) Το άθροισμα και η διαφορά συγκλινουσών σειρών συγκλίνει.
- (2) Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ είναι: $z_n \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.
- (3) Ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ είναι η σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ (οπότε η $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα).

Παραδείγματα

- (1) $z^n \rightarrow 0$ αν $|z| < 1$, αφού $|z^n - 0| = |z|^n \rightarrow 0$
- (2) $\frac{n}{n+i} \rightarrow 1$, αφού $\left| \frac{n}{n+i} - 1 \right| = \left| \frac{-i}{n+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 0$
- (3) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2+i}$ συγκλίνει, αφού $\left| \frac{i^k}{k^2+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ συγκλίνει.

(4) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+i}$ αποκλίνει, αφού $\frac{1}{k+i} = \frac{k-i}{k^2+1}$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{k+i}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{k+i}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$.

Θέσε $a_k = \frac{1}{k+1}$, $b_k = \frac{k}{k^2+1}$.

Τότε $b_k \geq a_k \geq 0$ για $k \geq 1$.

Εξάλλου η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ αποκλίνει. Από το Κριτήριο Σύγκλισης αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$.

2.1 Ασκήσεις

1. Έστω $x_n = 1 + r \cos a + r^2 \cos 2a + \dots + r^n \cos na$, $r \in (0, 1)$. Να βρεθεί το $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Λύση

Θέτω $y_n = r \sin a + r^2 \sin 2a + \dots + r^n \sin na$

και $z_n := x_n + iy_n = 1 + r(\cos a + i \sin a) + \dots + r^n(\cos na + i \sin na)$

Θέτω $w := r(\cos a + i \sin a)$ και παρατηρώ ότι $|w| = r < 1$.

Από τον τύπο του de Moivre έχω:

$$z_n = 1 + w + w^2 + \dots + w^n = \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w}$$

και αφού $|w| < 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{1-w}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \lim x_n &= \lim(\operatorname{Re} z_n) = \operatorname{Re}(\lim z_n) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-w}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - r(\cos a + i \sin a)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1 - r \cos a) - ir \sin a}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{(1 - r \cos a) + ir \sin a}{(1 - r \cos a)^2 + r^2 \sin^2 a}\right) = \frac{1 - r \cos a}{1 - 2r \cos a + r^2} \end{aligned}$$

2. Να βρεθούν τα $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n}$.

Λύση

α) $\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{|i^n|}{n} = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$, όταν $n > \frac{1}{\varepsilon}$, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n} = 0$.

β) $u_n = \frac{(1+i)^n}{n}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(1+i)^{n+1}}{(1+i)^n} \frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} |1+i| = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

για κάθε $n \geq 3$ έχουμε

$$\frac{n\sqrt{2}}{n+1} > \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1.05 > 1$$

οπότε $|u_n| > (1.03)^{n-3} |u_3|$,

άρα η u_n δεν συγκλίνει.

2.2 Σειρές

Πρόταση 2.2.1

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < 1 \\ \text{αποκλίνει}, & |z| \geq 1 \end{cases}$

Πρόταση 2.2.2 (Κριτήριο Σύγκρισης)

- (i) $|z_k| \leq |w_k|$ και $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$: συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k$: συγκλίνει απολύτως.
(ii) $|z_k| \leq |w_k|$ και $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$: αποκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$: αποκλίνει αλλά η $\sum w_k$ μπορεί να συγκλίνει ή όχι.

Πρόταση 2.2.3 (Κριτήριο της p -σειράς)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο ∞ αν $p \leq 1$.

Πρόταση 2.2.4 (Κριτήριο του Λόγου)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \begin{cases} < 1 \\ > 1 \\ = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{συγκλίνει απολύτως} \\ \text{αποκλίνει} \\ \text{δεν εφαρμόζεται το κριτήριο} \end{cases}$$

Πρόταση 2.2.5 (Κριτήριο της Ρίζας)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|z_n|)^{\frac{1}{n}} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \\ = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{συγκλίνει απολύτως} \\ \text{αποκλίνει} \\ \text{δεν εφαρμόζεται το κριτήριο} \end{cases}$$

Πρόταση 2.2.6 (Κριτήριο Cauchy)

- (i) Μια ακολουθία $f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in A, \quad \forall p = 1, 2, \dots$$

- (ii) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^p g_k(z) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in A, \quad \forall p = 1, 2, \dots$$

Πρόταση 2.2.7 (Το M -κριτήριο του Weierstrass)

Έστω g_n ακολουθία συναρτήσεων που ορίζεται στο $A \in \mathbb{C}$. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $M_n \geq 0$:

(i) $|g_n(z)| \leq M_n, \quad \forall z \in A$

(ii) η $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα επί του A .

2.2.1 Παραδείγματα – Ασκήσεις

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ συγκλίνει απολύτως για $\operatorname{Re} z > 1$ και ομοιόμορφα για $\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Έστω $z = x + iy$. Τότε $n^z = e^{z \log n} = e^{(x+iy) \log n}$.

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{e^{x \log n}} = \frac{1}{n^x} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ συγκλίνει αν } x > 1, \text{ δηλ. αν } \operatorname{Re} z > 1.$$

Όταν $\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon$ θέτω $M_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ και η ομοιόμορφη σύγκλιση έπεται από το M -κριτήριο του Weierstrass.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-inz}}{n^2+1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z < -a$ για κάθε $a > 0$.

$$\text{Έστω } z = x + iy. \text{ Τότε } \left| \frac{e^{-inz}}{n^2+1} \right| = \left| \frac{e^{-inx} e^{ny}}{n^2+1} \right| = \frac{e^{ny}}{n^2+1}$$

$$\text{Αν } \operatorname{Im} z = y < -a < 0, \text{ τότε } e^{ny} < e^{-na} \text{ και έτσι } \left| \frac{e^{-inz}}{n^2+1} \right| \leq \left| \frac{e^{-na}}{n^2+1} \right| := M_n.$$

Εξετάζω τη σύγκλιση της $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$.

$$\text{Κριτήριο Λόγου: } \lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim \left| \frac{e^{-(n+1)a} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}}{e^{-na}} \right| = e^{-a} \lim \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = e^{-a} < 1$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$\text{Θέτω } A_\sigma = \{z : |z| \leq \sigma\}, \quad 0 \leq \sigma < 1.$$

$$\text{Θέτω } g_n(z) = \frac{z^n}{n}.$$

$$\text{Τότε } |g_n(z)| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{\sigma^n}{n} \leq \sigma^n := M_n \text{ και αφού } \sigma < 1, \text{ η } \sum M_n \text{ συγκλίνει.}$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A_σ .

Η σειρά αυτή συγκλίνει σημειακά στο $A = \{z : |z| < 1\}$ αφού κάθε $z \in A$ βρίσκεται αρκετά κοντά σε κάποιο A_σ για σ αρκετά κοντά στο 1.

Όμως η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα επί του A . Αν συνέκλινε, η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ θα συνέκλινε ομοιόμορφα επί του $[0, 1)$, που δεν ισχύει. (άσκηση).

Κεφάλαιο 3

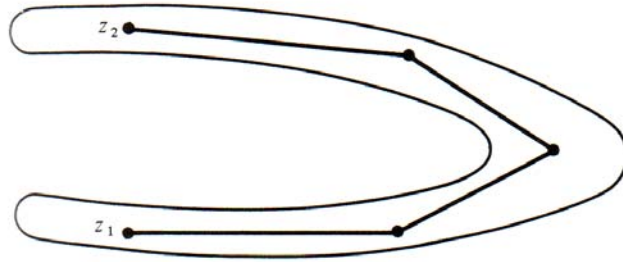
Συναρτήσεις Μιγαδικών Αριθμών

3.1 Κατάταξη Συνόλων στο Μιγαδικό Επίπεδο

Ορισμός 3.1.1 .

- $D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ ανοιχτός δίσκος, περιοχή του z_0 .
- $C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$ κύκλος.
- S : ανοιχτό $\Leftrightarrow \forall z \in S \exists \delta > 0 : D(z, \delta) \subseteq S$.
- $\tilde{S} = \mathbb{C} - S$ ($\tilde{S} = \{z \in \mathbb{C} : z \notin S\}$) συμπλήρωμα του S .
- S : κλειστό $\Leftrightarrow \tilde{S}$ ανοιχτό
 $\Leftrightarrow \{z_n\} \in S \text{ και } z_n \rightarrow z \Rightarrow z \in S$
- $\partial S = \{z : \forall \delta > 0 : D(z, \delta) \cap S = \emptyset \text{ και } D(z, \delta) \cap \tilde{S} \neq \emptyset\}$ σύνορο του S .
- $\bar{S} = S \cup \partial S$
- S : φραγμένο $\Leftrightarrow \exists M > 0 : S \subseteq D(0, M)$
- S κλειστό και φραγμένο $\Leftrightarrow S$ συμπαγές
- S μη συνεκτικό: υπάρχουν δύο ανοιχτά, ξένα σύνολα A και B που η ένωσή τους περιέχει το S ενώ ούτε το A ούτε το B περιέχουν το S .
- S συνεκτικό αν δεν είναι μη συνεκτικό.
- $[z_1, z_2]$: το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z_1, z_2 .
- πολυγωνική γραμμή: πεπερασμένη ένωση ευθυγράμμων τμημάτων της μορφής $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n]$.

- Αν κάθε δύο σημεία του S μπορούν να ενωθούν με μια πολυγωνική γραμμή που περιέχεται στο S , τότε το S λέγεται πολυγωνικά συνεκτικό.
- πολυγωνικά συνεκτικό \Rightarrow συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες για τα ανοιχτά σύνολα.
- τόπος $\stackrel{\text{ορς}}{=} \text{ανοιχτό} + \text{συνεκτικό}$.



Σχήμα 3.1: Πολυγωνικά συνεκτικό Σύνολο.

3.2 Συνεχείς Συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1 Μια συνάρτηση μιγαδικών τιμών $f(z)$ ορισμένη σε μια περιοχή του z_0 , είναι συνεχής στο z_0 , αν $z_n \rightarrow z_0$ συνεπάγεται ότι $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Διαφορετικά, η f είναι συνεχής στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε αν $|z - z_0| < \delta$ τότε $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Η f είναι συνεχής σε έναν τόπο D αν για κάθε ακολουθία $\{z_n\} \subseteq D$ και $z \in D$ τέτοια ώστε $z_n \rightarrow z$, να ισχύει $f(z_n) \rightarrow f(z)$.

Αν διασπάσουμε την f στο πραγματικό και φανταστικό της μέρος

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

όπου η u και η v παίρνουν πραγματικές τιμές, είναι φανερό ότι η f είναι συνεχής τότε και μόνο τότε αν οι u και v είναι συνεχείς συναρτήσεις του (x, y) .

Παραδείγματα.

1. Κάθε πολυώνυμο

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{kj} x^k y^j$$

είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το επίπεδο.

2. Η $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$ είναι συνεχής στο “επίπεδο” $\{z : z \neq 0\}$.

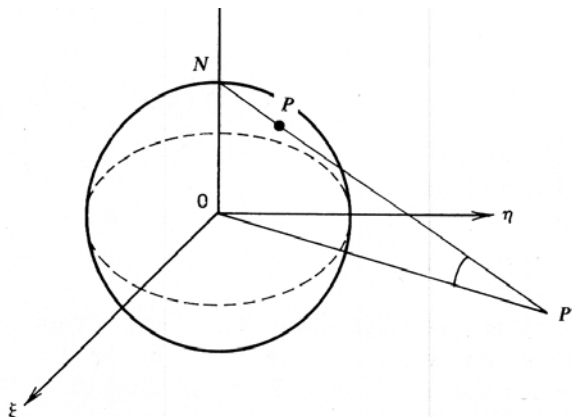
Ορισμένες Ιδιότητες

- Είναι προφανές ότι το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο (με μη μηδενικό παρονομαστή) συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
- Λέμε ότι $f \in \mathbb{C}^n$ αν και το $\operatorname{Re} f$ και το $\operatorname{Im} f$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους n -τάξης.
- Μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο D , αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ τέτοιο ώστε $n > N$ συνεπάγεται ότι $|f(z_n) - f(z)| < \epsilon$ για κάθε $z \in D$.
- Αναφερόμενοι πάλι στα πραγματικά και φανταστικά μέρη των $\{f_n\}$, βλέπουμε ότι το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
- **M-test.** Αν f_k συνεχής στο D , $k = 1, 2, \dots$ και $|f_k(z)| \leq M_k$ στο D και αν η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο D .
- Θυμίζουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση απεικονίζει συμπαγή/συνεκτικά σύνολα σε συμπαγή/συνεκτικά σύνολα, ενώ αυτό δε συμβαίνει για καμιά άλλη κατηγορία συνόλων. Π.χ. η $f(z) = \frac{1}{z}$ απεικονίζει το φραγμένο σύνολο $0 < |z| < 1$ επί του μη φραγμένου συνόλου $|z| > 1$.
- Έστω ότι η $u(x, y)$ έχει μερικές παραγώγους u_x και u_y που μηδενίζονται σε κάθε σημείο ενός τόπου D . Τότε η u είναι σταθερή στον D .

3.2.1 Στερεογραφική Προβολή

Είναι συχνά χρήσιμο να συμπεριλάβουμε στο μιγαδικό επίπεδο το **σημείο στο άπειρο**, που συμβολίζεται ∞ . Για να αντιληφθούμε “οπτικά” το σημείο στο άπειρο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μιγαδικό επίπεδο περνάει από τον ισημερινό της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το $z = 0$. Σε κάθε σημείο z του επιπέδου αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο P της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται ως τομή της ευθείας zN (N ο βόρειος πόλος) με την επιφάνεια αυτή. Αντιστρόφως, σε κάθε σημείο P της επιφάνειας της σφαίρας, πλην του N , αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο z του επιπέδου. Αντιστοιχώντας στο N το σημείο στο

άπειρο, πετυχαίνουμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της επιφάνειας της σφαίρας και του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου. Αυτή η σφαίρα λέγεται **σφαίρα του Riemann** και η αντιστοιχία **στερεογραφική προβολή**, ή **προβολή του Πτολεμαίου**. Το σύνολο $|z| > \frac{1}{\epsilon}$ λέγεται περιοχή του ∞ .



Σχήμα 3.2: Στερεογραφική προβολή.

Ορισμός 3.2.2 Λέμε ότι $\{z_k\} \rightarrow \infty$ αν $|z_k| \rightarrow \infty$, δηλαδή αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{Z}$: $k > N$ συνεπάγεται ότι $|z_k| > M$. Ομοίως $f(z) \rightarrow \infty$ αν $|f(z)| \rightarrow \infty$.

3.3 Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z

3.3.1 Αναλυτικά Πολυώνυμα

Ένα πολυώνυμο $P(x, y)$ λέγεται αναλυτικό πολυώνυμο, αν υπάρχουν (μιγαδικές) σταθερές a_k έτσι ώστε:

$$P(x, y) = a_0 + a_1(x + iy) + a_2(x + iy)^2 + \dots + a_N(x + iy)^N$$

Τότε θα λέμε ότι το P είναι πολυώνυμο ως προς z και θα το γράφουμε ως

$$P(x, y) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_Nz^N$$

Π.χ. Το πολυώνυμο $x^2 + y^2 + 2ixy$ είναι αναλυτικό ενώ εύκολα δείχνεται ότι το $x^2 + y^2 - 2ixy$ δεν είναι αναλυτικό.

Ορισμός 3.3.1 Έστω $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, όπου u και v συναρτήσεις πραγματικών τιμών. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι u_x, u_y, v_x, v_y ορίζουμε

$$f_x = u_x + iv_x, \quad f_y = u_y + iv_y$$

Αποδεικνύεται ότι ένα πολυώνυμο είναι αναλυτικό τότε και μόνο τότε αν $P_y = iP_x$.

Ορισμός 3.3.2 Μια συνάρτηση f με μιγαδικές τιμές που ορίζεται σε μια περιοχή του z , λέγεται διαφορίσιμη στο z αν υπάρχει το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(z)$. Το h δεν είναι απαραίτητως πραγματικό.

Ικανοποιούνται οι γνωστοί τύποι για την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Τέλος αποδεικνύεται ότι αν το P είναι αναλυτικό, τότε είναι διαφορίσιμο σε κάθε z . Μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων του z , είναι αυτές που δίνονται από άπειρα πολυώνυμα του z , ή αλλιώς δυναμοσειρές του z .

3.3.2 Δυναμοσειρές

Ορισμός 3.3.3 Δυναμοσειρά είναι μια σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

Για τη μελέτη της σύγκλισης δυναμοσειρών, μας χρειάζεται η έννοια του $\overline{\lim}$ (*limsup*), μιας θετικής πραγματικής ακολουθίας:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right).$$

Αφού το $\sup_{k \geq n} a_k$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του n , το όριο ή υπάρχει πάντα ή είναι ∞ .

Οι ιδιότητες του $\overline{\lim}$ που θα χρειαστούμε είναι:

Αν $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ τότε:

1. για κάθε N και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\kappa > N$ τέτοιο ώστε $a_k \geq L - \epsilon$
2. για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει N τέτοιο ώστε $a_k \leq L + \epsilon$, για κάθε $k > N$

Θεώρημα 3.3.1 Έστω ότι $\overline{\lim} |c_k|^{1/k} = L$.

1. Αν $L = 0$, η $\sum c_k z^k$ συγκλίνει για όλα τα z .
2. Αν $L = +\infty$, η $\sum c_k z^k$ συγκλίνει μόνο για $z = 0$.
3. Αν $0 < L < +\infty$, θέτουμε $R = \frac{1}{L}$. Τότε η $\sum c_k z^k$ συγκλίνει για $|z| < R$ και αποκλίνει για $|z| > R$. Το R λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παρατήρηση 3.3.1 1. Αν η $\sum c_k z^k$ έχει ακτίνα σύγκλισης R , τότε συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε μικρότερο δίσκο $|z| \leq R - \delta$ κι έτσι είναι συνεχής στο πεδίο σύγκλισής της.

2. Το άθροισμα συγκλινουσών δυναμοσειρών είναι συγκλίνουσα δυναμοσειρά.
3. Το γινόμενο Cauchy συγκλινουσών δυναμοσειρών είναι συγκλίνουσα δυναμοσειρά για $|z| < \min(R_a, R_b)$, όπου R_a, R_b οι ακτίνες σύγκλισης των δύο δυναμοσειρών. Υπενθυμίζουμε ότι αν a_n, b_n είναι δύο ακολουθίες το γινόμενο Cauchy είναι η ακολουθία

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

4. Αν συμβεί να υπάρχει το $\lim \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$, τότε

$$R = \frac{1}{\lim |c_k|^{1/k}} = \lim \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|.$$

Αυτή η σχέση έχει μεγάλη πρακτική σημασία.

Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.
Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για $|z| < 1$ και αποκλίνει για $|z| > 1$ αφού $n^{1/n} \rightarrow 1 \in (0, \infty)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.
Η δυναμοσειρά αυτή έχει, επίσης, ακτίνα σύγκλισης 1. Όμως, συγκλίνει και για $|z| = 1$, αφού $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε z , αφού $\frac{1}{(n!)^{1/n}} \rightarrow 0$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$.
 $\lim \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = 0$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο $z = 0$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(2z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$.
Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι $R = \lim (2^n n^2)^{1/n} = \lim (2n^{2/n}) = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$ και κέντρο είναι το $\frac{1}{2}$.

Θεώρημα 3.3.2 Έστω $f(z) = \sum c_n z^n$ και ότι η σειρά συγκλίνει για $|z| < R$. Τότε υπάρχει η $f'(z)$ και ισούται με $\sum n c_n z^{n-1}$ στον $|z| < R$.

Πόρισμα 3.3.1 Οι δυναμοσειρές έχουν κάθε τάξης παράγωγο μέσα στο πεδίο σύγκλισής τους.

Πόρισμα 3.3.2 Αν η $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ έχει μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης, τότε $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ για κάθε n .

Θεώρημα 3.3.3 (Μοναδικότητας Δυναμοσειρών). Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ μηδενίζεται σε όλα τα σημεία μιας $\{z_k\} : z_k \rightarrow 0$ και $z_k \neq 0$. Τότε η δυναμοσειρά είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν.

Πόρισμα 3.3.3 Αν η $\sum a_n z^n$ και η $\sum b_n z^n$ συγκλίνουν και συμπίπτουν σε ένα σύνολο σημείων που έχει σημείο συσσώρευσης το 0, τότε $a_n = b_n$ για κάθε n .

Πόρισμα 3.3.4 Έστω $\overline{\lim} |c_n|^{1/n} < \infty$, θέτουμε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Τότε $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Θεώρημα 3.3.4 (Abel). Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο $z_1 \neq 0$. Τότε συγκλίνει απολύτως σε κάθε σημείο $z : |z| < |z_1|$. Έστω $r < |z_1|$. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| \leq r$.

3.3.3 Αναλυτικές Συναρτήσεις

Αναλυτικότητα και εξισώσεις Cauchy-Riemann

Πρόταση 3.3.1 Αν η $f = u + iv$ είναι διαφορίσιμη στο z , υπάρχουν οι f_x και f_y στο z και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann.

$$f_y = i f_x,$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν διαφορίζονται σε ένα σημείο παρόλο που υπάρχουν εκεί οι μερικές παράγωγοί τους και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann.

Παράδειγμα 3.3.1 .

$$f(z) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

Η $f = 0$ και στους δύο άξονες και συνεπώς $f_x = f_y = 0$ στο μηδέν, όμως το

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

δεν υπάρχει. Πράγματι επί της ευθείας $y = ax : \frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{a}{1+a^2}$ για $z \neq 0$ και συνεπώς το όριο εξαρτάται από το a !

Ισχύει εντούτοις το εξής μερικό αντίστροφο:

Πρόταση 3.3.2 Έστω ότι υπάρχουν σε μια περιοχή του z οι f_x, f_y . Τότε αν οι f_x, f_y είναι συνεχείς στο z και ισχύει $f_y = if_x$ εκεί, η f είναι διαφορίσιμη στο z .

Ορισμός 3.3.4 Η f είναι **αναλυτική** (ολόμορφη) στο z , αν είναι διαφορίσιμη σε μια περιοχή του z . Η f είναι αναλυτική σε ένα σύνολο S αν είναι διαφορίσιμη σε όλα τα σημεία ενός ανοιχτού συνόλου που περιέχει το S . Μια αναλυτική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (σε όλο το \mathbb{C}) λέγεται **ακέραια** συνάρτηση.

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο διαφορίσιμων συναρτήσεων είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Ομοίως και η σύνθεση. Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις, η αντίστροφη μιας συνάρτησης μπορεί να μην είναι καν συνεχής. Ο επόμενος ορισμός, μας επιτρέπει να μιλάμε για διαφορισιμότητα των αντιστρόφων συναρτήσεων.

Ορισμός 3.3.5 Έστω S και T ανοιχτά σύνολα και έστω ότι η f είναι 1-1 στο S με $f(S) = T$. Η g είναι η αντίστροφη της f στο T , αν $f(g(z)) = z$ για $z \in T$. Η g είναι η αντίστροφη της f στο z_0 , αν είναι η αντίστροφη της f σε κάποια περιοχή του z_0 .

Πρόταση 3.3.3 Έστω ότι η g είναι η αντίστροφη της f στο z_0 και ότι η g είναι συνεχής στο z_0 . Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $g(z_0)$ και αν $f'(g(z_0)) \neq 0$, τότε η g είναι διαφορίσιμη στο z_0 και $g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}$.

Η αναλυτικότητα είναι μια εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα. Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα μαζί της σε επόμενα κεφάλαια. Για την ώρα δίνουμε δύο άμεσες συνέπειές της.

Πρόταση 3.3.4 Αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική σε έναν τόπο D και η u είναι σταθερή, τότε η f είναι σταθερή.

Πρόταση 3.3.5 Αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική σε έναν τόπο D και η $|f|$ είναι σταθερή εκεί, τότε η f είναι σταθερή.

Φυσική ερμηνεία της Διαφορισιμότητας

Έχουμε δει ότι για να είναι μια συνάρτηση διαφορίσιμη, πρέπει να ικανοποιείται μια συγκεκριμένη συνθήκη, που “αναλυτικά” εκφράζεται από τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Θα δούμε τώρα τι σημαίνει αυτή η συνθήκη “φυσικά”. Ποιά είναι δηλαδή εκείνη η ξεχωριστή ιδιότητα του διανυσματικού πεδίου που διακρίνει μια διαφορίσιμη από μια μη διαφορίσιμη μιγαδική συνάρτηση;

Η καθαρότητα της απάντησης εξαρτάται πολύ από τον καλό συμβολισμό. Έστω z ένα μεταβλητό σημείο ενός δισδιάστατου διανυσματικού πεδίου και \bar{w} το διάνυσμα που αντιστοιχεί

στο z , μέσω της f . Έστω x, y οι συντεταγμένες του z και u, v οι συντεταγμένες του \bar{w} . Τότε

$$z = x + iy, \quad \bar{w} = u + iv \quad \text{οπότε} \quad w = u - iv.$$

Θεωρούμε το w ως συνάρτηση του z

$$w = u - iv = f(z) = f(x + iy)$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη, θα πρέπει να ισχύει (Πρόταση 3.3.1) $f_y = if_x$, δηλαδή

$$u_x - iv_x = \frac{1}{i}(u_y - iv_y) \Leftrightarrow$$

$$u_x + v_y = 0 \tag{3.1}$$

και

$$v_x - u_y = 0 \tag{3.2}$$

Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν ότι η συνάρτηση που παριστάνεται από το διανυσματικό πεδίο είναι διαφορίσιμη.

1. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο μας ως πεδίο ροής και το \bar{w} ως μια ταχύτητα, την ένταση της ροής στο σημείο z . Τότε η έκφραση $u_x + v_y$ λέγεται απόκλιση του διανύσματος \bar{w} , συμβολίζεται με $\text{div}\bar{w}$ και μετράει την εξερχόμενη ροή ανά μονάδα όγκου σε μια κλειστή περιοχή του σημείου z . Αν $\text{div}\bar{w} > 0$ το σημείο z δρα ως “πηγή” (source), ενώ αν $\text{div}\bar{w} < 0$ το z δρα ως “καταβόθρα” (sink). Αν η απόκλιση μηδενίζεται σε κάθε σημείο, το πεδίο λέγεται σωληνοειδές (sourceless). Έτσι η (3.1) γράφεται

$$\text{div}\bar{w} = 0$$

και χαρακτηρίζει ένα σωληνοειδές πεδίο.

2. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο μας ως πεδίο δυνάμεων και το \bar{w} ως μια δύναμη, την ένταση του πεδίου στο σημείο z . Η έκφραση $v_x - u_y$ λέγεται στροβιλισμός (curl) του \bar{w} και μετράει το έργο ανά μονάδα επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα, το έργο που παράγεται από το πεδίο όταν ένα μικρό σωματίδιο διαγράφει μια κλειστή καμπύλη που περικλείει το z διαιρείται με την επιφάνεια που περικλείει η καμπύλη. Όταν οι διαστάσεις της καμπύλης τείνουν στο μηδέν, αυτό το ανηγμένο έργο τείνει στο $\text{curl}\bar{w}$. Αν το curl μηδενίζεται σε κάθε σημείο, το πεδίο λέγεται αστρόβιλο. Έτσι η (3.2) γράφεται

$$\text{curl}\bar{w} = 0$$

και χαρακτηρίζει το πεδίο ως αστρόβιλο.

Συνοψίζοντας, λέμε ότι μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής παριστάνεται με ένα σωληνοειδές και αστρόβιλο πεδίο.

Η εξίσωση του Laplace

Μια πραγματική συνάρτηση h δύο πραγματικών μεταβλητών x, y λέγεται **αρμονική** σε έναν τόπο του επιπέδου xy , αν παντού σε αυτόν τον τόπο έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους και ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\Delta h = \nabla^2 h = h_{xx} + h_{yy} = 0$$

που είναι γνωστή ως **εξίσωση του Laplace**. Από τις συνθήκες Cauchy Riemann που ικανοποιούν οι συντεταγμένες συναρτήσεις μιας αναλυτικής συνάρτησης $f = u + iv$, παραγωγίζοντας ως προς x , παίρνουμε ότι:

$$u_{xx} = v_{yx} \quad u_{yx} = -v_{xx}.$$

Παραγωγή ως προς y , δίνει αντίστοιχα

$$u_{xy} = v_{yy} \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Η συνέχεια των μερικών παραγώγων εξασφαλίζει ότι $v_{yx} = v_{xy}$ και $u_{xy} = u_{yx}$. Συνεπώς:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{και} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Έχουμε, δηλαδή, ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Ασκήσεις

1. Αν οι f, \bar{f} είναι αναλυτικές στον τόπο D τότε η f είναι σταθερή στον D .

Λύση

Έστω $f = u + iv$. Αφού η f είναι αναλυτική ισχύουν οι σχέσεις Cauchy-Riemann, δηλαδή $u_x = v_y$ και $v_x = -u_y$. Εξάλλου $\bar{f} = u - iv$. Αφού όμως είναι και η \bar{f} αναλυτική, ισχύουν και για αυτήν οι συνθήκες Cauchy Riemann, δηλαδή $u_x = -v_y$ και $-v_x = -u_y$. Απ'αυτές έπεται ότι $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Άρα η f είναι σταθερή.

2. (Πολικές Συντεταγμένες) Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις.

(α') Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann : $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$.

(β') Η εξίσωση Laplace : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$.

(γ') Παράγωγος : $f'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Λύση

Θα αποδείξουμε την πρώτη σχέση. Έχουμε ότι $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = x + iy$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$. Άρα

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Από τις παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \theta.$$

Από τις συνθήκες C-R (για καρτεσιανές συντεταγμένες) παίρνουμε το αποτέλεσμα.

3. Έστω η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, αναλυτική στον τόπο D και υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ώστε να ισχύει $au(x, y) + bv(x, y) = c$ στον D . Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στον D .

Λύση

Παραγωγίζοντας την $au(x, y) + bv(x, y) = c$ θα έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{C-R}} \left. \begin{array}{l} av_y + bv_x = 0 \\ -av_x + bv_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} abv_y + b^2v_x = 0 \\ abv_y - a^2v_x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a^2 + b^2)v_x = 0 \Rightarrow v_x = 0.$$

Άρα και $v_y = 0$ και οι συνθήκες C-R δίνουν ότι $u_x = u_y = 0$. Συνεπώς η f είναι σταθερή.

4. Η $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι αναλυτική.

Λύση

Έστω $z = x + yi$. Τότε $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x - iy$. Επομένως $u_x = 1$ και $v_y = -1$. Οι συνθήκες C-R δεν ισχύουν άρα η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική.

5. Συζυγείς συντεταγμένες.

Λύση

$z = x + yi$, $\bar{z} = x - iy$. Άρα $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)$$

Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Οι συνθήκες C-R είναι $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$. Συνεπώς οι συνθήκες C-R σε συζυγείς συντεταγμένες είναι $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

6. Έστω $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ αναλυτική. Είδαμε, τότε ότι οι u, v είναι αρμονικές, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Οι u, v (πραγματικές συναρτήσεις) ορισμένες σε έναν τόπο D λέγονται συζυγείς αρμονικές αν η $f = u + iv$ (μιγαδική συνάρτηση) είναι αναλυτική στον D ή ισοδύναμα αν οι u, v είναι αρμονικές και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann.

- (α') Η $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ είναι αρμονική. Να βρεθεί η συζυγής της.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2y \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2 \end{array} \right\} \implies \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

Έστω w η συζυγής της. Θα πρέπει οι ϕ, w να ικανοποιούν τις συνθήκες C-R $w_y = \phi_x$ και $w_x = -\phi_y$. Άρα θα πρέπει $w_y = 2x \Rightarrow w = 2xy + \mu(x)$ όπου $\mu(x)$ σταθερή ως προς y . Άρα $w_x = 2y + \mu'(x) \Rightarrow -\phi_y = 2y + \mu'(x) \Rightarrow 2y = 2y + \mu'(x) \Rightarrow \mu'(x) = 0 \Rightarrow \mu_1(x) = c \Rightarrow w(x, y) = 2xy + c$.

- (β') Να βρεθεί αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, από τις σχέσεις $v(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ και $f(2) = 0$.

Λύση

$u_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ και $v_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Επειδή πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες C-R θα έχουμε: $u_y = -v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow u(x, y) = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy + \mu(x) = -\frac{x}{x^2+y^2} + \mu(x)$. Έτσι παίρνουμε ότι $u_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \mu'(x)$ και αφού πρέπει $u_x = v_y \Rightarrow \mu(x) = c$. Από τη σχέση $f(2) = 0$ παίρνουμε ότι $c = \frac{1}{2}$, και έτσι τελικά

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$$

Ορθογώνιες Οικογένειες

Έστω δύο οικογένειες καμπυλών $u(x, y) = c_1$ και $v(x, y) = c_2$ και έστω ότι η $f = u + iv$ είναι αναλυτική. Τότε οι οικογένειες καμπυλών u και v είναι ορθογώνιες.

Αρκεί ναδειχθεί ότι το γινόμενο της κλίσης $\left(\frac{dy}{dx}\right)_u$ της $u(x, y) = c_1^*$, επί την κλίση $\left(\frac{dy}{dx}\right)_v$ της $v(x, y) = c_2^*$ είναι ίσο με -1. Ισοδύναμα δηλαδή αρκεί ναδειχθεί ότι $\nabla u \cdot \nabla v = 0$. Πράγματι,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_u = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \text{ και } \left(\frac{dy}{dx}\right)_v = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Αντίστοιχα:

$$\nabla u \cdot \nabla v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Από τις συνθήκες C-R παίρνουμε ότι

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_u \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)_v = -1 \quad \text{ή} \quad \nabla u \cdot \nabla v = 0.$$

Παράδειγμα 3.3.2 Προσδιορίστε τις ορθογώνιες τροχιές μιας οικογένειας καμπυλών στο xy επίπεδο με εξίσωση $e^{-x}(x \sin y - y \cos y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Έστω $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$. Αναζητούμε v τέτοια ώστε η $f = u + iv$ να είναι αναλυτική. Από τις συνθήκες C-R έχουμε ότι

$$v_y = u_x = e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y$$

$$v_x = -u_y = e^{-x} \cos y - x e^{-x} \cos y - y e^{-x} \sin y.$$

Άρα ολοκληρώνοντας ως προς y έχουμε $v = y e^{-x} \sin y + x e^{-x} \cos y + F(x)$. Στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς x και αντικαθιστούμε οπότε τελικά παίρνουμε $F(x) = c$.

3.4 Οι Στοιχειώδεις Συναρτήσεις

3.4.1 Η Εκθετική Συνάρτηση

Επιθυμούμε να ορίσουμε μια εκθετική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής z . Θέλουμε δηλαδή να βρούμε μια αναλυτική συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$$

$$f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε ότι $f(z) = f(x + iy) = f(x)f(iy) = e^x f(iy)$. Θέτοντας $f(iy) = A(y) + iB(y)$ παίρνουμε

$$f(z) = e^x A(y) + i e^x B(y).$$

Για να είναι η f αναλυτική, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες C-R συνεπώς θα πρέπει $A(y) = B'(y)$ και $A'(y) = -B(y)$. Δηλαδή $A''(y) = -A(y)$. Έτσι έχουμε ότι

$$A(y) = a \cos y + b \sin y$$

$$B(y) = -A'(y) = -b \cos y + a \sin y.$$

Όμως $f(x) = e^x \Rightarrow A(0) = 1$, $B(0) = 0$. Εξάλλου $A(0) = a$, $B(0) = -b$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στην

$$f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι η f είναι ακέραια συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις που θέλαμε. Η f είναι συνεπώς ακέραια “επέκταση” της πραγματικής εκθετικής συνάρτησης. Γράφουμε $f(z) = e^z$.

Ιδιότητες της e^z

1. $|e^z| = e^x$
2. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$
3. $e^{iy} = \cos y + i \sin y$
4. Η εξίσωση $e^z = a$ έχει απείρου πλήθους λύσεις για κάθε $a \neq 0$ ($a \in \mathbb{C}$)
5. Το πεδίο τιμών της e^z είναι το $\mathbb{C} - \{0\}$.
6. $e^{z+2\pi i} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$
7. Στη λωρίδα $-\pi < \text{Im}(z) \leq \pi$ η e^z είναι 1-1.
8. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
9. $(e^z)' = e^z$
10. Η εκθετική συνάρτηση μπορεί να οριστεί ως $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

3.4.2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Για να ορίσουμε τα $\sin z$ και $\cos z$ παρατηρούμε ότι για $y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

οπότε

$$\sin y = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) \quad \text{και} \quad \cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}).$$

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε ακέραιες επεκτάσεις των $\sin x$ και $\cos x$ θέτοντας

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \\ \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \end{aligned}$$

Ιδιότητες

1. $\cos' z = -\sin z$
2. $\sin' z = \cos z$
3. $\cos(-z) = \cos z, \cos(z + 2\pi) = \cos z, \cos(z + \pi) = -\cos z$

4. $\sin(-z) = -\sin z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\sin(z + \pi) = -\sin z$
5. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
6. $\cos z + i \sin z = e^{iz}$ (τύπος του Euler)
7. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
8. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
9. Αντίθετα με το $\sin x$ το $\sin z$ δεν φράσσεται κατ'απόλυτη τιμή από το 1.
π.χ. $|\sin(10i)| = \frac{1}{2}(e^{10} - e^{-10}) > 10000$ (!)
10. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
11. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (\kappa + \frac{1}{2})\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
12. Οι συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο ορίζονται και ως εξής:

$$\begin{aligned}\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται ως εξής:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

ενώ οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως εξής:

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

κ.ο.κ.

Η άλγεβρα και ο λογισμός αυτών των συναρτήσεων γίνεται με βάση τους προηγούμενους ορισμούς. Οι τύποι που αποδεικνύονται είναι ίδιοι με αυτούς που γνωρίζουμε για τις αντίστοιχες συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

3.4.3 Η Λογαριθμική Συνάρτηση

Έστω $\text{Log } r$ ο γνωστός φυσικός λογάριθμος ενός $r \in \mathbb{R}^+$, όπως ορίζεται στον απειροστικό λογισμό. Αν $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ και $r = |z|$, $\theta = \arg z$, ορίζουμε

$$\log z = \text{Log } r + i\theta.$$

Αυτή είναι μια πλειότιμη συνάρτηση. Αν θ_0 συμβολίζει την κύρια τιμή του $\arg z$ ($-\pi < \theta_0 \leq \pi$), τότε $\theta = \theta_0 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ και έτσι η αρχική εξίσωση γράφεται: $\log z = \text{Log } r + i(\theta_0 + 2n\pi)$. Αν τώρα θέσουμε $n = 0$ στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε την κύρια τιμή του λογαρίθμου $\text{Log } z = \text{Log } r + i\theta_0$, $r > 0$, $-\pi < \theta_0 \leq \pi$. Η απεικόνιση $w = \log z$ είναι μονότιμη με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C} - \{0\}$ και πεδίο τιμών το $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$. Προφανώς αν το πεδίο ορισμού περιοριστεί στο \mathbb{R}^+ , ο $\text{Log } z$ ανάγεται στο συνήθη φυσικό λογάριθμο.

Παρατήρηση 3.4.1 $w = \text{Log } z \Leftrightarrow z = e^w$

Μελετώντας τις συνιστώσες συναρτήσεις $\text{Log } r$ και θ_0 του $\text{Log } z$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $\{(r, \theta) : r > 0, \pi < \theta < \pi\}$ και ότι αυτό είναι το μέγιστο δυνατό σύνολο, όπου η $\text{Log } z$ είναι συνεχής. Επίσης παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\text{Log } z$ είναι αναλυτική στον παραπάνω τόπο. (Αυτό έπεται από τις συνθήκες C-R και πιο συγκεκριμένα από την πολική μορφή τους: $u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0)$, $\frac{1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0) = -v_r(r_0, \theta_0)$). Άμεσα προκύπτει η ιδιότητα

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}, \quad (|z| > 0, -\pi < \text{Arg } z < \pi).$$

Αν περιοριστούμε στο σύνολο $\{(r, \theta) : r > 0, a < \theta < a + 2\pi, a : \text{αυθαίρετος σταθερός αριθμός}\}$ η συνάρτηση $\log z = \text{Log } r + i\theta$ είναι μονότιμη και συνεχής. Αποδεικνύεται, όπως παραπάνω, ότι είναι αναλυτική και ότι

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, a < \arg z < a + 2\pi)$$

Ένας **κλάδος** μιας πλειότιμης συνάρτησης f είναι οποιαδήποτε μονότιμη συνάρτηση F που είναι αναλυτική σε κάποιον τόπο, σε κάθε σημείο z του οποίου η τιμή $F(z)$ είναι μια από τις τιμές $f(z)$. Ως προς αυτόν τον ορισμό, η συνάρτηση $\text{Log } z$ ορισμένη στον τόπο $\{(r, \theta) : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ συνιστά έναν κλάδο της $\log z$. Αυτός ο κλάδος λέγεται **κύριος κλάδος**. Η συνάρτηση $\log z$ είναι ένας άλλος κλάδος της ίδιας πλειότιμης συνάρτησης.

Ιδιότητες της $\log z$

1. $e^{\log z} = z$
2. $\log e^z = z + 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$
3. $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$
4. $\log\left(z^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log z, n \in \mathbb{N}$
5. $z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right), n \in \mathbb{N}$
6. $\log z^n \neq n \log z, n \in \mathbb{N}$

3.4.4 Οι συναρτήσεις z^λ , λ^z , $\lambda \in \mathbb{C}$

Ορισμός 3.4.1 $z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$

Η συνάρτηση z^λ είναι μονότιμη και αναλυτική στον τόπο $\{(r, \theta) : r > 0, a < \theta < a + 2\pi\}$. Η παράγωγος αυτού του κλάδου της z^λ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d}{dz} z^\lambda = \lambda z^{\lambda-1} \quad (|z| > 0, a < \arg z < a + 2\pi)$$

Όταν $a = -\pi$, δηλαδή $-\pi < \arg z < \pi$, η συνάρτηση z^λ λέγεται κύριος κλάδος της πλειότιμης συνάρτησης z^λ .

Ορισμός 3.4.2 $\lambda^z = \exp(z \log \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Όταν καθοριστεί μια τιμή της $\log \lambda$, η λ^z είναι ακέραια συνάρτηση του z . Εύκολα φαίνεται ότι

$$\frac{d}{dz} \lambda^z = \lambda^z \log \lambda, \quad \lambda \neq 0$$

Ισχύουν οι γνωστοί κανόνες άλγεβρας και λογισμού γι' αυτές τις συναρτήσεις. Τέλος, ισχύει

$$(1+z)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

$$\text{όπου } \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}.$$

3.4.5 Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Έστω $z = \sin w$. Τότε $w = \arcsin z$. Έχουμε

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$

όπου ως γνωστόν, η $(1 - z^2)^{1/2}$ είναι δίτιμη συνάρτηση του z . Παίρνοντας λογαρίθμους, έχουμε

$$w = \arcsin z = -i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}].$$

Η $\arcsin z$ είναι πλειότιμη συνάρτηση με άπειρου πλήθους τιμές σε κάθε z . Όταν προσδιοριστούν συγκεκριμένοι κλάδοι της τετραγωνικής ρίζας και του λογαρίθμου, η συνάρτηση αυτή γίνεται μονότιμη και αναλυτική (ως σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων). Ανάλογα ορίζονται οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \arccos z &= -i \log[z + i(1 - z^2)^{1/2}] \\ \arctan z &= \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z} \end{aligned}$$

Οι παράγωγοι αυτών των τριών συναρτήσεων, μπορούν να βρεθούν από τις παραπάνω σχέσεις. Οι παράγωγοι των δύο πρώτων εξαρτώνται από τις τιμές που έχουν επιλεγεί για την τετραγωνική ρίζα:

$$\frac{d}{dz} \arcsin z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}, \quad \frac{d}{dz} \arccos z = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

Αντίθετα, η παράγωγος της τρίτης

$$\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$$

δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται μονότιμη η συνάρτηση. Με αντίστοιχο, τέλος, τρόπο ορίζονται οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις. Προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsinh} z &= \log[z + (1+z^2)^{1/2}] \\ \operatorname{arccosh} z &= \log[z + (z^2-1)^{1/2}] \\ \operatorname{arctanh} z &= \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν στο \mathbb{C} οι εξισώσεις $e^z = 1 - i$, $e^z = -1 + i$.

Λύση

Ως γνωστόν $e^w = z \Rightarrow w = \log |z| + i \arg z$. Συνεπώς

$$(\alpha') \quad e^z = 1 - i \Rightarrow z = \log \sqrt{2} + i \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\beta') \quad e^z = -1 + i \Rightarrow z = \log \sqrt{2} + i \left(2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Ενώ $|\sin x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι η $\sin z$, $z \in \mathbb{C}$ δεν είναι φραγμένη.

Λύση

Πράγματι, έστω $z = x + iy$. Τότε

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \geq \frac{|e^{-iz}| - |e^{iz}|}{2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Έστω $z = iy$, $y \in \mathbb{R}^+$. Τότε αν $z \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \Rightarrow |\sin z| \rightarrow \infty$.

3. Να επιλυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση $\cos z = 2$.

Λύση

$$\cos z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Έστω $z = x + iy$. Τότε $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$. Άρα $e^{-y} \cos x = 2 \pm \sqrt{3}$ και $e^{-y} \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Από την $e^{-y} \cos x = 2 \pm \sqrt{3}$ έπεται ότι ο k πρέπει να είναι άρτιος, δηλαδή $k = 2m$, αφού $e^{-y} > 0$ και $2 \pm \sqrt{3} > 0$. Έτσι

$$e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow y = -\log(2 \pm \sqrt{3})$$

και συνεπώς (αφού $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$) έχουμε

$$z = 2m\pi - i \log(2 \pm \sqrt{3}) = 2m\pi \pm i \log(2 + \sqrt{3}), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

4. Να βρεθούν οι λογάριθμοι των $(-1 - i)(1 - i)$, $-1 - i$, $1 - i$.

Λύση

$$(\alpha') \log[(-1 - i)(1 - i)] = \log(-2) = \log 2 + \pi i + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(\beta') \log(-1 - i) = \log \sqrt{2} + \frac{5\pi}{4}i + 2m\pi i, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$(\gamma') \log(1 - i) = \log \sqrt{2} + \frac{7\pi}{4}i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Παρατηρούμε ότι $\log[(-1 - i)(1 - i)] = \log(-1 - i) + \log(1 - i) \pmod{2\pi i}$.

5. Να υπολογιστούν οι τιμές των $3^{1/2}$, $i^{1/2}$, i^i , $(-1)^{\sqrt{2}}$.

$$(\alpha') 3^{1/2} = e^{(1/2)\log 3} = e^{(1/2)(\log 3 + 2k\pi i)} = e^{(1/2)\log 3} e^{k\pi i} = \pm \sqrt{3}.$$

$$(\beta') i^{1/2} = e^{(1/2)\log i} = e^{(1/2)i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = \pm e^{\frac{\pi i}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

$$(\gamma') i^i = e^{i \log i} = e^{i(\log 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\Delta\eta\lambda. \text{ το } i^i \in \mathbb{R}).$$

$$(\delta') (-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log(-1)} = e^{\sqrt{2}(\log 1 + i(2k\pi + \pi))} = e^{\sqrt{2}i(2k\pi + \pi)} = \cos(\pi\sqrt{2} + 2k\pi\sqrt{2}) + i \sin(\pi\sqrt{2} + 2k\pi\sqrt{2})$$

6. $\log z^n \neq n \log z$. Βλέπουμε μερικά παραδείγματα.

$$(\alpha') z = i, \quad n = 2:$$

$$\log i^2 = \log(-1) = (2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ενώ } 2 \log i = (4k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(\beta') \text{Log}((1 + i)^2) = 2 \text{Log}(1 + i).$$

$$(\gamma') \text{Log}((-1 + i)^2) \neq 2 \text{Log}(-1 + i).$$

$$(\delta') \text{Αν } \log z = \text{Log } r + i\theta \quad (r > 0, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4}) \Rightarrow \log i^2 = 2 \log i.$$

$$(\epsilon') \text{Αν } \log z = \text{Log } r + i\theta \quad (r > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}) \Rightarrow \log i^2 \neq 2 \log i.$$

7. Έστω $A_{a_0} = \{z : a_0 \leq \text{Im}(z) < a_0 + 2\pi\}$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η e^z απεικονίζει το A_{a_0} 1-1 και επί του $\mathbb{C} - \{0\}$.

Λύση

Αν $e^{z_1} = e^{z_2}$, τότε $e^{z_1 - z_2} = 1 \Rightarrow z_1 - z_2 = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$. Εφ' όσον $z_1, z_2 \in A_{a_0}$, ισχύει $0 \leq \text{Im}(z_1 - z_2) < 2\pi$ και αφού $\text{Re}(z_1 - z_2) = 0$ θα έχουμε $z_1 = z_2$, δηλαδή η e^z είναι 1-1. Έστω τώρα $w \in \mathbb{C} - \{0\}$. Θεωρούμε την $e^z = w$ στο A_{a_0} . Τότε αν $z = x + iy$ και $w = u + iv$ έχουμε $e^z = w \Leftrightarrow e^{x+iy} = u + iv \Leftrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = u + iv \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cos y = u \\ e^x \sin y = v \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = u^2 + v^2 \\ \cos y + i \sin y = \frac{u+iv}{e^x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} e^x = \sqrt{u^2 + v^2} \\ e^{iy} = \frac{u+iv}{e^x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} e^x &= |w| \\ e^{iy} &= \frac{w}{|w|} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= \log |w| && \text{(συνήθης λογάριθμος): μια ακριβώς λύση.} \\ y &= \arg w && \text{στο } [a_0, a_0 + 2\pi] \text{ έχει ακριβώς μια λύση} \end{aligned}$$

Δηλαδή η e^z είναι επί του $\mathbb{C} - \{0\}$.

8. Η συνάρτηση $\text{Arg} z$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ και ασυνεχής στο \mathbb{R}^- . Ομοίως (φυσικά) και για την $\text{Log} z$

9. $f_1(z) = z^2$.

Ο z^2 έχει μήκος ίσο με $|z|^2$ και όρισμα $2 \arg z$. Δηλαδή η f_1 υψώνει στο τετράγωνο το μέτρο και διπλασιάζει το όρισμα.

10. $f_2(z) = \sqrt{z}$.

Έστω ότι έχουμε διαλέξει έναν κλάδο, χρησιμοποιώντας το $0 \leq \theta < 2\pi$. Τότε $z = re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ με $0 \leq \frac{\theta}{2} < \pi$, οπότε η \sqrt{z} βρίσκεται πάντα στο άνω ημιεπίπεδο και οι γωνίες υποδιπλασιάζονται. Η $f_2(z) = \sqrt{z}$ είναι η αντίστροφη της $f_1(z) = z^2$ όταν η τελευταία περιοριστεί σε περιοχή που είναι 1-1.

11. $f(z) = \sin z$.

Απεικονίζει ευθείες παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα σε ελλείψεις και ευθείες παράλληλες προς τον φανταστικό άξονα σε υπερβολές. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x + iy = \sin x \cos(iy) + \sin(iy) \cos x = \\ &= \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x, \end{aligned}$$

όπου $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, αφού ισχύει $\sin iy = \frac{e^{i^2 y} - e^{-i^2 y}}{2i} = i \frac{e^{-y} - e^y}{2} = i \sinh y$ και αντιστοίχως $\cos(iy) = \cosh y$. Έστω, λοιπόν, πρώτα $y = y_0$ (ευθεία παράλληλη με τον άξονα των πραγματικών). Τότε αν $\sin z = u + iv$, έχουμε λόγω των προηγούμενων σχέσεων

$$\left. \begin{aligned} u &= \sin x \cosh y_0 \Rightarrow \sin x = \frac{u}{\cosh y_0} \\ v &= \cos x \sinh y_0 \Rightarrow \cos x = \frac{v}{\sinh y_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1$$

που είναι έλλειψη στο uv επίπεδο.

Ομοίως, αν $x = x_0$ (ευθεία παράλληλη με τον άξονα των φανταστικών) βρίσκουμε (χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$) ότι $\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1$, που είναι υπερβολή.

Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωση

Το ολοκλήρωμα είναι εξαιρετικά σημαντικό στη μελέτη συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Η θεωρία ολοκλήρωσης διακρίνεται για τη μαθηματική της κομψότητα. Τα θεωρήματα είναι ισχυρότατα και οι πιο πολλές αποδείξεις είναι απλές. Η θεωρία ολοκλήρωσης είναι επιλέον ιδιαίτερα σημαντική για τη μεγάλη χρησιμότητά της στα εφαρμοσμένα μαθηματικά.

4.1 Ορισμένο ολοκλήρωμα

Προκειμένου να εισάγουμε το ολοκλήρωμα της $f(z)$ με έναν σχετικά απλό τρόπο, ορίζουμε αρχικά το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης F μιας πραγματικής μεταβλητής t . Έστω $F(t) = U(t) + iV(t)$, $t \in [a, b]$, όπου οι συναρτήσεις U και V είναι πραγματικές και κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις του t ορισμένες σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Λέμε τότε ότι η F είναι κατά τμήματα συνεχής και ορίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της F στο $[a, b]$ ως εξής:

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt.$$

οι συνθήκες που υποθέσαμε για τις U και V είναι ικανές για να εξασφαλίσουν την ύπαρξη των ολοκληρωμάτων τους. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα της F επί ενός μη φραγμένου διαστήματος ορίζεται ανάλογα και υπάρχει όταν συγκλίνουν και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα της U και της V . Η άλγεβρα και ο λογισμός των ορισμένων ολοκληρωμάτων ισχύουν ακριβώς όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις του t .

Θα δείξουμε μια βασική ιδιότητα:

$$\left| \int_a^b F(t)dt \right| = \int_a^b |F(t)|dt.$$

(η ίδια ιδιότητα ισχύει βέβαια και τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty}$) Έστω $\int_a^b F(t)dt = z \in \mathbb{C}$ και έστω $z = re^{i\theta}$. Τότε

$$r = \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt \Rightarrow r = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] dt$$

αφού $\operatorname{Re} \left[\int_a^b G(t) dt \right] = \int_a^b \operatorname{Re}[G(t)] dt$ και αφού η πρώτη σχέση είναι σχέση πραγματικών αριθμών. Όμως

$$\operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] \leq |e^{-i\theta} F(t)| = |e^{-i\theta}| |F(t)| = |F|,$$

οπότε

$$r < \int_a^b |f(t)| dt$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

4.2 Καμπύλες

Θα ασχοληθούμε με κλάσεις καμπυλών που μας χρειάζονται στη μελέτη ολοκληρωμάτων συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Καμπύλη C είναι ένα σύνολο σημείων $z = (x, y)$ του \mathbb{C} , τέτοιο ώστε $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$ όπου οι x και y είναι συνεχείς συναρτήσεις της πραγματικής παραμέτρου t . Περιγράφουμε τα σημεία της C με την εξίσωση $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ και αφού οι x, y είναι συνεχείς, είναι και η z . Η καμπύλη C λέγεται απλή καμπύλη ή καμπύλη Jordan αν δεν τέμνει τον εαυτό της (δηλαδή $z(t_1) \neq z(t_2)$ για $t_1 \neq t_2$). Μια καμπύλη που είναι απλή, εκτός από τα άκρα της όπου $z(a) = z(b)$, λέγεται απλή κλειστή καμπύλη ή καμπύλη Jordan. Αν οι x, y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t , η z είναι επίσης διαφορίσιμη συνάρτηση του t και έχουμε

$$z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} := x'(t) + iy'(t).$$

Μια καμπύλη λέγεται λεία, αν υπάρχει, είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[a, b]$ η $z'(t)$. Το μήκος μιας λείας καμπύλης εκφράζεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt, \quad (|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2})$$

και είναι αναλλοίωτο από μεταβολές της παραμετρικής αναπαράστασης της C της μορφής

$$t = \phi(s),$$

όπου $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ είναι επί, συνεχής έχει συνεχή παράγωγο και $\phi'(s) > 0$ για κάθε s . Κατά τμήματα λεία καμπύλη είναι μια καμπύλη που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος λείων καμπυλών που ενώνονται τα άκρα τους. Αν η $z(t) = x(t) + iy(t)$ παριστάνει μια κατά τμήματα λεία καμπύλη, οι x και y είναι συνεχείς, ενώ οι πρώτες παράγωγοί τους είναι κατά τμήματα συνεχείς. Το μήκος μιας κατά τμήματα λείας καμπύλης είναι το άθροισμα των μηκών των λείων καμπυλών που την αποτελούν.

Σε κάθε απλή κλειστή καμπύλη ή απλή κλειστή κατά τμήματα καμπύλη C αντιστοιχούν δύο σύνολα που κάθε ένα έχει ως σύνορο μόνο την C . Το ένα από αυτά που λέγεται εσωτερικό της C είναι φραγμένο, ενώ το άλλο (εξωτερικό) είναι μη φραγμένο. Η απόδειξη δεν είναι απλή και η πρόταση αυτή λέγεται θεώρημα καμπύλης Jordan.

4.3 Ολοκλήρωμα μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός 4.3.1 Έστω C κατά τμήματα λεία καμπύλη που δίνεται από την $z(t)$, $t \in [a, b]$. Έστω ότι η f είναι μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο C . Το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της C ορίζεται ως

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος της C δεν εξαρτάται μόνο από τα σημεία της C , αλλά και από τη διεύθυνση. Όμως δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη παραμετροποίηση.

Ορισμός 4.3.2 Οι δύο καμπύλες $C_1 : z(t)$, $t \in [a, b]$, $C_2 : w(t)$, $t \in [c, d]$ είναι **ομαλά ισοδύναμες** αν υπάρχει μια 1-1, C^1 απεικόνιση $\Psi(t) : [c, d] \rightarrow [a, b]$ τέτοια ώστε $\Psi(c) = a$, $\Psi(d) = b$ και $w(t) = z(\Psi(t))$.

Πρόταση 4.3.1 Αν οι C_1 και C_2 είναι ομαλά ισοδύναμες, τότε $\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$.

Ορισμός 4.3.3 Έστω ότι η καμπύλη C δίνεται από την $z(t)$, $t \in [a, b]$. Τότε η $-C$ ορίζεται από την $z(b + a - t)$, $t \in [a, b]$.

Πρόταση 4.3.2 $\int_{-C} f = -\int_C f$

Πρόταση 4.3.3 Έστω C λεία καμπύλη, f και g συνεχείς στην C και $a \in \mathbb{C}$. Τότε

- $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$
- $\int_C af(z)dz = a \int_C f(z)dz$

Πρόταση 4.3.4 Έστω C λεία καμπύλη μήκους L , f συνεχής στην C και $|f| \leq M$ στην C . Τότε

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML.$$

Πρόταση 4.3.5 Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα επί της λείας καμπύλης C . Τότε

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_C f_n(z)dz.$$

Η ακόλουθη γενίκευση του Θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού είναι πολύ σημαντική.

Πρόταση 4.3.6 Έστω F αναλυτική επί της λείας καμπύλης C και f η παράγωγος της F . Τότε

$$\int_C f(z) = F(z(b)) - F(z(a))$$

Παραδείγματα

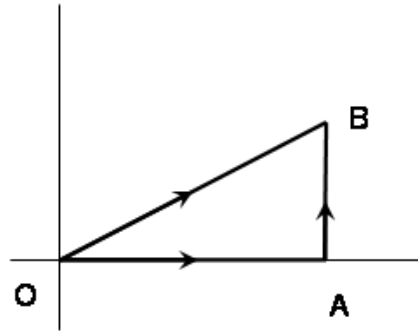
1. Να βρεθεί το $I_1 = \int_{C_1} z^2 dz$, όπου C_1 το ευθύγραμμο τμήμα OB από το $z = 0$ στο $z = 2 + i$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι τα σημεία της C_1 βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = 2y$. Αν, λοιπόν, η συντεταγμένη y θεωρηθεί ως παράμετρος, μια παραμετρική εξίσωση της C_1 είναι $z(y) = 2y + iy$.

Επί της C_1 , το z^2 γίνεται: $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = 3y^2 + i4y^2$. Οπότε $I_1 = \int_0^1 (3y^2 + i4y^2)(2 + i)dy = (3 + 4i)(z + i) \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$.

2. Να βρεθεί το $I_2 = \int_{C_2} z^2 dz$, όπου C_2 : το ευθύγραμμο τμήμα από την αρχή των αξόνων (O) μέχρι το A:(2,0) και από εκεί το ευθύγραμμο τμήμα μέχρι το B:(2,1), με θετικό προσανατολισμό (βλέπε σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Το τρίγωνο OAB.

Λύση

$I_2 = \int_{C_2} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz$. Μια παραμετρική αναπαράσταση του OA είναι

$$z(x) = x, \quad x \in [0, 2]$$

ενώ για το AB μπορούμε να γράψουμε

$$z(y) = 2 + iy, \quad y \in [0, 1].$$

Τότε $I_2 = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2 + iy)^2 i dy = \frac{8}{3} + i \left[\int_0^1 (4 - y^2) dy + 4i \int_0^1 y dy \right] = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$. Μια παραμετρική αναπαράσταση του OAB είναι η

$$z(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 2] \\ 2 + i(t - 2), & t \in [2, 3] \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $I_2 = I_1$ και συνεπώς $\int_C z^2 dz = 0$, όπου $C = OABO$, πράγμα που δεν είναι τυχαίο αλλά οφείλεται στο ότι η z^2 είναι αναλυτική στο εσωτερικό και επί της καμπύλης όπως θα δούμε αργότερα.

3. Να βρεθούν τα $I_3 = \int_{C_3} \bar{z} dz$ και $I_4 = \int_{C_4} \bar{z} dz$, όπου C_3 : το άνω ημικύκλιο του $|z| = 1$ (από $z = -1$ έως $z = 1$) και C_4 : το κάτω ημικύκλιο.

Λύση

Μια παραμετρική εξίσωση του $-C_3$ είναι η

$$z(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Συνεπώς $I_3 = \int_{C_3} \bar{z} dz = - \int_{-C_3} \bar{z} dz = - \int_0^\pi e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = -\pi i$. Αντίθετα μια παραμετρική εξίσωση του C_4 είναι η

$$z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi,$$

οπότε $I_4 = \int_{C_4} \bar{z} dz = \int_\pi^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = \pi i$. Παρατηρούμε ότι $I_3 \neq I_4$ και ακόμα ότι το ολοκλήρωμα $I_C = \int_C \bar{z} dz$, όπου C ολόκληρος ο κύκλος, δεν είναι 0: $I_C = I_4 - I_3 = 2\pi i$. Τέλος επί του C ισχύει ότι $|z| = 1$ οπότε $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$ και έτσι $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

4. Έστω C_5 το ευθύγραμμο τμήμα από το $z = i$ στο $z = 1$. Χωρίς να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_5 = \int_{C_5} \frac{dz}{z^4}$ να βρεθεί ένα άνω φράγμα της απόλυτης τιμής του.

Λύση

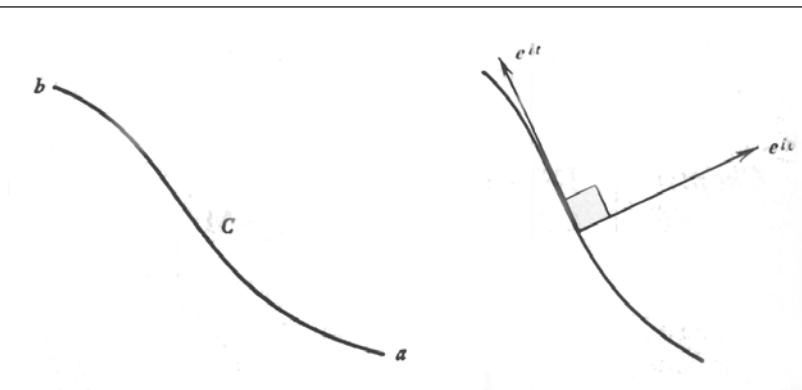
Το C_5 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = 1 - x$. Αν $z \in C_5$, έχουμε $|z^4| = (x^2 + y^2)^2 = (x^2 + (1 - x)^2)^2 = (2x^2 - 2x + 1)^2$, οπότε $|z^4| = \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$, αφού $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Συνεπώς, για κάθε $z \in C_5$: $\left|\frac{1}{z^4}\right| \leq 4$. Θέτουμε λοιπόν $M = 4$ στην πρόταση 4.3.4. Εξάλλου το μήκος L του C_5 είναι προφανώς $L = \sqrt{2}$. Τελικά παίρνουμε $|I_5| \leq 4\sqrt{2}$.

4.4 Το θεώρημα Cauchy-Goursat

4.4.1 Διαισθητική-Φυσική απόδειξη

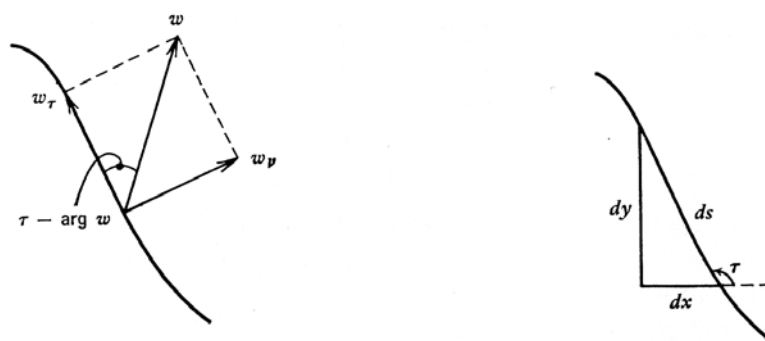
Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\bar{w} = u + iv$ που αντιστοιχεί σε τυχόν σημείο (x, y) ενός δισδιάστατου πεδίου. Θεωρούμε μια καμπύλη C σε αυτό το πεδίο. Αν θεωρήσουμε το \bar{w} ως δύναμη, μπορούμε να θεωρήσουμε την C ως “διαδρομή” κατά μήκος της οποίας κινείται ένα υλικό σημείο. Η διεύθυνση μιας τέτοιας κίνησης δίνεται από το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $e^{i\tau}$ όπου τ η γωνία μεταξύ της εφαπτόμενης και του θετικού ημιάξονα των x . Θεωρούμε θετική διεύθυνση την αντίθετη με αυτή της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, για κλειστές καμπύλες.

Αν θεωρήσουμε το \bar{w} ως πυκνότητα ρεύματος, είναι φυσικό να θεωρήσουμε την C ως το σύνορο διασχίζοντας το οποίο μπορεί να κινηθεί ένα υλικό σημείο. Για μια τέτοια κίνηση το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα $e^{i\nu}$ παίζει σημαντικό ρόλο. ν είναι η γωνία μεταξύ



Σχήμα 4.2:

της (εξωτερικής) καθέτου και του θετικού ημιάξονα των x . Θετική διεύθυνση είναι αυτή της εξωτερικής καθέτου για κλειστές καμπύλες. Συνεπώς $e^{i\tau} = ie^{i\nu} \Rightarrow \cos \tau = -\sin \nu$, $\sin \tau = \cos \nu$. Έστω w_τ , w_ν οι προβολές του \bar{w} επί της εφαπτόμενης και της καθέτου στην C , αντιστοίχως. Έστω ds το διαφορικό του τόξου της C στο σημείο z . Το ολικό έργο δίνεται από τη σχέση $\int_C w_\tau ds$, αν θεωρήσουμε το \bar{w} ως δύναμη που επιδρά επί του υλικού σημείου μεταφέροντας το από το ένα άκρο a της C στο άλλο b . Αν θεωρήσουμε το \bar{w} ως πυκνότητα ρεύματος, το συνολικό ποσό ύλης που περνάει κάθετα από την C ανά χρονική μονάδα, η ροή (flux), δίνεται από τη σχέση $\int_C w_\nu ds$. Από τη γεωμετρία του προβλήματος, έχουμε αφενός $w_\tau = \operatorname{Re}(\bar{w}e^{-i\tau}) = u \cos \tau + v \sin \tau$, $w_\nu = \operatorname{Re}(\bar{w}e^{-i\nu}) = u \cos \nu + v \sin \nu$ και αφ'ετέρου $\frac{dx}{ds} = \cos \tau$, $\frac{dy}{ds} = \sin \tau$, οπότε θέτοντας $dx + idy = dz$, τελικά έχουμε $\int_C w_\tau ds + i \int_C w_\nu ds = \int_C (u - iv)(dx + idy) = \int_C w dz$, ή αλλιώς $\int_C w dz = \text{έργο} + i \cdot \text{ροή}$.



Σχήμα 4.3:

Αν τώρα τα a και b συμπίπτουν (C : απλή κλειστή καμπύλη) και υποθέσουμε ότι η $w = f(z)$ είναι αναλυτική, τότε (όπως έχουμε δει) το πεδίο του \bar{w} είναι σωληνοειδές και αστρόβιλο,

συνέπως μηδενίζονται και το έργο και η ροή. Έχουμε λοιπόν τελικά ότι αν η $w = f(z)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του τόπου R που φράσσεται από την κλειστή καμπύλη C και επί της C , τότε:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

4.4.2 Το θεώρημα Cauchy

Έστω ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοι τους είναι συνεχείς σε έναν τόπο R που αποτελείται από τα σημεία που περιβάλλονται από μια απλή κλειστή καμπύλη C και επί της C . Θεωρούμε ότι η καμπύλη έχει θετική διεύθυνση. Από το θεώρημα Green έχουμε ότι

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_R (Q_x - P_y)dxdy.$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ που είναι αναλυτική στον R . Θεωρούμε επιπλέον ότι η $f'(z)$ είναι συνεχής στον \mathbb{R} . Τότε οι u και v , καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοί τους είναι επίσης συνεχείς στον \mathbb{R} . Έτσι:

$$\int_C udx - vdy = - \iint_R (v_x + u_y)dxdy$$

$$\int_C vdx + udy = \iint_R (u_x - v_y)dxdy.$$

Λόγω των συνθηκών Cauchy-Riemann και τα δύο διπλά ολοκληρώματα μηδενίζονται, οπότε $\int_C vdx + udy = \int_R (u_x - v_y)dxdy$. Όμως, αν $f = u + iv$, $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}dt = \\ &= \int_a^b (ux' - vy')dt + i \int_a^b (vx' + uy')dt = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy, \end{aligned}$$

πράγμα που σημαίνει ότι $\int_C f(z)dz = 0$. Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται θεώρημα Cauchy.

4.4.3 Το θεώρημα Cauchy-Goursat

Ο Goursat απέδειξε ότι η υπόθεση της συνέχειας της $f'(z)$ μπορεί να παραληφθεί. Η νέα μορφή του προηγούμενου θεωρήματος που προκύπτει έτσι είναι

Θεώρημα 4.4.1 Αν η f είναι αναλυτική στον R και επί της C , τότε $\int_C f(z)dz = 0$.

4.5 Απλά και Πολλαπλά Συνεκτικά Σύνολα

Ορισμός 4.5.1 Ένας τόπος D λέγεται **απλά συνεκτικός** αν δεν περιέχει τρύπες, αν δηλαδή είναι πάντα δυνατό δύο καμπύλες του D με κοινά άκρα να μετασχηματιστούν συνεχώς η μία στην άλλη, χωρίς κατά τον μετασχηματισμό η καμπύλη να βγαίνει έξω από τον D . Ένας μη απλά συνεκτικός τόπος λέγεται **πολλαπλά συνεκτικός**.

Παραδείγματα

- Το επίπεδο μείον τον πραγματικό άξονα δεν είναι απλά συνεκτικό, γιατί δεν είναι τόπος (μη συνεκτικό).
- Ο δακτύλιος $A = \{z : 1 < |z| < 3\}$ δεν είναι απλά συνεκτικός (βλέπε σχήμα 4.4).
- Ο μοναδιαίος δίσκος μείον τον θετικό πραγματικό άξονα είναι απλά συνεκτικός (βλέπε σχήμα 4.5).
- Η άπειρη λωρίδα $S = \{z : -1 < \text{Im } z < 1\}$ είναι απλά συνεκτική (βλέπε σχήμα 4.6).
- Κάθε ανοιχτό κυρτό σύνολο είναι απλά συνεκτικό.

Το θεώρημα Cauchy-Goursat μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 4.5.1 Αν η f είναι αναλυτική σε έναν απλά συνεκτικό τόπο D , τότε για κάθε απλή κλειστή καμπύλη C εντός του D ισχύει

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Προφανώς το “απλή κλειστή καμπύλη” μπορεί να αντικατασταθεί από το “τυχούσα κλειστή καμπύλη”. Εξάλλου το θεώρημα Cauchy-Goursat μπορεί να πάρει και την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 4.5.2 Έστω C απλή κλειστή καμπύλη και C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) απλές κλειστές καμπύλες μέσα στην C , έτσι ώστε τα εσωτερικά συνολα των C_j να μην έχουν κοινά σημεία. Έστω R το κλειστό σύνολο που αποτελείται από όλα τα σημεία μέσα και επί της C , εκτός από τα σημεία μέσα σε κάθε C_j . Έστω B το προσανατολισμένο σύνορο του R , που αποτελείται από την C και όλες τις C_j (διεύθυνση τέτοια ώστε τα σημεία του R να βρίσκονται αριστερά του B). Τότε, αν η f είναι αναλυτική στο R ,

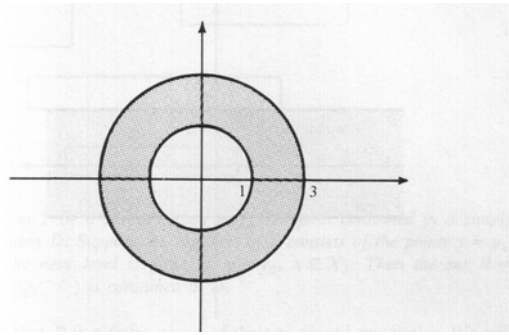
$$\int_B f(z)dz = 0$$

Παράδειγμα

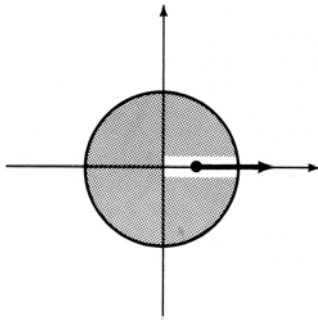
Αν B αποτελείται από τον κύκλο $|z| = 2$ με θετική διεύθυνση και τον κύκλο $|z| = 1$ με αρνητική διεύθυνση τότε

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0.$$

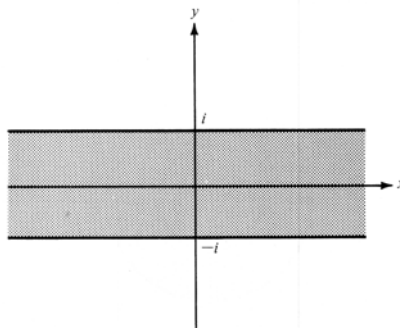
Η συνάρτηση $\frac{1}{z^2(z^2+9)}$ είναι αναλυτική, εκτός από τα σημεία $z = 0$, $z = \pm 3i$ που όμως δεν ανήκουν στο δακτύλιο με σύνορο B .



Σχήμα 4.4:



Σχήμα 4.5:



Σχήμα 4.6:

4.6 Το Αόριστο Ολοκλήρωμα

Έστω z_0 και z δύο αυθαίρετα σημεία ενός απλά συνεκτικού τόπου D , όπου η f είναι αναλυτική. Αν C_1 και C_2 είναι δύο καμπύλες που ενώνουν το z_0 με το z , κείμενες εξ' ολοκλήρου στον D , τότε η C_1 μαζί με την $-C_2$ συνιστούν μια κλειστή καμπύλη. Από το θεώρημα Cauchy-Goursat, έχουμε

$$\int_{C_1} f(s)ds - \int_{C_2} f(s)ds = 0,$$

όπου s συμβολίζει σημεία επί των C_1, C_2 . Το ολοκλήρωμα από το z_0 στο z , είναι συνεπώς ανεξάρτητο από την καμπύλη, με την προϋπόθεση ότι η καμπύλη βρίσκεται ολόκληρη μέσα στον D . Αυτό το ολοκλήρωμα ορίζει μια συνάρτηση F στον απλά συνεκτικό τόπο D ,

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s)ds.$$

Δείχνουμε ότι υπάρχει η παράγωγος της $F(z)$ και ισούται με $f(z)$. Έστω $z + \Delta z$ τυχόν σημείο, διάφορο του z , που βρίσκεται σε μια περιοχή του z που ανήκει πλήρως στον D . Τότε

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^z f(s)ds = \int_z^{z+\Delta z} f(s)ds$$

όπου ο δρόμος ολοκλήρωσης από το z στο $z + \Delta z$ μπορεί να εκλεγεί ως ευθύγραμμο τμήμα. Επειδή

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} ds = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)ds$$

έπεται ότι

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(s) - f(z))ds.$$

Όμως η f είναι συνεχής στο z και έτσι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(s) - f(z)| < \epsilon \text{ όταν } |s - z| < \delta.$$

Αν, λοιπόν, το $z + \Delta z$ είναι τόσο κοντά στο z ώστε $|\Delta z| < \delta$, τότε

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{\Delta z} \epsilon |\Delta z| = \epsilon.$$

Δηλαδή

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \Rightarrow F'(z) = f(z).$$

Η συνάρτηση $F(z)$ είναι ένα **αόριστο ολοκλήρωμα** (ή αντιπαράγωγος) της f και γράφεται

$$F(z) = \int f(z)dz.$$

Δηλαδή, η $F(z)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι $f(z)$.

Παρατήρηση 4.6.1 Αν $G(z)$ είναι μια άλλη αναλυτική συνάρτηση, τέτοια ώστε $G'(z) = f(z)$, τότε τα δύο αόριστα ολοκληρώματα $F(z)$ και $G(z)$ διαφέρουν το πολύ κατά μια μιγαδική σταθερά.

Πράγματι, έστω $H(z) = F(z) - G(z)$. Τότε $H'(z) = F'(z) - G'(z) = f(z) - f(z) = 0$. Αν, λοιπόν, $H(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, έπεται ότι $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 0$ και συνεπώς και η $u_x(x, y)$ και η $v_x(x, y)$ είναι μηδέν στον τόπο όπου και η F και η G είναι αναλυτικές. Από τις συνθήκες Cauchy-Riemann έπεται ότι και η $u_y(x, y)$ και η $v_y(x, y)$ μηδενίζονται. Έτσι η $u(x, y)$ και η $v(x, y)$ είναι σταθερές, δηλαδή $H(z) = \tilde{c} \Rightarrow F(z) = G(z) + \tilde{c}$.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το $\int_{-1}^1 z^{1/2} dz$, όπου $z^{1/2} = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2}$, $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ και η καμπύλη που ενώνει τα δύο άκρα ολοκλήρωσης κείται πάνω από τον πραγματικό άξονα στο επίπεδο z . Η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική στα σημεία της ακτίνας $\theta = 0$, ειδικότερα στο $z = 1$. Όμως ένας άλλος κλάδος,

$$f(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2}, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

της πλειοτιμής συνάρτησης $z^{1/2}$ είναι αναλυτικός παντού εκτός από τα σημεία της ακτίνας $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Οι τιμές της $f(z)$ πάνω από τον πραγματικό άξονα, συμπίπτουν με εκείνες του πρώτου κλάδου $\sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2}$, $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ και έτσι η ολοκληρωτέα συνάρτηση μπορεί να αντικατασταθεί από την $f(z)$. Τώρα ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι η

$$\frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r^{3/2} \exp \frac{i3\theta}{2}, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

κι έτσι

$$\int_{-1}^1 z^{1/2} dz = \frac{2}{3} (e^0 - e^{3i\pi/2}) = \frac{2}{3} (1 + i).$$

Το ολοκλήρωμα που υπολογίσαμε, κατά μήκος μιας καμπύλης κάτω από τον πραγματικό άξονα έχει άλλη τιμή. Εδώ αντικαθιστούμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση με την $g(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2}$, $r > 0$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$. Η αναλυτική συνάρτηση $\frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r^{3/2} \exp \frac{i3\theta}{2}$, $r > 0$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$, είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $g(z)$. Έτσι

$$\int_{-1}^1 z^{1/2} dz = \frac{2}{3} (e^{i3\pi} - e^{\frac{i3\pi}{2}}) = \frac{2}{3} (-1 + i).$$

4.7 Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

Θα αναφέρουμε τώρα ένα άλλο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.7.1 Έστω ότι η f είναι αναλυτική παντού επί και εντός μιας απλής κλειστής καμπύλης C (με θετικό προσανατολισμό). Αν z_0 είναι τυχόν σημείο στο εσωτερικό της C , τότε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Ο παραπάνω λέγεται ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy και λέει πως αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική επί και εντός μιας απλής κλειστής καμπύλης C , τότε οι κύριες τιμές της f εντός της C προσδιορίζονται πλήρως από τις τιμές της f επί της C .

Θεώρημα 4.7.2 Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Πόρισμα 4.7.1 Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ένα σημείο, τότε υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης της f και είναι αναλυτικές στο ίδιο σημείο.

Πόρισμα 4.7.2 Η σχέση του θεωρήματος 4.7.1 μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που η απλή κλειστή καμπύλη C αντικατασταθεί από το “το προσανατολισμένο σύνορο ενός πολλαπλώς συνεκτικού τόπου”.

Πόρισμα 4.7.3 (Εκτιμήσεις Cauchy). Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 4.7.1. Αν $|f(z)| \leq M(r)$ στον κύκλο $|z - z_0| = r$ και $a_n := \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, τότε $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

4.8 Το θεώρημα του Green

Έστω $P(x, y)$, $Q(x, y)$ συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους σε έναν πολλαπλά συνεκτικό τόπο D και έστω C το σύνορό του. Τότε

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Παρατήρηση 4.8.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $\int_C Pdx + Qdy = 0$ είναι η $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ για C το σύνορο ενός πολλαπλά συνεκτικού τόπου.

Μιγαδική μορφή του θεωρήματος Green.

Έστω η συνάρτηση $B(z, \bar{z})$ συνεχής με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους σε έναν τόπο R με σύνορο C . Τότε

$$\int_C B(z, \bar{z})dz = 2i \int_R \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} dxdy$$

(όπου $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$).

4.9 Ασκήσεις

1. Έστω C μια απλή κλειστή καμπύλη. Αποδείξτε ότι:

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 0, & z_0 \text{ εκτός της } C \\ 2\pi i, & z_0 \text{ εντός της } C \end{cases}$$

Λύση.

Αν το z_0 είναι εκτός της C τότε η $\frac{1}{z-z_0}$ είναι αναλυτική επί και εντός της C . Άρα από το θεώρημα Cauchy θα ισχύει $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 0$. Αν το z_0 είναι εντός της C τότε υπάρχει δίσκος κέντρου z_0 και ακτίνας ϵ (συνόρου Γ) εφόσον το z_0 είναι εσωτερικό σημείο. Γνωρίζουμε ότι $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$. Επί της Γ έχουμε $|z-z_0| = \epsilon \Rightarrow z-z_0 = \epsilon e^{i\theta} \Rightarrow z = z_0 + \epsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Έτσι $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$, οπότε

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

2. Αν C είναι το τμήμα της $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ που συνδέει τα σημεία $(1,1)$ και $(2,3)$ να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz.$$

Λύση.

Το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Άρα:

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) dz = [4z^3 - 2iz^2]_{1+i}^{2+3i} = -156 + 38i.$$

Κεφάλαιο 5

Άλλες ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων

Θεώρημα 5.0.1 (Θεώρημα Liouville). Αν μια ακέραια συνάρτηση είναι φραγμένη ($|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$) τότε είναι σταθερή.

Θεώρημα 5.0.2 (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας). Κάθε πολυώνυμο (με πραγματικούς συντελεστές) με βαθμό μεγαλύτερο του μηδενός έχει ρίζα στο \mathbb{C} .

Παρατήρηση 5.0.1 Κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει ακριβώς n ρίζες (ενδεχομένως ίσες).

Θεώρημα 5.0.3 (Θεώρημα Μέσης Τιμής). Αν η f είναι αναλυτική στον τόπο D και $z_0 \in D$, τότε το $f(z_0)$ ισούται με τη μέση τιμή της f επί του συνόρου τυχόντος δίσκου με κέντρο z_0 που περιέχεται στο D . Δηλαδή

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Παρατήρηση 5.0.2 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής αποτελεί αναδιατύπωση του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy.

Θεώρημα 5.0.4 (Αρχή του Μεγίστου). Μια μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση σε έναν τόπο D , δεν έχει εσωτερικά σημεία μεγίστου. Δηλαδή

$$\forall z \in D, \text{ και } \delta > 0, \exists w \in S(z, \delta) \cap D : |f(w)| > |f(z)|.$$

Θεώρημα 5.0.5 (Αρχή του Ελαχίστου). Αν f είναι μια μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση σε έναν τόπο D , τότε κανένα σημείο $z \in D$ δεν μπορεί να είναι σχετικό ελάχιστο της f , εκτός και αν $f(z) = 0$.

Θυμίζουμε ότι στον απειροστικό λογισμό, τα σημεία σχετικού μεγίστου αναζητούνται ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία (εκείνα όπου $f' = 0$) μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f . Η παρακάτω πρόταση δίνει μια ουσιαστική αντίθεση στη συμπεριφορά μιας αναλυτικής συνάρτησης σε ένα σημείο που παίρνει μέγιστο.

Πρόταση 5.0.1 (Erdos). Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε έναν κλειστό δίσκο που παίρνει το μέγιστό της σε ένα συνοριακό σημείο z_0 . Τότε $f'(z_0) \neq 0$, εκτός και αν η f είναι σταθερή.

Θεώρημα 5.0.6 (Ανοιχτής Απεικόνισης). Η εικόνα ενός ανοιχτού και συνεκτικού συνόλου μέσω μιας μη σταθερής αναλυτικής απεικόνισης είναι ανοιχτό σύνολο.

Προχωρούμε τώρα στο αντίστροφο του θεωρήματος Cauchy.

Θεώρημα 5.0.7 (Θεώρημα Morera). Έστω f συνεχής σε έναν τόπο D , με την ιδιότητα $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ για κάθε απλή κλειστή καμπύλη Γ που με το εσωτερικό της περιέχεται στον D . Τότε η f είναι αναλυτική στον D .

Πόρισμα 5.0.1 Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων σε ένα ανοιχτό χωρίο D , τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του D . Τότε η f είναι αναλυτική στο D .

Θεώρημα 5.0.8 (Αρχή ανάκλασης του Schwarz). Αν η f είναι αναλυτική στο $T = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, η f είναι συνεχής στο T και αν $f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ τότε η f επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση.

Κεφάλαιο 6

Αναλυτική Συνέχιση

Όπως γνωρίζουμε κάθε αναλυτική συνάρτηση στο $z = a$ μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \quad |z-a| < R$$

και κάθε τέτοια συγκλίνουσα δυναμοσειρά, αναπαριστά μια αναλυτική συνάρτηση «κοντά» στο $z = a$.

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της $f(z)$ έξω από τον δίσκο $|z-a| < R$, αν η f είναι αναλυτική σε ευρύτερη περιοχή;

Παράδειγμα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \quad \left(= \frac{1}{1-z} \right)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Taylor για την $f(z)$ περί ένα νέο κέντρο $z = z_0, |z_0| < 1$. Έστω $z_0 = -\frac{1}{2}$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

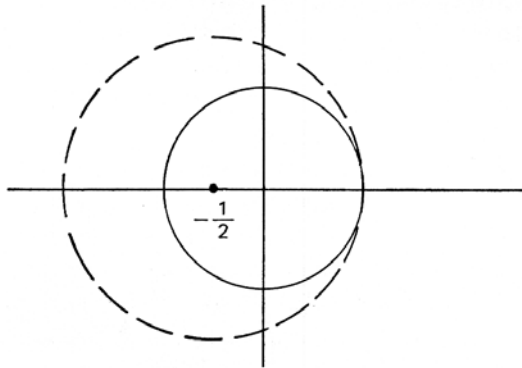
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}$$

⋮

$$f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = n! \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Τώρα παίρνουμε (βλέπε σχήμα 6.1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \quad \left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$$



Σχήμα 6.1:

Εξ' άλλου – ως αναμένουμε – έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\left(z + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{3 - 2z - 1} = \frac{1}{1 - z}$$

Έχουμε επεκτείνει αναλυτικώς την $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$ και σε σημεία εκτός του αρχικού δίσκου σύγκλισης.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και τελικά η $f(z)$ επεκτείνεται αναλυτικά σ' όλο το \mathbb{C} εκτός του $z = 1$.

Δεν είναι σαφές ότι η f που παίρνουμε έτσι είναι μονότιμη κοντά στο $z = 1$.

Θεωρούμε μια διαδρομή με σημεία που περικλείει το $z = 1$, «αποφεύγοντάς» το, ως εξής:

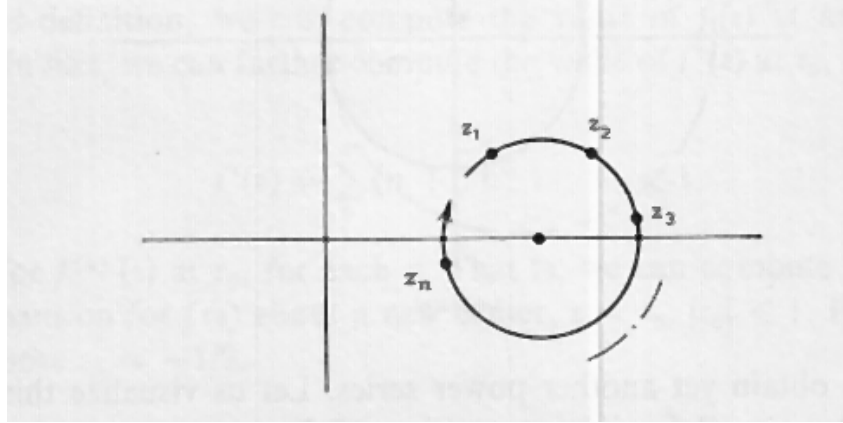
Υπολογίζουμε τη δυναμοσειρά περί το z_1 επί της διαδρομής αυτής, συνεχίζουμε στο z_2 επί της διαδρομής και εντός του δίσκου στο z_1 , κ.ο.κ., μέχρι να επιστρέψουμε σε μια περιοχή του z_1 μ' ένα δίσκο κέντρου z_n επί της διαδρομής (βλέπε σχήμα 6.2).

Η συνάρτησή μας θα είναι μονότιμη τότε και μόνον τότε αν οι τιμές συνέχισης του $f(z)$ ταυτίζονται με τις δεδομένες τιμές της $f(z)$. Είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι όλες οι πιθανές συνεχίσεις «επισυνάπτονται» στον ορισμό της $f(z)$.

Έτσι, π.χ. η συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1$$

αναπαριστά για $|z| < 1$ τη μονότιμη αναλυτική συνάρτηση $\log(1+z)$ που έχει την τιμή 0 στο $z = 0$, δηλαδή την κύρια τιμή του λογαρίθμου. Εντούτοις υπάρχουν άπειρες διαφορετικές



Σχήμα 6.2:

συνεχίσεις (περί το $z = -1$), που κάθε μια διαφέρει από τη δεδομένη κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi i$.

Θεωρούμε την ολότητα των συναρτησιακών τιμών να αναπαριστούν την αναλυτική συνάρτηση.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 6.0.9 Έστω $f(z)$, $g(z)$ αναλυτικές συναρτήσεις, ώστε $f(z) = g(z)$ σε ένα χωρίο D όπου είναι και οι δύο αναλυτικές. Τότε ισχύει $f(z) \equiv g(z)$ παντού όπου ορίζονται.

Πόρισμα 6.0.2 Έστω $\{z_n\}$ ακολουθία ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^*$. Έστω ότι $f(z_n) = g(z_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι οι $f(z)$, $g(z)$ είναι αναλυτικές στο z^* . Τότε $f(z) \equiv g(z)$ παντού.

Παραδείγματα

1. Επανερχόμαστε στην $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$.

Γνωρίζουμε ότι $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$ και η $f_1(z)$ δεν ορίζεται για $|z| \geq 1$.

Τώρα η συνάρτηση $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| \neq 1$ είναι αναλυτική παντού εκτός του $z = 1$.

Εφ' όσον $f_2(z) = f_1(z)$, $\forall z \in \{z : |z| < 1\}$, η $f_2(z)$ είναι η μόνη δυνατή αναλυτική συνέχιση της $f_1(z)$.

2. Αν έχουμε τις πληροφορίες ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει και αναπαριστά μια αναλυτική συνάρτηση του z όταν $|z| < 1$ και ότι το άθροισμα της είναι $\frac{1}{1-x}$ όταν $z = x$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το άθροισμα της είναι $\frac{1}{1-z}$ για $|z| < 1$.

Αυτό έπεται από το ότι η $\frac{1}{1-z}$ είναι η αναλυτική συνάρτηση που ορίζεται στο $\{z : |z| < 1\}$ και που παίρνει την τιμή $\frac{1}{1-x}$ κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που τέμνει ο $\{z : |z| < 1\}$ τον x -άξονα.

3. Να δείξετε ότι η $f(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt$ είναι αναλυτική στο $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Να βρείτε αναλυτική συνέχιση της $f(z)$ στο $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

(i)

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^3 e^{-zt} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^3 \left(\frac{e^{-zt}}{-z} \right)' dt = \text{παραγοντική ολοκλήρωση} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \left\{ t^3 \frac{e^{-zt}}{-z} - 3t^2 \frac{e^{-zt}}{z^2} + 6t \frac{e^{-zt}}{z^3} - 6 \frac{e^{-zt}}{z^4} \right\} \Big|_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{6}{z^4} - \frac{M^3 e^{-Mz}}{z} - \frac{3M^2 e^{-Mz}}{z^2} - \frac{6M e^{-Mz}}{z^3} - \frac{6e^{-Mz}}{z^4} \right\} \\ &= \frac{6}{z^4} \end{aligned}$$

(ii) Για $\operatorname{Re} z > 0$, $\int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt = \frac{6}{z^4}$, για $\operatorname{Re} z$.

Η συνάρτηση $g(z) = \frac{6}{z^4}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{0\}$.

Επειδή $f(z) = g(z)$ για $\operatorname{Re} z > 0$, η $g(z)$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

4. Ω τόπος στο \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ αναλυτική. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Η f επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = 0$

5. Ω τόπος στο \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$, $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ αναλυτικές.

Τότε

$$F' = f \Leftrightarrow F^{(n+1)}(z_0) = f^{(n)}(z_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

6. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις με $f' = f$

Έστω $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ αναλυτική.

Τότε $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, όπου $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Εάν $f' = f$, επαγωγικά έχουμε $\forall n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) = f^{(n)}(0) &\Rightarrow (n+1)! a_{n+1} = n! a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \\ &\Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} = \frac{a_0}{n!} = \frac{f(0)}{n!} \end{aligned}$$

Άρα $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_0}{n!} z^n = a_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} = a_0 e^z = f(0) e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Συνεπώς όλες οι ακέραιες συναρτήσεις με $f' = f$ είναι της μορφής

$$f(z) = f(0)e^z.$$

Θεώρημα 6.0.10 (Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης) Έστω f συνεχής σ' ένα ανοιχτό σύνολο D . Έστω ότι είναι αναλυτική εκεί με ενδεχόμενη εξαίρεση στα σημεία ενός ευθυγράμμου τμήματος L . Τότε η f είναι αναλυτική σ' ολόκληρο το D .

Κεφάλαιο 7

Μεμονωμένες Ανωμαλίες Αναλυτικών Συναρτήσεων

7.1 1. Κατάταξη Μεμονωμένων Ανωμαλιών – Αρχή του Riemann – Θεώρημα Casorati – Weierstrass

Ενώ ως τώρα είχαμε συγκεντρώσει την προσοχή μας στις γενικές ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων, θα ασχοληθούμε στο εξής με την ειδική συμπεριφορά μια αναλυτικής συνάρτησης στην περιοχή μιας «μεμονωμένης ανωμαλίας».

Ορισμός 7.1.1 Η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 αν η f είναι αναλυτική σε μια περιοχή D της μορφής $\{z : 0 < |z - z_0| < d\}$ του z_0 , αλλά δεν είναι αναλυτική στο z_0 .

Παρατήρηση 7.1.1 Λόγω του Θεωρήματος 6.0.10, παραπάνω, η f θα είναι ασυνεχής σε μια μεμονωμένη ανωμαλία.

Παραδείγματα

1. $f(z) = \begin{cases} \sin z, & z \neq 2 \\ 0, & z = 2 \end{cases}$. Έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο $z = 2$.
2. $g(z) = \frac{1}{z-3}$. Έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο $z = 3$.
3. $h(z) = \exp \frac{1}{z}$. Έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο $z = 0$.

Τα παραδείγματα αυτά αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τύπους μεμονωμένων ανωμαλιών, που κατατάσσονται ως εξής:

Ορισμός 7.1.2 Έστω ότι η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 .

1. Αν υπάρχει αναλυτική στο z_0 συνάρτηση g , τέτοια ώστε $f(z) = g(z)$ για κάθε z σε μια περιοχή σαν την D του ορισμού (7.1.1), λέμε ότι η f έχει επουσιώδη (αφόρμενη) ανωμαλία στο z_0 , (δηλαδή αν η τιμή της f «διορθωθεί» στο z_0 , γίνεται αναλυτική και εκεί).
2. Αν, για $z \neq z_0$, η f μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, όπου οι A και B είναι αναλυτικές στο z_0 , με $A(z_0) \neq 0$ και $B(z_0) = 0$, λέμε ότι η f έχει πόλο στο z_0 .
Αν η B έχει το z_0 ως μηδενικό σημείο πολλαπλότητας k , λέμε ότι η f έχει πόλο τάξης k στο z_0 .
3. Αν η f δεν έχει ούτε επουσιώδη ανωμαλία, ούτε πόλο στο z_0 , λέμε ότι η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο z_0 .

Τα ακόλουθα θεωρήματα δείχνουν πώς η φύση της ανωμαλίας που έχει μια συνάρτηση, μπορεί να προσδιοριστεί από τη συμπεριφορά της σε μια περιοχή, σαν την D , της ανωμαλίας.

Θεώρημα 7.1.1 (Η Αρχή του Riemann για Επουσιώδεις Ανωμαλίες) Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 και αν

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

τότε η ανωμαλία είναι επουσιώδης.

Πόρισμα 7.1.1 Αν η f είναι φραγμένη σε μια περιοχή, όπως η D παραπάνω, μιας μεμονωμένης ανωμαλίας, η ανωμαλία είναι επουσιώδης.

Θεώρημα 7.1.2 Αν η f είναι αναλυτική σε μια περιοχή, όπως η D παραπάνω, του z_0 και αν υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0 \quad \text{αλλά} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$$

τότε η f έχει πόλο τάξης k στο z_0 .

Παρατηρήσεις

1. Δεν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση που να τείνει στο ∞ , όπως μια κλασματική δύναμη της $\frac{1}{z-z_0}$ στην περιοχή μιας μεμονωμένης ανωμαλίας του z_0 **Π.χ.** Αν η f ήταν αναλυτική σε μια περιοχή του θ και ικανοποιούσε την $|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$, επειδή η ανωμαλία θα ήταν επουσιώδης η f θα έπρεπε να είναι φραγμένη.
2. Σε μια περιοχή μιας ουσιώδους ανωμαλίας, μια συνάρτηση f δεν είναι μόνο μη φραγμένη, αλλά τέτοια ώστε για κάθε ακέραιο N η $(z - z_0)^N f(z)$ δεν τείνει στο θ όταν $z \rightarrow z_0$.
Εντούτοις, δε σημαίνει ότι $f(z) \rightarrow \infty$, όταν $z \rightarrow z_0$. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το σύνολο τιμών που παίρνει μια συνάρτηση στην περιοχή μιας ουσιώδους ανωμαλίας είναι «πυκνό» στο μιγαδικό επίπεδο, μ' άλλα λόγια το πεδίο τιμών της f τέμνει κάθε δίσκο του \mathbb{C} .

Θεώρημα 7.1.3 (Casorati – Weierstrass) Αν η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο z_0 και αν η D είναι μια περιοχή του z_0 τότε το $R = \{f(z) : z \in D\}$ είναι πυκνό το \mathbb{C} .

7.1.1 Ανάπτυγμα Laurent

Γνωρίζουμε ότι οι αναλυτικές συναρτήσεις σ' ένα δίσκο, μπορούν να αναπαρασταθούν εκεί με δυναμοσειρές. Μια ανάλογη αναπαράσταση, της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

μπορεί να γίνει για αναλυτικές συναρτήσεις στο δακτύλιο $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Οι τέτοιες αναπαραστάσεις είναι γνωστές ως ανάπτυγματα Laurent και είναι πολύ χρήσιμα εργαλεία στη μελέτη μεμονωμένων ανωμαλιών.

Ορισμός 7.1.3 Λέμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k = L$ αν συγκλίνουν και η $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ και το άθροισμα των ορίων τους είναι L .

Θεώρημα 7.1.4 Η $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ είναι συγκλίνουσα στο $D = \{z : R_1 < |z| \text{ και } |z| < R_2\}$, όπου

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}, \quad R_1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{-k}|^{\frac{1}{k}}.$$

Αν $R_1 < R_2$, το D είναι δακτύλιος και η f είναι αναλυτική στο D .

Θεώρημα 7.1.5 Αν η f είναι αναλυτική στο δακτύλιο $A : R_1 < |z| < R_2$, τότε η f έχει ανάπτυγμα Laurent, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ στον A .

Παρατήρηση: Το ανάπτυγμα Laurent είναι μοναδικό.

Πόρισμα 7.1.2 Αν η f είναι αναλυτική στο δακτύλιο $R_1 < |z - z_0| < R_2$, τότε έχει μοναδικό ανάπτυγμα

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \text{ με } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

και $C = C(z_0; R)$ με $R_1 < R < R_2$.

Πόρισμα 7.1.3 Αν η f έχει μενομωμένη ανωμαλία στο z_0 , τότε για $\delta > 0$ και $0 < |z - z_0| < \delta$, έχουμε

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

όπου $C = C(z_0; R)$ με $0 < R < \delta$.

Ορισμός 7.1.4 Αν $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ είναι το ανάπτυγμα Laurent της f , ως προς μια μεμονωμένη ανωμαλία z_0 , το $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k$ λέγεται κύριο μέρος της f στο z_0 ενώ το $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ λέγεται αναλυτικό μέρος.

Από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος Laurent, μπορούν να βρεθούν οι χαρακτηρισμοί των κύριων μερών ως προς τα διάφορα είδη ανωμαλιών.

Πρόταση 7.1.1

- (i) Αν η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0 , τότε $a_{-k} = 0, \forall k > 0$.
- (ii) Αν η f έχει πόλο τάξης k στο z_0 , τότε $a_{-k} \neq 0, \& a_{-N} = 0 \forall k > 0$.
- (iii) Αν η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο z_0 , το κύριο μέρος της έχει απείρου πλήθους μη μηδενικούς όρους.

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 7.1.6 (Ανάλυση Ρητών Συναρτήσεων σε Απλά Κλάσματα) Κάθε γνήσια ρητή συνάρτηση $\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_n)^{k_n}}$, όπου P, Q πολυώνυμα με $\deg P < \deg Q$, μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμα πολυωνύμων ως προς $\frac{1}{z-z_k}, k = 1, 2, \dots, n$, δηλαδή

$$\mathcal{R}(z) = \sum_{k=1}^n P_k \left(\frac{1}{z-z_k} \right).$$

Κεφάλαιο 8

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

8.1 Δείκτης Στροφής και το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων του Cauchy

Στόχος μας είναι η γενίκευση του Θεωρήματος Cauchy – Goursat για συναρτήσεις που έχουν μεμονωμένες ανωμαλίες.

Παρατηρούμε ότι αν γ είναι ένας κύκλος που περικλείει μια μεμονωμένη ανωμαλία z_0 και αν $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ σε μια περιοχή $D = \{z : 0 < |z - z_0| < d\}$ του z_0 που περιέχει τη γ τότε

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i c_{-1}$$

Έτσι, βλέπουμε πως ο συντελεστής c_{-1} έχει ιδιαίτερη σημασία.

Ορισμός 8.1.1 Αν $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, σε μια περιοχή όπως η D του z_0 , το c_{-1} λέγεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 . Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $c_{-1} = \text{Res}(f; z_0)$.

Πρόταση 8.1.1 (Υπολογισμός Ολοκληρωτικών Υπολοίπων)

1. Αν η f έχει απλό πόλο στο z_0 , τότε

$$c_{-1} = \text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}$$

2. Αν η f έχει πόλο τάξης k στο z_0 , τότε

$$c_{-1} = \text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] \Big|_{z=z_0}.$$

Παρατήρηση: Στις περισσότερες περιπτώσεις πόλων μεγαλύτερης τάξης από 1, καθώς και για τις ουσιώδεις ανωμαλίες, ο βολικότερος τρόπος προσδιορισμού του ολοκληρωτικού υπολοίπου είναι κατευθείαν από το ανάπτυγμα Laurent.

Παραδείγματα:

1. $Res(\operatorname{cosec} z; 0) = \frac{1}{\cos 0} = 1$
2. $Res\left(\frac{1}{z^4-1}; i\right) = \frac{1}{4i^3} = \frac{i}{4}$
3. $Res\left(\frac{1}{z^3}; 0\right) = 0$
4. $Res\left(\sin \frac{1}{z-1}; 1\right) = 1$, αφού $\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} - \frac{1}{5!(z-1)^5} - \dots$

Δείκτης Στροφής

Ορισμός 8.1.2 Έστω γ κλειστή καμπύλη και $\zeta \notin \gamma$. Τότε

$$Ind_{\gamma}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \zeta}$$

Παρατηρήσεις:

1. Αν ο γ είναι ένας κύκλος (θετικά προσανατολισμένος), τότε

$$Ind_{\gamma}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \text{ στο εσωτερικό του δίσκου} \\ 0, & \zeta \text{ στο εξωτερικό του δίσκου} \end{cases}.$$

2. Αν ο γ περιστρέφεται περί το ζ k φορές, δηλαδή αν $\gamma(\theta) = \zeta + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2k\pi$ τότε $Ind_{\gamma}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2k\pi} i d\theta = k$, γεγονός που δικαιολογεί τον όρο «δείκτης στροφής».

Θεώρημα 8.1.1 Για κάθε κλειστή καμπύλη γ και $\zeta \notin \gamma$, ο $Ind_{\gamma}(\zeta)$ είναι ακέραιος.

Παρατηρήσεις:

1. Από τον Ορισμό (8.1.2) έπεται ότι αν σταθεροποιήσουμε τη γ και αφήσουμε το ζ να μεταβάλλεται, ο $Ind_{\gamma}(\zeta)$ είναι συνεχής συνάρτηση του ζ (εφόσον $\zeta \notin \gamma$). Αφού το $Ind_{\gamma}(\zeta)$ είναι πάντοτε ακέραιος, συμπεραίνουμε ότι είναι σταθερός στις συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος της γ . Επιπλέον $Ind_{\gamma}(\zeta) \rightarrow 0$ όταν $\zeta \rightarrow \infty$. Συνεπώς στη μη φραγμένη συνιστώσα του συμπληρώματος της γ (δηλαδή στο σύνολο των σημείων που μπορούν να ενωθούν με το ∞ χωρίς να τμηθεί η γ) $Ind_{\gamma}(\zeta) = 0$.
2. Γενικώς, όταν ασχολούμαστε με κλειστές καμπύλες, θα είμαστε σε θέση να διαπιστώσουμε απ' ευθείας ότι

$$Ind_{\gamma}(\zeta) = 0 \text{ ή } \pm 1, \forall \zeta \notin \gamma.$$

Ορισμός 8.1.3 Η γ λέγεται κανονική κλειστή καμπύλη, αν η γ είναι απλή κλειστή καμπύλη με $Ind_{\gamma}(\zeta) = 0$ ή $1 \forall \zeta \notin \gamma$. Σ' αυτή την περίπτωση ονομάζουμε εσωτερικό της γ το σύνολο $\{\zeta : Ind_{\gamma}(\zeta) = 1\}$. Εξωτερικό της γ , λέγεται το σύνολο $\{\zeta : Ind_{\gamma}(\zeta) = 0\}$.

Θεώρημα 8.1.2 (Ολοκληρωτικών Υπολοίπων του Cauchy) Έστω f αναλυτική, σ' έναν απλά συνεκτικό τόπο D , εκτός από τις μεμονωμένες ανωμαλίες στα σημεία z_1, \dots, z_m . Έστω γ κλειστή καμπύλη που δεν περιέχει καμία από τις ανωμαλίες. Τότε

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Ind}_{\gamma}(\zeta_k) \text{Res}(f; z_k)$$

Πόρισμα 8.1.1 Αν η f είναι όπως στο Θεώρημα και η γ είναι κανονική κλειστή καμπύλη στο πεδίο αναλυτικότητας της f , τότε

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f; z_k)$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται επί όλων των ανωμαλιών της f μέσα στη γ .

8.1.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Ορισμός 8.1.4 Λέμε ότι η f είναι μερόμορφη σ' ένα πεδίο D αν είναι αναλυτική εκεί, εκτός από ένα πλήθος σημείων που έχει πόλους.

Θεώρημα 8.1.3 Έστω γ κανονική κλειστή καμπύλη. Αν f είναι μερόμορφη εντός και επί της γ και δεν έχει μηδενικά σημεία ούτε πόλους επί της γ και αν θέσουμε $P =$ πλήθος ριζών της f εντός της γ (μια ρίζα τάξης k μετριάται k φορές) και $\Pi =$ πλήθος πόλων της f εντός της γ (επίσης λαμβάνεται υπ' όψιν η πολλαπλότητα), τότε

$$P - \Pi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{f'}$$

Πόρισμα 8.1.2 (Αρχή του Ορίσματος) Αν f είναι αναλυτική εντός και επί μιας κανονικής κλειστής καμπύλης γ (και δε μηδενίζεται επί της γ), τότε

$$(\text{πλήθος ριζών της } f \text{ εντός της } \gamma :=) P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{f'}$$

Παρατήρηση: Το παραπάνω λέγεται « Αρχή του Ορίσματος», γιατί αν η γ δίνεται από τη $z(t)$, $t \in [0, 1]$, τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{f'} = \log f(z(1)) - \log f(z(0)) = \frac{1}{2\pi} \Delta \text{Arg} f(z)$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε το $\int_{\gamma} \frac{f}{f'}$ ως το δείκτη στροφής της καμπύλης $f(\gamma(z))$ γύρω από το $z = 0$. Αυτή η οπτική γωνία, μας οδηγεί σε μια απλή απόδειξη του ακόλουθου σημαντικού θεωρήματος:

Θεώρημα 8.1.4 (Rouché) Έστω f και g αναλυτικές εντός και επί μιας κανονικής κλειστής καμπύλης γ και έστω ακόμα ότι $|f(z)| > |g(z)| \forall z \in \gamma$. Τότε

$$P(f+g) = P(f) \text{ εντός της } \gamma.$$

Παραδείγματα

1. Αφού $|4z^2| > |2z^{10} + 1|$ επί του $|z| = 1$, καθ' ένα από τα πολυώνυμα

$$2z^{10} + 4z^2 + 1 \text{ και } 2z^{10} - 4z^2 + 1$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στον $|z| < 1$.

2. Ο αριθμός των ριζών του πολυωνύμου $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ στην ανοιχτή μοναδιαία σφαίρα $S(0; 1)$ είναι 5.

Πράγματι, θέτοντας $f(z) = \frac{1}{4}z^8 + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}$, έχουμε επί του $|z| = 1$ ότι $|f(z)| < 1 = |z^5|$.

Θεώρημα 8.1.5 (Hurwitz) Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη μηδενικών αναλυτικών συναρτήσεων σ' έναν τόπο D , και ότι ότι η $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του D . Τότε είτε $f \equiv 0$ στο D , ή $f(z) \neq 0 \forall z \in D$.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να έχουμε $f \equiv 0$ παρόλο που $\forall n : f_n(z) \neq 0$.

Π.χ. $f_n(z) = \frac{1}{n}e^z$.

Θεώρημα 8.1.6 Έστω $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του D . Αν η f_n είναι 1-1 στον D για κάθε n , τότε είτε η f είναι σταθερή, ή η f είναι 1-1 στον D .

8.2 Εφαρμογές του θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων του Cauchy στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και σειρών

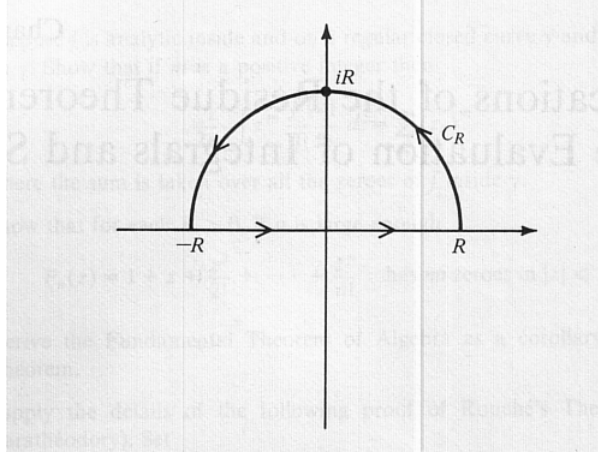
8.2.1 Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων

(A) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, P, Q πολυώνυμα

Είναι γνωστό πως ένα τέτοιο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν $Q(x) \neq 0$ και $\deg Q - \deg P \geq 2$. Κάτω απ' αυτές τις προϋποθέσεις

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα για μεγάλα R . Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη C_R του σχήματος, με ακτίνα R τόσο μεγάλη ώστε να περικλείει όλες τις ρίζες του Q που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο.



Σχήμα 8.1:

Έχουμε ότι: $\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right)$, z_k ρίζες του Q στο άνω ημιεπίπεδο, οπότε $\int_{-R}^R \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right)$
Αφού $\deg Q - \deg P \geq 2$, έχουμε

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{P}{Q} \right| \leq \pi R \frac{A}{R^2} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Τελικά

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right)$$

Παράδειγμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Οι πόλοι της $\frac{dz}{1+z^4}$ στο άνω ημιεπίπεδο είναι οι $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ και $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

$$\text{Συνεπώς } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}; z_k\right).$$

Επειδή και οι δύο πόλοι είναι απλοί, τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα δίνονται από τις τιμές της $\frac{1}{4z^3}$ στους πόλους:

$$\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}; z_1\right) = \frac{1}{4z_1^3} = -\frac{z_1}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

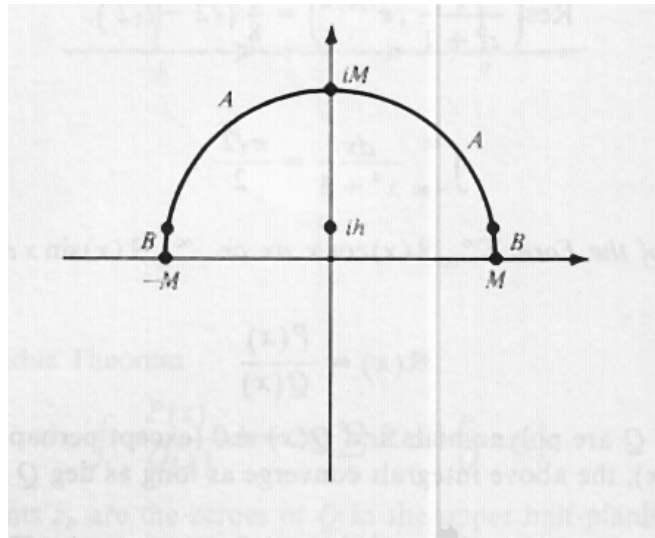
$$\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}; z_2\right) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

Έτσι: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

(B) $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x dx$, $R = \frac{P}{Q}$, P, Q πολυώνυμα.

Αν $Q(x) \neq 0$ και αν $\deg Q > \deg P$ τα ολοκληρώματα συγκλίνουν.

Εδώ δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε την $R(z) \cos z$ κατά μήκος της ίδιας κλειστής καμπύλης με την περίπτωση (A), αφού $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_M} R(z) \cos z dz \neq 0$ όπου Γ_M το ημικύκλιο του σχήματος 8.2.



Σχήμα 8.2:

Έστω C_M το ημικύκλιο Γ_M μαζί με το ευθύγραμμο τμήμα $[-M, M]$. Αν θεωρήσουμε το $\int_{C_M} R(z)e^{iz} dz$ θα δείξουμε ότι $\int_{\Gamma_M} R(z)e^{iz} dz \rightarrow 0$, οπότε $\int_{C_M} R(z)e^{iz} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx$. Θα έχουμε συνεπώς τελικά ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(R(z)e^{iz}; z_k) \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(R(z)e^{iz}; z_k) \right\},$$

όπου z_k οι πόλοι της $R(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Για να δείξουμε ότι $\int_{\Gamma_M} R(z)e^{iz} dz \rightarrow 0$, σπάμε το Γ_M σε δύο υποσύνολα:

$$A = \{z \in \Gamma_M : \text{Im}z \geq h\}, B = \{z \in \Gamma_M : \text{Im}z < h\}.$$

Όμως

$$\left| \int_A R(z)e^{iz} dz \right| \leq \frac{K}{M} e^{-h} \pi M = c_1 e^{-h}$$

και

$$\left| \int_B R(z)e^{iz} dz \right| \leq \frac{K}{M} 4h = c_2 \frac{h}{M},$$

οπότε $\left| \int_{\Gamma_M} R(z)e^{iz} dz \right| \leq c_1 e^{-h} + c_2 \frac{h}{M}.$

Αν εκλέξουμε το $h = \sqrt{M}$, παίρνουμε

$$\left| \int_{\Gamma_M} R(z)e^{iz} dz \right| \leq c_1 e^{-\sqrt{M}} + \frac{c_2}{\sqrt{M}} \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_M} R(z)e^{iz} dz = 0.$$

Παραδείγματα

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right\}$. Η $\frac{e^{ix}}{x}$ έχει πόλο στο 0 κι έτσι πρέπει να τροποποιήσουμε την τεχνική μας: Έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-1}{x} dx \right\}$.

Παρατηρούμε ότι $\int_{c_M} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int_{-M}^M \frac{e^{ix}-1}{x} dx + \int_{\Gamma_M} \frac{e^{iz}-1}{z} dz$

Όμως $\int_{c_M} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = 0$ αφού η $\frac{e^{iz}-1}{z}$ δεν έχει πόλους! Έτσι,

$$\int_{-M}^M \frac{e^{ix}-1}{x} dx = \int_{\Gamma_M} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int_{\Gamma_M} \frac{dz}{z} - \int_{\Gamma_M} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i - \int_{\Gamma_M} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Όμως $\int_{\Gamma_M} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$, όταν $M \rightarrow \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-1}{x} dx = \pi i \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx \right\}.$$

Η $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ έχει πόλους τάξης 2 στα σημεία $z = \pm 1$. Απ' αυτά μόνο το $z = 1$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Θεωρούμε $M > 1$.

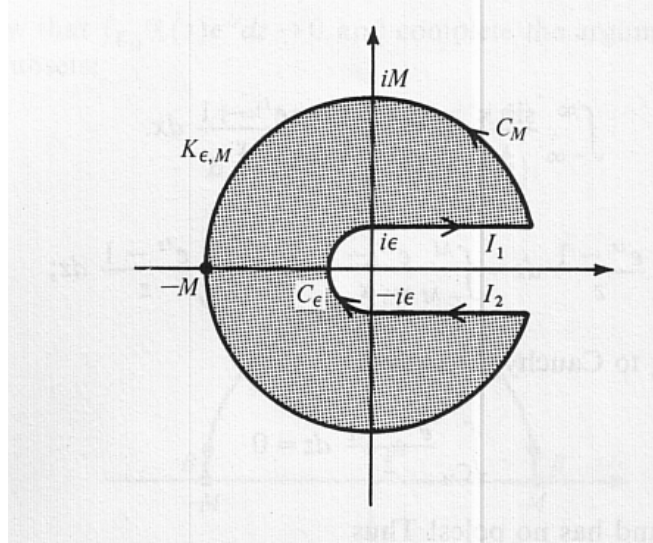
$$\text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}; i \right) = \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \right) \Big|_{z=i} = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \right) \Big|_{z=i} = -\frac{i}{2e}.$$

$$\text{Συνεπώς } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \text{Re} \left\{ 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}; i \right) \right\} = \frac{\pi}{e}$$

(Γ) $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, P, Q πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$ για $x \geq 0$ και $\deg Q - \deg P \geq 2$.

(Αν $-β$ βεβαια - η $\frac{P}{Q}$ είναι άρτια, τότε $\int_0^{\infty} \frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P}{Q}$).

Θέτουμε $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ και θεωρούμε το ολοκλήρωμα της $\log z \cdot R(z)$ στην κλειστή καμπύλη $K_{\epsilon, M}$ που αποτελείται από



Σχήμα 8.3:

- (α) το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα I_1 από το $i\epsilon$ ως το $i\epsilon + \sqrt{M^2 - \epsilon^2}$
 (β) το τόξο C_M κύκλου ακτίνας M που διατρέχεται με θετικό προσανατολισμό από το $\sqrt{M^2 - \epsilon^2} + i\epsilon$ ως το $\sqrt{M^2 - \epsilon^2} - i\epsilon$.
 (γ) το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα I_2 από το $\sqrt{M^2 - \epsilon^2} - i\epsilon$ ως το $-i\epsilon$.
 (δ) το ημικύκλιο C_ϵ ακτίνας ϵ , κατά αρνητικό προσανατολισμό από $-i\epsilon$ ως $i\epsilon$

Το εσωτερικό της $K_{\epsilon, M}$ είναι απλά συνεκτικός τόπος που δεν περιέχει το 0 και συνεπώς ο $\log z$ ορίζεται εκεί ως αναλυτική συνάρτηση (για λόγους απλότητας θεωρούμε $0 < \text{Arg} z < 2\pi$).

Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων έχουμε:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty} \int_{K_{\epsilon, M}} R(z) \log z dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(R(z) \log z; z_k) \quad (8.1)$$

όπου το ϵ έχει επιλεγεί τόσο μικρό και το M τόσο μεγάλο, ώστε οι ρίζες του Q να βρίσκονται όλες στο εσωτερικό της $K_{\epsilon, M}$.

Τότε

$$(α) \left| \int_{C_\epsilon} R(z) \log z dz \right| \leq \pi \epsilon \cdot \max_{C_\epsilon} |\log z| |R(z)| \leq A \epsilon |\log \epsilon|$$

αφού η R είναι συνεχής στο 0 και $|\log z| < \log |z| + 2\pi$.
 Συνεπώς $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} R(z) \log z dz = 0$

$$(\beta) \left| \int_{C_M} R(z) \log z dz \right| \leq 2\pi M \cdot \max_{C_M} |\log z| |R(z)| \leq AM \frac{\log M}{M^2}$$

αφού $|R(z)| \leq \frac{B}{|z|^2}$ και έτσι $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{C_M} R(z) \log z dz = 0$

$$(\gamma) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty} \int_{I_1} R(z) \log z dz = \int_0^\infty R(x) \log x dx$$

$$(\delta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty} \int_{I_2} R(z) \log z dz = - \int_0^\infty R(x) (\log x + 2\pi i) dx$$

Από τα (α), (β), (γ) και (δ) παίρνουμε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty} \int_{I_2} R(z) \log z dz = -2\pi i \int_0^\infty R(x) dx$$

και λόγω της (8.1):

$$\int_0^\infty R(x) dx = - \sum_k \operatorname{Res}(R(z) \log z; z_k)$$

όπου το k διατρέχει το πλήθος των πόλων της R .

Παράδειγμα

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

Οι (απλοί) πόλοι της $R(z) = \frac{dz}{1+z^3}$ είναι $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = -1 = e^{i\pi}$, $z_3 = e^{i5\pi/3}$

Έχουμε

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{1+z^3}; z_1\right) = \left. \frac{\log z}{3z^2} \right|_{z=z_1} = -\frac{i\pi}{9} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{1+z^3}; z_2\right) = \frac{i\pi}{3}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{1+z^3}; z_3\right) = -\frac{5i\pi}{9} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

οπότε

$$\sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{1+z^3}; z_k\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

και έτσι

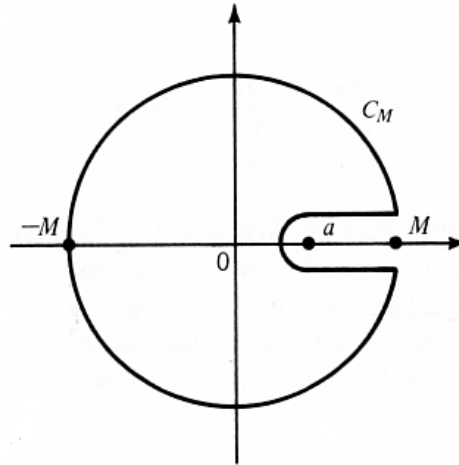
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

Παρατήρηση 1

Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

μπορούν, ομοίως, να υπολογιστούν με το να θεωρηθεί το $\int_{C_M} \log(z-1) \frac{P(z)}{Q(z)} dz$



Σχήμα 8.4:

Παρατήρηση 2

Ανάλογα γίνεται και ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{P(x)} dx$$

με $0 < a < 1$ και P πολυώνυμο με $\deg P \geq 1$.

Στο εσωτερικό της καμπύλης $K_{\epsilon, M}$ έχουμε $z^{a-1} = \exp\{(a-1)\log z\}$ και (με $0 < \arg z < 2\pi$, π.χ.) η συνάρτηση αυτή μπορεί να οριστεί ως αναλυτική.

Όπως πριν, στο δύο κυκλικά τμήματα, τα ολοκληρώματα τείνουν στο μηδέν και έτσι αρκεί να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα επί των I_1, I_2 .

Επί του I_1 : $z^{a-1} = e^{(a-1)\log x} = x^{a-1}$,

ενώ επί του I_2 : $z^{a-1} = e^{(a-1)(\log x + 2\pi i)} = x^{a-1} e^{2\pi i(a-1)}$

Έτσι $\{1 - e^{2\pi i(a-1)}\} \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{P(x)} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{P(z)}; z_k\right)$

Παράδειγμα

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Πόλος της $P(z) = 1+z$ το -1 .

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}; -1\right) = \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{i} = -i$$

Οπότε

$$(1 - e^{-\pi i}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\pi,$$

δηλαδή

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

(Δ) Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$, όπου R ρητή συνάρτηση.

Σ' αυτή την περίπτωση, θεωρούμε το πραγματικό ολοκλήρωμα ως παραμετρική αναπαράσταση ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος επί του μοναδιαίου κύκλου.

Ας θυμηθούμε, ότι, θέτοντας $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, έχουμε

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R \left[\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right] \frac{dz}{iz}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα, μπορεί – όπως γνωρίζουμε – να υπολογιστεί με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων.

Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} &= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} = \\ &= 4\pi \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 4z + 1}; \sqrt{3} - 2 \right) = \\ &= 4\pi \frac{1}{z^2 + 4z + 1} \Big|_{z=\sqrt{3}-2} = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta}$$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$dz = 3e^{i\theta} d\theta = iz d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{5+3\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)} = \int_C \frac{2dz}{3z^2+10iz-3}$$

όπου $C = C(0; 1)$, η περιφέρεια του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα 1.

Η $\frac{2}{3z^2+10iz-3}$ έχει πόλους τις ρίζες της $3z^2 + 10iz - 3$ δηλαδή τα $-\frac{1}{3}i$, $-3i$.

Μόνο το $-\frac{1}{3}i$ βρίσκεται εντός της C .

Το υπόλοιπο στο $z_1 = -\frac{1}{3}i$ είναι:

$$\lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{2}{3z^2 + 10iz - 3} = \dots = \frac{1}{4i}.$$

Συνεπώς

$$\int_C \frac{2dz}{3z^2 + 10iz - 3} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

- (E) Οι προηγούμενες τεχνικές μπορούν να επεκταθούν για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους πόλους της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης.

Παράδειγμα

$$\int_I \frac{e^z dz}{(z+2)^3}, \quad I: z(t) = 1 + it, \quad -\infty < t < \infty$$

Έστω C_R το αριστερό ημικύκλιο κέντρου $z = 1$ και ακτίνας $R > 3$.

Τότε

$$\int_{1-iR}^{1+iR} \frac{e^z dz}{(z+2)^3} + \int_{C_R} \frac{e^z dz}{(z+2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z dz}{(z+2)^3}; -2\right).$$

Στο ημιεπίπεδο $x \leq 1$, $|e^z| \leq e$ και έτσι όταν $R \rightarrow \infty$

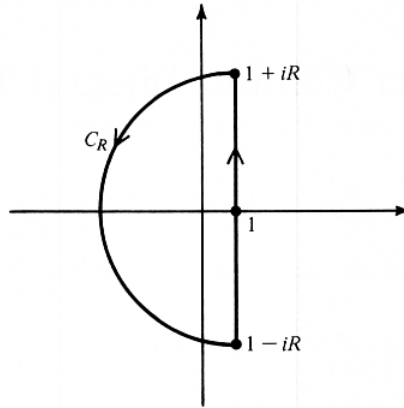
$$\int_{C_R} \frac{e^z dz}{(z+2)^3} \rightarrow 0,$$

οπότε

$$\int_I \frac{e^z dz}{(z+2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z dz}{(z+2)^3}; -2\right).$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου παρατηρούμε ότι

$$e^z = e^{-2} e^{z+2} = e^{-2} \left(1 + (z+2) + \frac{(z+2)^2}{2} + \dots \right),$$



Σχήμα 8.5:

οπότε

$$\text{Res}\left(\frac{e^z dz}{(z+2)^3}; -2\right) = "c_{-1}" = \frac{1}{2e^2}$$

και έτσι

$$\int_I \frac{e^z dz}{(z+2)^3} = \frac{\pi i}{e^2}$$

8.2.2 Υπολογισμός Ορίων Σειρών

(A)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

Αναζητούμε μια συνάρτηση g που να έχει ως ολοκληρωτικά υπόλοιπα τα $\{f(n) : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Έστω $g(z) = f(z)\phi(z)$. Η ϕ θα πρέπει να έχει έναν απλό πόλο με ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1 σε κάθε ακέραιο. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η

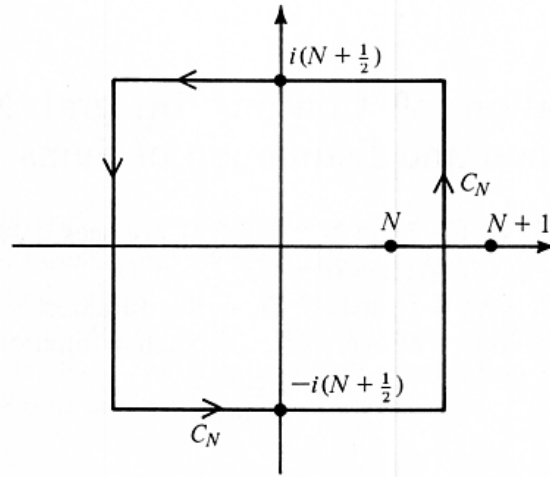
$$\phi(z) = \pi \cdot \cot \pi z$$

αφού η $\sin \pi z$ έχει απλό πόλο σε κάθε ακέραιο και $\text{Res}(\pi \cot \pi z; n) = \frac{\pi \cot \pi z}{\sin \pi z} \Big|_{z=n} = 1$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων στο ολοκλήρωμα

$$\int_{C_N} f(z) \pi \cot \pi z dz$$

όπου C_N μια απλή κλειστή καμπύλη που περιέχει τους ακέραιους $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ και τους πόλους (έστω z_k της f (που υποθέτουμε ότι είναι πεπερασμένου πλήθους.)



Σχήμα 8.6:

Τότε

$$\int_{C_N} f(z) \pi \cot \pi z dz \stackrel{(*)}{=} 2\pi i \left\{ \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq z_k}}^N f(n) + \sum_k \text{Res}(f(z) \pi \cot \pi z; z_k) \right\}.$$

Υποθέτοντας ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

και εκλέγοντας ως C_N το τετράγωνο με κορυφές $\pm \left(N + \frac{1}{2}\right) \pm \left(N + \frac{1}{2}\right)i$ είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} f(z) \pi \cot \pi z dz = 0$. Συνεπώς

$$\sum_{\substack{n=-N \\ n \neq z_k}}^N f(n) = - \sum_k \text{Res}(f(z) \pi \cot \pi z; z_k)$$

(*): Πράγματι:

$$\text{Res}(f(z) \pi \cot \pi z; n) = \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \pi \cot \pi z f(z) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\sin \pi z} \cos \pi z f(z) = f(n)$$

(de l' Hospital).

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res} \left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}; 0 \right).$$

Το ανάπτυγμα Laurent της $\cot z$ είναι $\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \dots$

οπότε $\frac{\pi \cot \pi z}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z^2} - \frac{\pi^4 z}{45} - \dots$.

Συνεπώς $\operatorname{Res} \left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}; 0 \right) = -\frac{\pi^2}{3}$ και έτσι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(B)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

Δουλεύουμε στο ίδιο τετράγωνο όπως προηγουμένως, με τη βοηθητική συνάρτηση $\frac{\pi}{\sin \pi z} f(z)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}; 0 \right) = \frac{1}{\cos \pi n} = (-1)^n.$$

Έτσι έχουμε

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq z_k}}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_k \operatorname{Res} \left(\frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}; z_k \right)$$

όπου z_k οι, πεπερασμένου πλήθους, πόλοι της f .

Παράδειγμα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}, \quad a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

Έστω $f(z) = \frac{1}{n+a^2}$. Έχει διπλό πόλο στο $z = a$. Τότε

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z(z+a)^2}; -a\right) &= \lim_{z \rightarrow -a} \frac{d}{dz} \left\{ (z+a)^2 \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z(z+a)^2} \right\} \\ &= -\frac{\pi^2 \cot \pi a}{\sin \pi a} = -\frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}. \end{aligned}$$

Έτσι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}.$$

(Γ) Παρατήρηση Αφού το $\binom{n}{k}$ είναι ο συντελεστής του z^k στο ανάπτυγμα της $(1+z)^n$, έχουμε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz$$

όπου C τυχούσα απλή κλειστή καμπύλη που περιβάλλει το μηδέν. Αυτό το γεγονός επιτρέπει τον υπολογισμό των ορίων σειρών με διωνυμικούς συντελεστές.

Κεφάλαιο 9

Σύμμορφη Απεικόνιση

Σ' αυτό το κεφάλαιο όλες οι καμπύλες $z(t)$ θεωρούνται ότι είναι τέτοιες, ώστε $z'(t) \neq 0$ για όλα τα t .

Ορισμός 9.0.1 Έστω ότι δύο λείες καμπύλες C_1 και C_2 τέμνονται στο z_0 . Η γωνία από τη C_1 στη C_2 στο z_0 ορίζεται ως η γωνία από την εφαπτομένη της C_1 στο z_0 ως την εφαπτομένη της C_2 στο z_0 κατά την αντίθετη από της κίνησης των δεικτών του ρολογιού φορά.

Ορισμός 9.0.2 Έστω f μια C^1 απεικόνιση που ορίζεται σε μια περιοχή του z_0 . Η f λέγεται σύμμορφη στο z_0 αν διατηρεί γωνίες σ' αυτό το σημείο τόσο κατά μέτρο όσο και κατά προσανατολισμό. Με άλλα λόγια αν για κάθε ζευγάρι λείων καμπύλων C_1 και C_2 που τέμνονται στο z_0 : $\sphericalangle(C_1, C_2) = \sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2)$ όπου $\Gamma_1 = f(C_1), \Gamma_2 = f(C_2)$.

Αν η f είναι σύμμορφη σ' όλα τα σημεία ενός συνόλου D , η f λέγεται σύμμορφη στο D .

Ορισμός 9.0.3

(α) Η f είναι τοπικά 1 – 1 στο z_0 , αν για $\delta > 0$ και $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D(z_0; \delta)$, έχουμε ότι $f(z_1) \neq f(z_2)$.

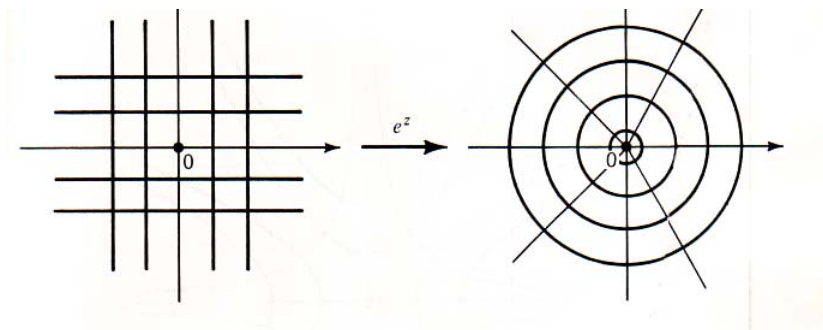
(γ) Η f είναι τοπικά 1 – 1 στο D αν είναι τοπικά 1 – 1 σε κάθε σημείο του D .

(β) Η f είναι 1 – 1 στο D αν για κάθε διαφορετικά z_1, z_2 στο D έχουμε $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Θεώρημα 9.0.1 Έστω f αναλυτική στο z_0 και $f'(z) \neq 0$. Τότε η f είναι σύμμορφη και τοπικά 1 – 1 στο z_0 .

Παραδείγματα

1. Η $f(z) = e^z$ είναι παντού σύμμορφη και τοπικά 1-1 (δεν είναι ολικά 1-1 αφού $f(z+2\pi i) = f(z)$). Μπορεί να αποδειχθεί ότι η e^z απεικονίζει τις κατακόρυφες γραμμές $x = \text{σταθ.}$ επί κύκλων με κέντρο το O και τις οριζόντιες γραμμές $y = \text{σταθ.}$ επί ακτίνων (που διέρχονται από το O) (Σχήμα 9.1).



Σχήμα 9.1:

2. Η $f(z) = z^2$ είναι σύμμορφη εκτός από το $z = 0$ (Σχήμα 9.2).

Ορισμός 9.0.4 Έστω $k \in \mathbb{N}$. Η f λέγεται k προς 1 απεικόνιση του D_1 επί του D_2 , αν για κάθε $a \in D_2$, η εξίσωση $f(z) = a$ έχει k ρίζες (λαμβανομένης υπ' όψιν της πολλαπλότητας) στο D_1 .

Λήμμα 9.0.1 Έστω $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε η f μεγεθύνει τις γωνίες στο 0 με παράγοντα k και απεικονίζει το δίσκο $D(0; \delta)$, $\delta > 0$ επί του δίσκου $d(0; \delta^k)$, με k προς 1 τρόπο.

Το Θεώρημα (9.0.1) συμπληρώνεται ως εξής:

Θεώρημα 9.0.2 Έστω f αναλυτική στο z_0 και $f'(z) = 0$. Τότε είτε η f είναι σταθερή, ή σε κάποιο ικανοποιητικά μικρό ανοιχτό σύνολο που περιέχει το z_0 , η f είναι k προς 1 απεικόνιση και μεγεθύνει τις γωνίες στο z_0 με παράγοντα k , όπου k ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίον ισχύει ότι $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Μπορούμε έτσι να πάρουμε το ακόλουθο

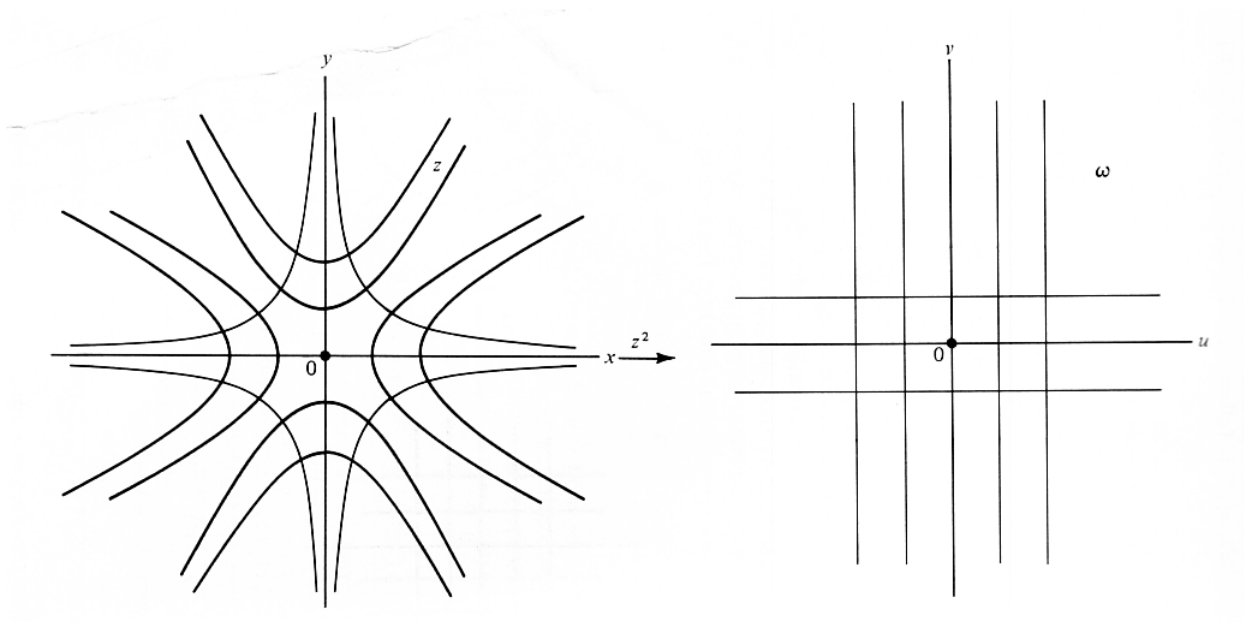
Θεώρημα 9.0.3 Έστω f 1 – 1 αναλυτική συνάρτηση σ' έναν τόπο D . Τότε

(α) η f^{-1} υπάρχει και είναι αναλυτική στον $f(D)$.

(β) η f και η f^{-1} είναι σύμμορφες στο D και το $f(D)$, αντιστοίχως.

Το Θεώρημα αυτό οδηγεί στον επόμενο

Ορισμός 9.0.5 Δύο τόποι D_1 , D_2 λέγονται σύμμορφα ισοδύναμοι, αν υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση του D_1 επί του D_2 .



Σχήμα 9.2:

9.1 Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann

Για κάθε απλά συνεκτικό τόπο $R (\neq \mathbb{C})$ και $z_0 \in R$, υπάρχει μοναδική σύμμορφη απεικόνιση ϕ επί του ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου U , τέτοια ώστε $\phi(z_0) = 0$ και $\phi'(z_0) > 0$.

(Με άλλα λόγια, κάθε δύο απλά συνεκτικοί γνήσιοι υπό-τόποι του μιγαδικού επιπέδου είναι σύμμορφα ισοδύναμοι).

Μερικές Αξιοσημείωτες Απεικονίσεις

1. $w = z + b$ (μετατόπιση)
2. $w = e^{i\theta_0} z$ (στροφή)
3. $w = az$ (ομοθεσία)
4. $w = \frac{1}{z}$ (αντιστροφή)
5. $w = az + b$ (γραμμικός μετασχηματισμός)

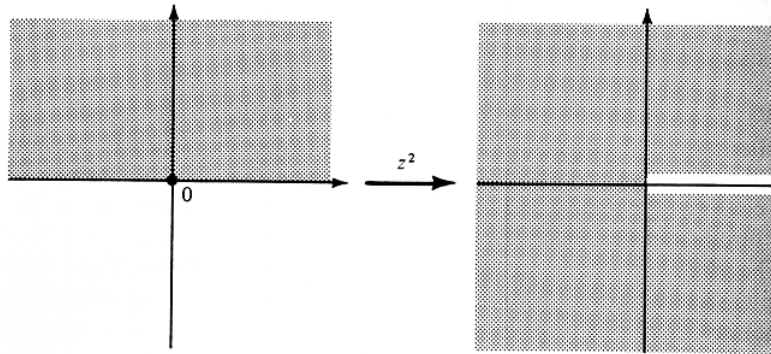
$w = \zeta + b$, $\zeta = e^{i\theta_0} \xi$, $\xi = Az$ ($a = Ae^{i\theta_0}$): σύνθεση μετατόπισης, στροφής και ομοθεσίας.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι "1-1" αναλυτική απεικόνιση του \mathbb{C} επί του \mathbb{C} .

6. $w = z^a, a \in \mathbb{R}$

Αν θεωρήσουμε τον κλάδο του $\log z$ που είναι θετικός στον θετικό ημιάξονα, τότε η z^a απεικονίζει τον θετικό ημιάξονα επί του εαυτού του. Ακόμα, απεικονίζει το $S = \{z : \theta_1 < \text{Arg}z < \theta_2\}$ στο $T = \{w : a\theta_1 < \text{Arg}w < a\theta_2\}$.

Αν, επιπλέον, $\theta_2 - \theta_1 \leq \frac{2\pi}{a}$, η z^a είναι σύμμορφη απεικόνιση του S επί του T .

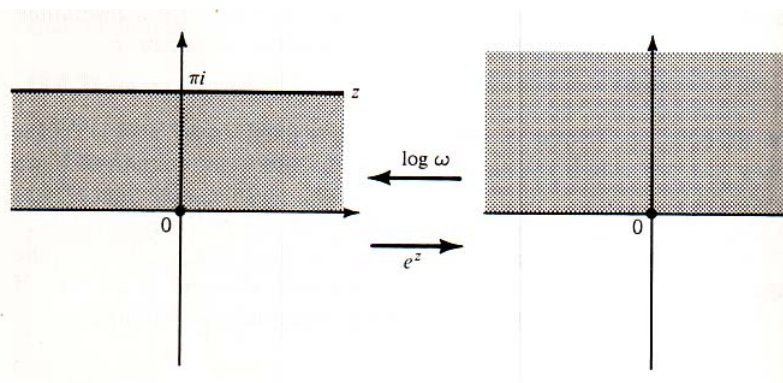


Σχήμα 9.3:

7. $w = e^z$

Απεικονίζει τη λωρίδα $y_1 < y < y_2$ επί του $\{z : y_1 < \text{Arg}w < y_2\}$.

Αν $y_2 - y_1 \leq 2\pi$, η απεικόνιση είναι "1-1".



Σχήμα 9.4:

8. $w = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$ (ρητογραμμικός μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός Möbius)

Μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μετατόπισης, στροφής, ομοθεσίας και αντιστροφής.

Είναι 1-1 απεικόνιση της σφαίρας του Riemann επί του εαυτού της $\left(f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, f(\infty) = \frac{a}{c}\right)$.

Αποτελεί ομάδα ως προς τη σύνθεση.

Απεικονίζει κύκλους ή ευθείες επί κύκλων ή ευθειών.

Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3 στα $\infty, 0, 1$, αντιστοίχως, είναι ο

$$T(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)}$$

Διπλός λόγος των z_1, z_2, z_3, z_4 , συμβ. (z_1, z_2, z_3, z_4) , είναι το $T(z_4)$. Ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων είναι αναλλοίωτος από το μετασχηματισμό Möbius. Ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius $w = f(z)$ που απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3 στα w_1, w_2, w_3 , αντιστοίχως δίνεται από τη σχέση $T(w) = T(z)$.

Μια σύμμορφη απεικόνιση ενός τόπου επί του εαυτού του, λέγεται αυτομορφισμός του τόπου αυτού. Σχετικά ισχύουν:

- Οι αυτομορφισμοί του μοναδιαίου δίσκου, είναι της μορφής $g(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$ για $|a| < 1$.
- Οι σύμμορφες απεικονίσεις h του άνω ημιεπιπέδου επί του μοναδιαίου δίσκου είναι της μορφής

$$h(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right)$$

- Οι αυτομορφισμοί του άνω ημιεπιπέδου είναι της μορφής $f(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$, με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc > 0$.

1. Απεικόνιση του άνω ημιεπιπέδου σε κύκλο

$a \in \mathbb{C}$ με $\text{Im} a > 0$ δεδομένο σημείο που απεικονίζεται στο $w = 0$. Τότε το \bar{a} απεικονίζεται στο $w = \infty$ (λόγω συμμετρίας).

Πρέπει συνεπώς

$$w = \beta \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \beta: \text{σταθερό.}$$

Για αυθαίρετο β , η σχέση αυτή απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο σε κάποιο κύκλο κέντρου 0.

Αν θέλουμε απεικόνιση στον μοναδιαίο κύκλο, θα πρέπει το $z = 0$ ν' απεικονισθεί στο w_0 με $|w_0| = 1$, δηλαδή $|\beta a| = |\bar{a}|$. Επομένως $\beta = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση

$$w = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

απεικονίζει σύμμορφα το $Ima > 0$ στον κύκλο $|w| < 1$, έτσι ώστε το $a \mapsto w = 0$.

Αν $Ima < 0$, τότε η ανωτέρω συνάρτηση απεικονίζει το κάτω ημιεπίπεδο στον κύκλο $|w| < 1$.

Η αντίστροφη της ανωτέρω συνάρτησης είναι η

$$w = \frac{z\bar{a} - ae^{i\theta}}{z - e^{i\theta}}, \quad Ima > 0$$

που απεικονίζει τον κύκλο $|z| < 1$ στο άνω ημιεπίπεδο.

2. Απεικόνιση κύκλου σε κύκλο

Έστω ότι το $a \in \mathbb{C}$ με $|a| < 1$ απεικονίζεται στο $w = 0$. Τότε το συμμετρικό σημείο $\frac{1}{\bar{a}}$ απεικονίζεται στο $w = \infty$ και η ζητούμενη απεικόνιση θα έχει τη μορφή:

$$w = \beta \frac{z - a}{z - \frac{1}{\bar{a}}} = \gamma \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

Για να βρούμε το γ υποθέτουμε ότι $1 \mapsto w_0$, $|w_0| = 1$.

Τότε $\gamma \frac{1-a}{1-\bar{a}} = w_0$, δηλαδή $\gamma = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, οπότε παίρνουμε

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

που απεικονίζει τον κύκλο $|z| < 1$ στον κύκλο $|w| < 1$.

3. Απεικόνιση ημιεπιπέδου σε ημιεπίπεδο

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα: Υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τρία (διαφορετικά ανά δύο) σημεία z_1, z_2, z_3 σε τρία (ανά δύο διαφορετικά) σημεία w_1, w_2, w_3 , αντιστοίχως.

Αυτή η απεικόνιση δίνεται από τη σχέση

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Για να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση που απεικονίζει ημιεπίπεδο σε ημιεπίπεδο παίρνουμε τρία σημεία $x_1 < x_2 < x_3$ στον x - άξονα και τρία σημεία $u_1 < u_2 < u_3$ στον u - άξονα, έτσι ώστε $x_j \mapsto u_j$.

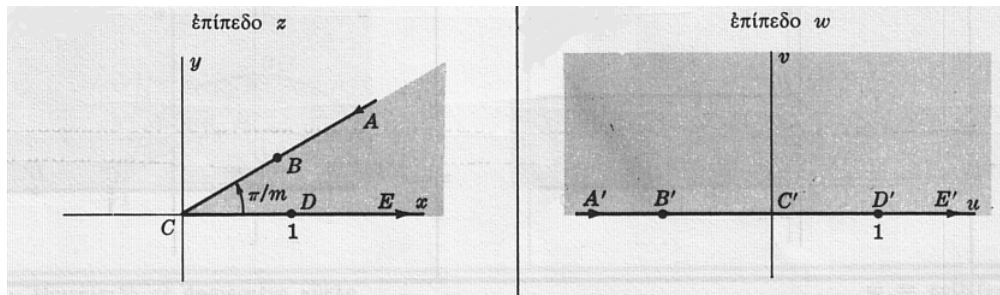
Εφ' όσον οι x_j, u_j είναι πραγματικοί, η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$w = \frac{az + \beta}{\gamma + \delta}, \quad a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

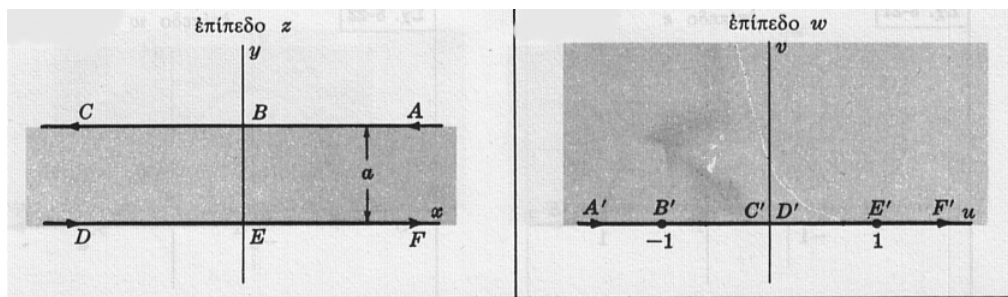
Αν $a\delta - \beta\gamma > 0$ το άνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.

Αν $a\delta - \beta\gamma < 0$ το άνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο κάτω ημιεπίπεδο.

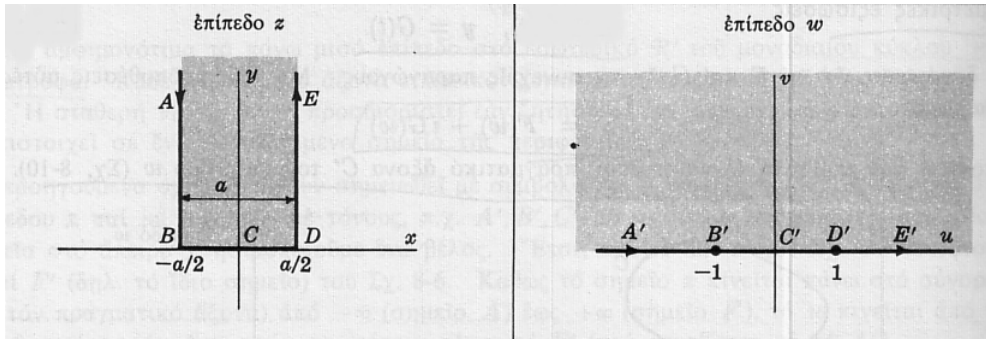
4. Ορισμένες χρήσιμες απεικονίσεις



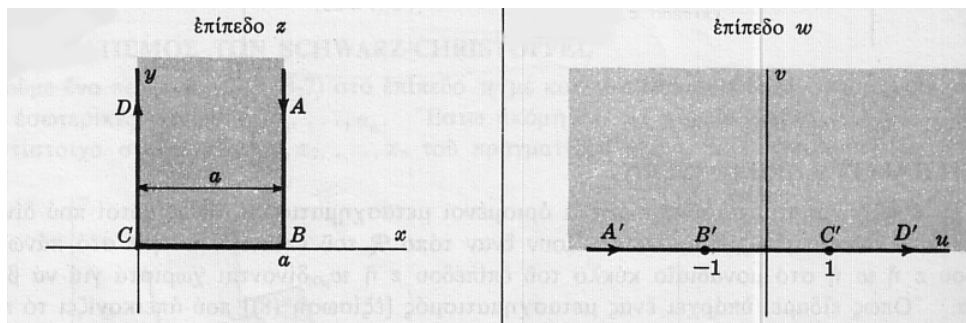
Σχήμα 9.5: $w = z^m$, $m \geq \frac{1}{2}$



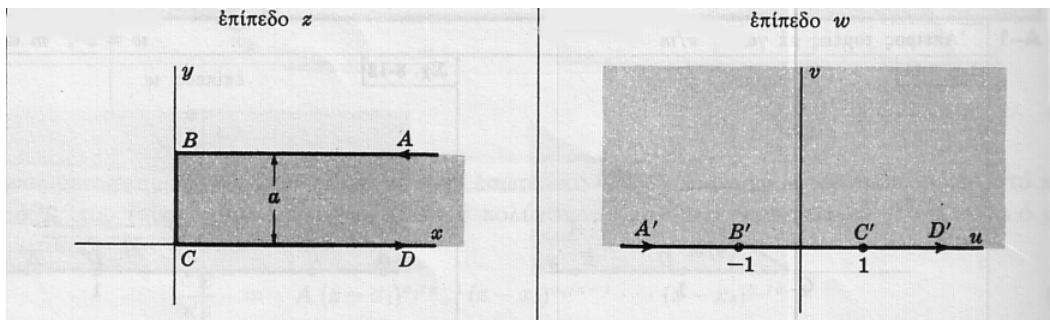
Σχήμα 9.6: $w = e^{\frac{\pi z}{a}}$



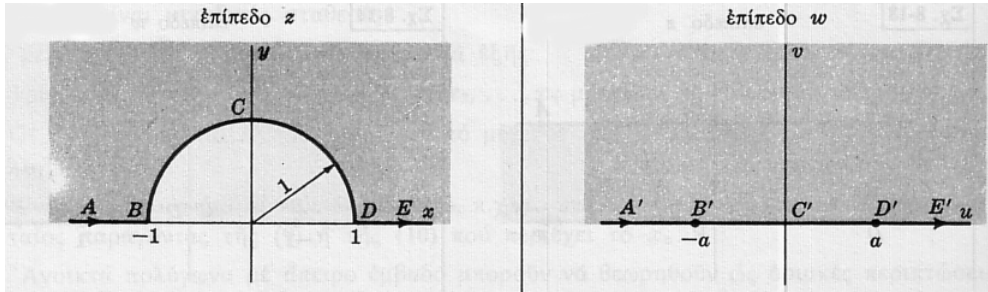
Σχήμα 9.7: $w = \sin \frac{\pi z}{a}$



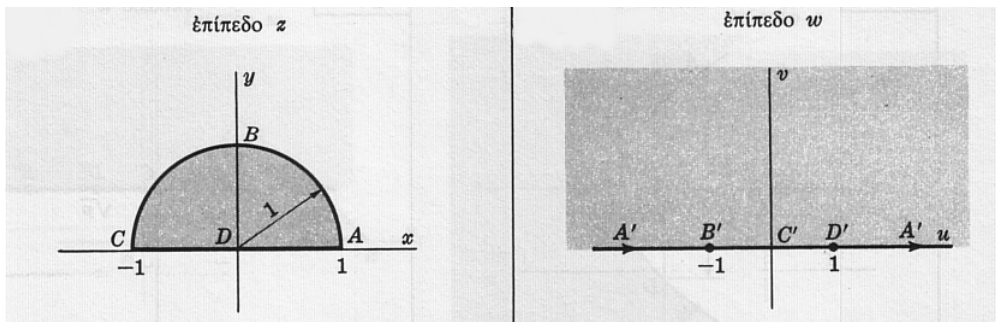
Σχήμα 9.8: $w = \cos \frac{\pi z}{a}$



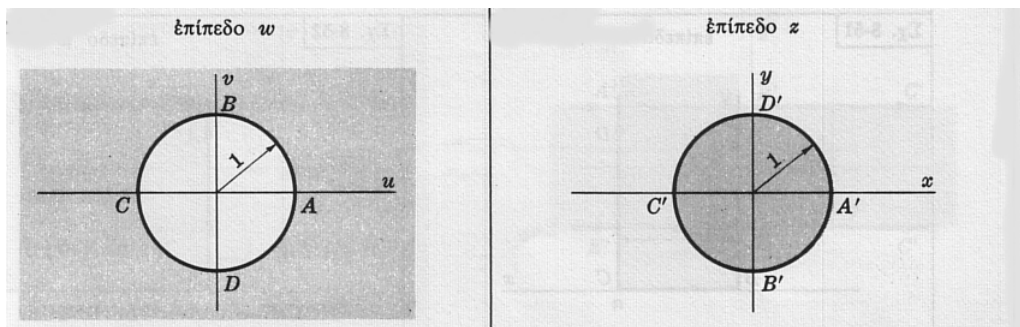
Σχήμα 9.9: $w = \cosh \frac{\pi z}{a}$



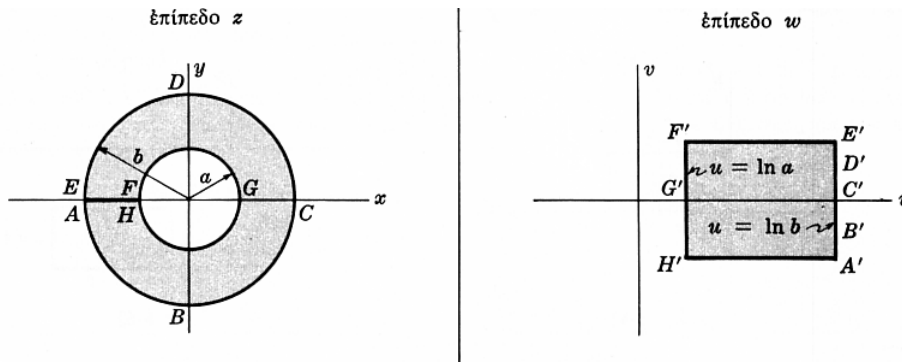
Σχήμα 9.10: $w = \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, (για $a = 1$: μετασχηματισμός Zulkovski)



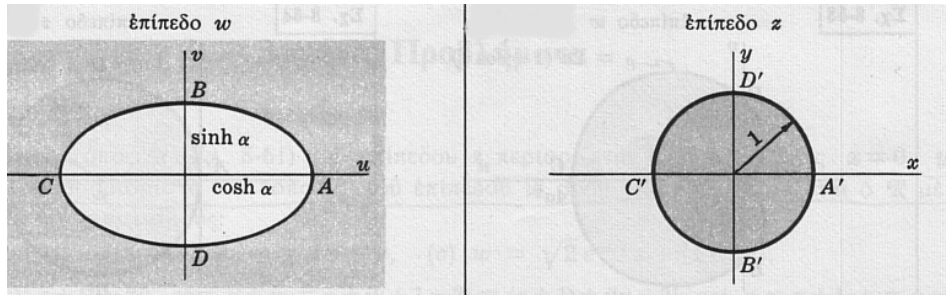
Σχήμα 9.11: $w = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$



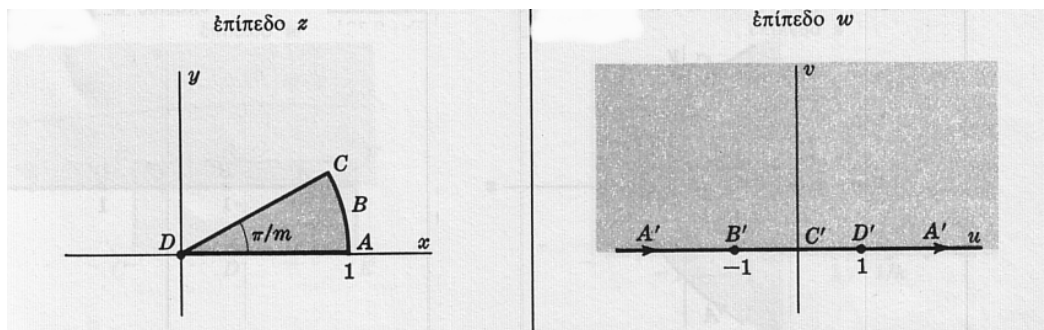
Σχήμα 9.12: $w = \frac{1}{z}$



Σχήμα 9.13: $w = \log z$



Σχήμα 9.14: $w = \frac{1}{2}(ze^{-a} + \frac{1}{z}e^a)$



Σχήμα 9.15: $w = \left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2, m \geq \frac{1}{2}$

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε το ορθογώνιο $R = \{(x, y) : x \in [0, 2], y \in [0, 1]\}$. Να προσδιοριστεί η εικόνα του R στο επίπεδο w από το μετασχηματισμό $w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}z$.

Λύση

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \Rightarrow w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}z = (1 + i)(x + iy) = x - y + i(x + y) = u + iv \Rightarrow$$

$$u = x - y, \quad v = x + y$$

$$x = 0 \mapsto \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow u = -v, \quad x = 2 \mapsto \begin{cases} u = 2 - y \\ v = 2 + y \end{cases} \Rightarrow u + v = 4$$

$$y = 0 \mapsto \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow u = v, \quad y = 1 \mapsto \begin{cases} u = x - 1 \\ v = x + 1 \end{cases} \Rightarrow u - v = 2$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός συνιστά μια στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$ του R και μια ομοθεσία μηκών με λόγο $\sqrt{2}$.

2. Να βρεθεί μια αναλυτική συνάρτηση $w = u + iv = f(z)$ που απεικονίζει το σύνολο $0 < \text{Arg}z < \frac{\pi}{3}$ επί του $u < 1$.

Λύση

Η $w_1 = z^3$ απεικονίζει το $0 < \text{Arg}z < \frac{\pi}{3}$ στο $0 < \text{Arg}w_1 < \pi$.

Η $w_2 = iw_1 = iz^3$ (στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$ αφού $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$) απεικονίζει το $0 < \text{Arg}w_1 < \pi$ στο $\frac{\pi}{2} < \text{Arg}w_2 < \frac{3\pi}{2}$.

Η $w_3 = w_2 + 1$ μετατοπίζει την $u = 0$ στην $u = 1$. Οπότε $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 = iz^3 + 1 \Rightarrow f(z) = iz^3 + 1$.

3. Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο του επιπέδου z στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου w με τέτοιο τρόπο ώστε το $z = i$ να απεικονίζεται στο $w = 0$ και το $z = \infty$ στο $w = -1$.

Λύση

Από τον τύπο $w = e^{i\theta} \left(\frac{z-a}{z-\bar{a}} \right)$, $\text{Im}a > 0$ παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= e^{i\theta} \left(\frac{i-a}{i-\bar{a}} \right) \Rightarrow a = i \\ -1 &= e^{i\theta} \left(\frac{\infty-a}{\infty-\bar{a}} \right) \Rightarrow -1 = e^{i\theta} \end{aligned} \right\} w = (-1) \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \Rightarrow w = \frac{i-z}{i+z}.$$

4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει το κοινό μέρος των δίσκων $|z-1| < 1$ και $|z-i| < 1$ στο 1^ο τεταρτημόριο του επιπέδου w .

Λύση

Οι κύκλοι $|z-1| = 1$ και $|z-i| = 1$ τέμνονται στα σημεία 0 και $1+i$.

Κάνουμε το μετασχηματισμό

$$\zeta = \frac{z}{z - (1 + i)}$$

που απεικονίζει τα σημεία $0, 1 + i$ στα σημεία $0, \infty$, αντιστοίχως.

Αφού οι εφαπτόμενες στους δύο κύκλους στο 0 είναι κάθετες, οι κύκλοι απεικονίζονται σε ευθείες κάθετες μεταξύ τους που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Αφού $\zeta(2) = 1 + i, \zeta\left(\frac{1+i}{2}\right) = -1$, οι ευθείες έχουν κλίσεις ± 1 το δε κοινό μέρος απεικονίζεται στο χωρίο: $\frac{3\pi}{4} < \text{Arg}\zeta < \frac{5\pi}{4}$.

Η στροφή $w = e^{-\frac{3\pi}{4}i}\zeta$ μας οδηγεί στο ζητούμενο.

Τελικά

$$w = \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}z}{z - (1 + i)}$$

9.2 Εφαρμογές της Σύμμορφης Απεικόνισης

9.2.1 Προβλήματα Dirichlet και Neumann

α. Dirichlet

$\Delta\Phi := \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$, στον R, R : απλά συνεκτικός τόπος.

$\Phi = f$, στη $C, C = \partial R$: απλή κλειστή καμπύλη.

β. Neumann

$\Delta\Phi = 0$, στον R .

$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = g$, στη C .

γ. Το πρόβλημα Dirichlet με f συνεχή, και το πρόβλημα Neumann με g συνεχή:

$\int_C g(s)ds = 0$, έχουν μοναδική λύση.

Παρατήρηση

Τα προβλήματα

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & R \\ \frac{\partial v}{\partial n} = g, & C \end{cases}, \text{ με } \int_C g(s)ds = 0$$

και

u : συζυγής αρμονική της v , στον R

$u = -\int_a^s g(s)ds$, στη C , (a : αυθαίρετο σημείο της C)
είναι ισοδύναμα.

Υπενθύμιση: u, v (πραγματικές συναρτήσεις) συζυγείς αρμονικές $\Leftrightarrow f = u + iv$ (μιγαδική συνάρτηση): αναλυτική $\Leftrightarrow \Delta u = \Delta v = 0$ και ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy – Riemann.

Παρατήρηση

Ο τόπος R μπορεί να μην είναι φραγμένος, π.χ. το R μπορεί να είναι το άνω ημιεπίπεδο, οπότε το C είναι ο x -άξονας.

Το πρόβλημα Dirichlet για τον μοναδιαίο δίσκο – Τύπος Poisson

$$R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$\begin{cases} \Delta \Phi(r, \theta) = 0, & (r, \theta) \in (-1, 1) \times (0, 2\pi) \\ \Phi(1, \theta) = F(\theta), & \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Η λύση δίνεται ως

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)F(\varphi)d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

Το πρόβλημα Dirichlet για το ημιεπίπεδο – Τύπος Poisson

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}, C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = 0\}$$

$$\begin{cases} \Delta \Phi(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \\ \Phi(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi)d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2}$$

9.2.2 Επίλυση προβλημάτων Dirichlet και Neumann με σύμμορφη απεικόνιση.

1. Μετασχηματίζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον απλά συνεκτικό τόπο R σε πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον μοναδιαίο κύκλο ή το ημιεπίπεδο (θεωρητικά αυτό γίνεται πάντα: Θ. Riemann)
2. Λύνουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον μοναδιαίο κύκλο ή το ημιεπίπεδο.
3. Μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού βρίσκουμε τη λύση του αρχικού προβλήματος.

Σχετικά ισχύουν το ακόλουθα.

Θεώρημα 9.2.1 (A) Μέσω του μετασχηματισμού $w = f(z)$, f αναλυτική και $f'(z) \neq 0$ στον R , μια αρμονική συνάρτηση απεικονίζεται σε μία αρμονική συνάρτηση.

Θεώρημα 9.2.2 (B) Όπως πριν, $\Phi(x, y) = \Phi(x(u, v), y(u, v)) := \Psi(u, v)$.

$\Phi = a$: σταθ. στο C ή σε μέρος του $C \Rightarrow \Psi = a$, πάνω στην εικόνα C' στο w -επίπεδο.

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, στο C ή σε μέρος του $C \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial n}$ στο C' .

Παράδειγμα 1

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, & y > 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} \Phi(x, y) = f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\phi(\theta) = A\theta + B$, A, B : πραγματικές σταθερές, είναι αρμονική, διότι είναι το φανταστικό μέρος της $A \log z + B$.

Έχουμε

$\phi = 1$, για $x > 0$, δηλαδή για $\theta = 0$

$\phi = 0$, για $x < 0$, δηλαδή για $\theta = \pi$.

Άρα

$$\left. \begin{aligned} 1 &= A \cdot 0 + B \\ 0 &= A \cdot \pi + B \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{\pi}, B = 1,$$

οπότε

$$\Phi(\theta) = A\theta + B = 1 - \frac{\theta}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

B' Μέθοδος:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi)d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{y \cdot 0 d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y \cdot 1 d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\xi - x}{y}\right) \Big|_0^{\infty} \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \tag{9.1}$$

Παράδειγμα 2

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, & y > 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} \Phi(x, y) = f(x) = \begin{cases} T_0, & x < -1 \\ T_1, & -1 < x < 1 \\ T_2, & x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\Phi(\theta_1, \theta_2) = A\theta_1 + B\theta_2 + C$, A, B, C : πραγματικές σταθερές, είναι αρμονική, διότι είναι το φανταστικό μέρος της $A \log(z + 1) + B \log(z - 1) + C$.

$\phi = T_2$, για $x > 1$, δηλαδή για $\theta_1 = \theta_2 = 0$

$\phi = T_1$, για $-1 < x < 1$, δηλαδή για $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$

$\phi = T_0$, για $x < -1$, δηλαδή για $\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi$

Άρα

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \\ T_1 &= A \cdot 0 + B \cdot \pi + C \\ T_0 &= A \cdot \pi + B \cdot \pi + C \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{T_0 - T_1}{\pi}, B = \frac{T_1 - T_2}{\pi}, C = T_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Phi(\theta_1, \theta_2) &= A\theta_1 + B\theta_2 + C \\ &= \frac{T_0 - T_1}{\pi} \arctan \frac{y}{x+1} + \frac{T_1 - T_2}{\pi} \arctan \frac{y}{x-1} + T_2\end{aligned}$$

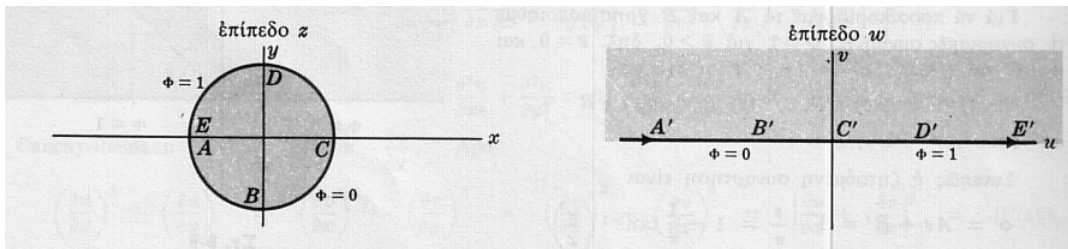
B' Μέθοδος: Χρήση του τύπου Poisson

Παράδειγμα 3

Ζητείται αρμονική συνάρτηση στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

επί της μοναδιαίας περιφέρειας $|z| = 1$. ($\phi = 0$ στο \widehat{ABC} , $\phi = 1$ στο \widehat{CDE} , βλέπε σχήμα 9.16).



Σχήμα 9.16:

Με τον μετασχηματισμό $z = \frac{i-w}{i+w}$ ή $w = i\frac{1-z}{1+z}$ απεικονίζεται το εσωτερικό της περιφέρειας $|z| = 1$ στο άνω ημιεπίπεδο w .

$\phi = 0$ στο $\widehat{ABC} \rightarrow \phi = 0$ στο $A'B'C'$

$\phi = 1$ στο $\widehat{CDE} \rightarrow \phi = 1$ στο $C'D'E'$.

Αυτό το πρόβλημα λύθηκε στο Παράδειγμα 1:

$$\phi = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{v}{u} \right)$$

$$w = i\frac{1-z}{1+z} \Rightarrow u = \frac{2y}{(1+x)^2 + y^2}, \quad v = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} \right) \stackrel{\substack{x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta}}{=} 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{3r \sin \theta}{1-r^2} \right)$$

Κεφάλαιο 10

Εφαρμογές

10.1 Ηλεκτρικά κυκλώματα - Ημιτονοειδή Ρεύματα

Όπως γνωρίζουμε μια T -περιοδική συνάρτηση f μπορεί - υπό κάποιες προϋποθέσεις - να αναπτυχθεί σε σειρά *Fourier*.

$$f(t) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\omega t + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\omega t, \quad \omega := \frac{2\pi}{T},$$

όπου οι συντελεστές *Fourier* δίνονται ως

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) d\tau, \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \cos m\omega\tau d\tau, \quad a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \sin m\omega\tau d\tau.$$

Η μελέτη της συμπεριφοράς ενός ηλεκτρικού κυκλώματος στο οποίο κυκλοφορεί ένα περιοδικό ρεύμα $i(t)$, ανάγεται έτσι στη μελέτη ημιτονοειδών ρευμάτων.

Ομοίως, για μη περιοδικές συναρτήσεις το «συνεχές» ανάλογο είναι το ολοκλήρωμα *Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau \right) d\omega$$

και έτσι η σημασία των ημιτονοειδών ρευμάτων παραμένει ουσιώδης και στη μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων στα οποία το ρεύμα που τα διαρρέει δεν είναι περιοδικό.

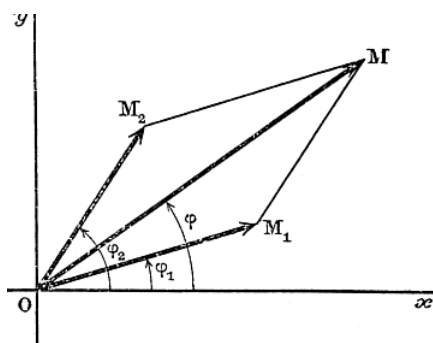
10.1.1 Γραφική Αναπαράσταση Ημιτονοειδών Συναρτήσεων

Θεωρούμε ένα διάνυσμα OM σταθερού μήκους I που περιστρέφεται περί το O με γωνιακή ταχύτητα ω . Έστω ϕ η γωνία που σχηματίζει το OM με τον άξονα Ox κατά την αρχή της μέτρησης του χρόνου. Τότε η προβολή στον άξονα Oy του M δίνεται από την έκφραση

$$i(t) = I \sin(\omega t + \phi)$$

και το διάνυσμα OM αναπαριστά την ημιτονοειδή συνάρτηση. Προφανώς, η πρόσθεση δύο ημιτονοειδών συναρτήσεων της ίδιας περιόδου δίνεται ως (βλέπε σχήμα 10.1)

$$i(t) = I \sin(\omega t + \phi) = i_1(t) + i_2(t) = I_1 \sin(\omega t + \phi) + I_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$



Σχήμα 10.1:

Η παράγωγος της $i(t)$ είναι

$$\frac{di(t)}{dt} = \omega I \cos(\omega t + \phi) = \omega I \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}),$$

ενώ το ολοκλήρωμα

$$\int i(t) dt = -\frac{I}{\omega} \cos(\omega t + \phi) = \frac{I}{\omega} \sin(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}).$$

Έτσι:

Παράγωγος: διάνυσμα μήκους ωI που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{2}$ με το διάνυσμα μήκους I και φασικής γωνίας ϕ .

Ολοκλήρωμα: διάνυσμα μήκους $\frac{I}{\omega}$ που σχηματίζει γωνία $-\frac{\pi}{2}$ με το διάνυσμα μήκους I και φασικής γωνίας ϕ .

10.1.2 Μιγαδική Αναπαράσταση

Τώρα Ox : πραγματικός άξονας, Oy : φανταστικός άξονας και υπενθυμίζουμε ότι: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Έτσι, το διάνυσμα OM ορίζεται ως

$$I[\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)] = I e^{i\phi} e^{i\omega t} = J e^{i\omega t}, \quad J := I e^{i\phi}$$

Αν η έκφραση $i(t) = I \sin(\omega t + \phi)$ αναπαριστά ένα ημιτονοειδές ρεύμα, το $J = Ie^{i\phi}$ ονομάζεται μιγαδικό ρεύμα. Όσον αφορά την πρόσθεση, αν

$$i_1(t) = I_1 \sin(\omega t + \phi_1), \quad i_2(t) = I_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

και αν θέσουμε

$$\tilde{i}_1(t) = I_1 e^{i\phi_1} e^{i\omega t} = J_1 e^{i\omega t}, \quad \tilde{i}_2(t) = I_2 e^{i\phi_2} e^{i\omega t} = J_2 e^{i\omega t}$$

τότε

$$J = J_1 + J_2$$

και η ημιτονοειδής συνάρτηση που αναζητούμε θα είναι το φανταστικό μέρος της $Je^{i\omega t}$, δηλαδή το $Im(Je^{i\omega t})$, που είναι $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Αντιστοίχως, αν $i(t) = I \sin(\omega t + \phi)$

$$\frac{di(t)}{dt} = Im\left(\frac{d}{dt}(Je^{i\omega t})\right) = \omega I \cos(\omega t + \phi)$$

και ομοίως για το ολοκλήρωμα.

Αν όμως έχουμε να κάνουμε πολλαπλασιασμό ή ύψωση σε δύναμη ο απλός παραπάνω κανόνας (δηλ. να πάρουμε το φανταστικό μέρος) δεν ισχύει πλέον:

Π.χ. έστω

$$i_1(t) = I_1 \sin(\omega t + \phi_1), \quad i_2(t) = I_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

τότε

$$i_1(t)i_2(t) = \frac{1}{2}I_1I_2 \left[\cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) \right],$$

ενώ για

$$\tilde{i}_1(t) = J_1 e^{i\omega t}, \quad J_1 = I_1 e^{i\phi_1}, \quad \tilde{i}_2(t) = J_2 e^{i\omega t}, \quad J_2 = I_2 e^{i\phi_2}$$

παίρνουμε

$$\tilde{i}_1(t)\tilde{i}_2(t) = I_1I_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)+2i\omega t}$$

οπότε

$$Im(\tilde{i}_1(t)\tilde{i}_2(t)) = I_1I_2 \sin(2\omega t + \phi_1 + \phi_2).$$

Έτσι είναι εμφανές ότι η διαδικασία που περιγράψαμε (με τη μιγαδική αναπαράσταση) είναι συμβατή με γραμμικές, ομογενείς παραστάσεις πρώτου βαθμού, της μορφής

$$\sum a_j \tilde{i}_j(t) + \sum \beta_j \frac{d\tilde{i}_j(t)}{dt} + \sum \gamma_j \int \tilde{i}_j(t) dt$$

όπου οι συντελεστές a_j , β_j , γ_j είναι ανεξάρτητοι του t .

Η αντικατάσταση

$$\tilde{i}_k(t) = J_k e^{i\omega t}, \quad \text{με } J_k = I_k e^{i\phi_k}$$

οδηγεί σε αποτέλεσμα της μορφής

$$Je^{i\omega t} = Ie^{i\phi} e^{i\omega t}$$

και το φανταστικό μέρος της τελευταίας παράστασης είναι η ζητούμενη ημιτονοειδής συνάρτηση $i(t) = I \sin(\omega t + \phi)$.

10.1.3 Κυκλώματα RLC

Θεωρούμε ένα κύκλωμα RLC δηλαδή ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει μόνο πυκνωτές (χωρητικότητα C), αντιστάσεις (ωμικής αντίστασης R) και πηνία (συντελεστή αυτεπαγωγής L) και στο οποίο ορίζονται δύο ακραία σημεία.

Αν το ηλεκτρικό ρεύμα έντασης

$$i(t) = I \cos(\omega t + a)$$

διαρρέει το κύκλωμα, η αναζήτηση ημιτονοειδούς λύσης της ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το κύκλωμα οδηγεί σε διαφορά δυναμικού

$$u(t) = V \cos(\omega t + \theta)$$

στα άκρα.

Έτσι, η αντικατάσταση ρεύματος έντασης

$$\tilde{i}(t) = J e^{i\omega t}, \quad J := I e^{ia}$$

στην εξίσωση, δίνει αποτέλεσμα της μορφής

$$\tilde{u}(t) = U e^{i\omega t}, \quad U := V e^{i\theta}$$

Ορίζουμε ως *μιγαδική εμπέδηση* του εν λόγω κυκλώματος, την ποσότητα Z που δίνεται από τη σχέση

$$U = ZJ$$

και έχει διαστάσεις αντίστασης.

Το μέτρο της μιγαδικής εμπέδησης είναι

$$|Z| = \frac{V}{I}$$

και το όρισμά της

$$\arg Z = \theta - a = \phi$$

Είναι φανερό ότι ο νόμος του Ohm ($i = \frac{U}{R}$), μπορεί να γραφεί για τις αντίστοιχες μιγαδικές ποσότητες.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το κύκλωμα RLC (σχήμα 10.2) που διαρρέεται από ρεύμα έντασης

$$i(t) = \cos(\omega t + a).$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα θα βρεθεί με το να αντικαταστήσουμε

$$\tilde{i}(t) = J e^{i\omega t}$$

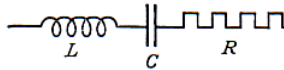


Fig. 1-10.

Σχήμα 10.2:

στην έκφραση

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

απ' όπου

$$U = J \left[R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) i \right]$$

και η μιγαδική εμπέδηση είναι

$$Z = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) i.$$

Η αναζητούμενη ημιτονοειδής τάση

$$u(t) = V \cos(\omega t + \theta)$$

δίνεται από τις σχέσεις

$$V = I|Z| \text{ και } \theta = a + \arg Z$$

κι έτσι

$$V = I \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

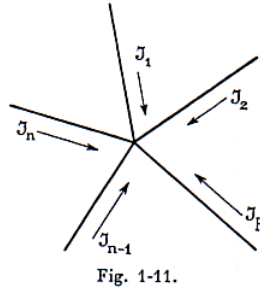
$$\tan(\theta - a) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Παρατήρηση: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η μέτρηση του χρόνου αρχίζει όταν τα δεδομένα έχουν μηδενική φάση. Στο παράδειγμά μας, μπορούμε να πάρουμε εξ' αρχής $a = 0$.

10.1.4 Οι κανόνες του Kirchhoff

1ος κανόνας (κανόνας των κόμβων)

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$



Σχήμα 10.3: 1ος κανόνας Kirchhoff.

Αν τα i_k είναι ημιοτονοειδή ρεύματα, η αντικατάσταση $\tilde{i}_k(t) = J_k e^{i\omega t}$ δίνει

$$\sum_{k=1}^n J_k = 0.$$

2ος κανόνας (κανόνας των βρόγχων)

Αν τα u_k , $k = 1, 2, \dots, n$ είναι οι διαφορές δυναμικού στα άκρα των κλάδων που αποτελούν έναν βρόγχο (κλειστό περίγραμμα) τότε

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0.$$

Στην περίπτωση ημιτονοειδών διαφορών δυναμικού, η αντικατάσταση $\tilde{u}_k(t) = U_k e^{i\omega t}$ δίνει

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0.$$

Αν οι διαφορές δυναμικού προέρχονται από μιγαδικά ρεύματα J_k με εμπεδήσεις Z_k αντιστοίχως, έχουμε

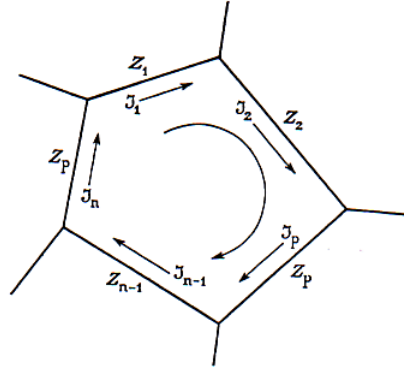
$$\sum_{k=1}^n Z_k J_k = 0.$$

Αν οι κλάδοι περιλαμβάνουν ηλεκτρικές διεγέρσεις $e_k(t) = \varepsilon_k e^{i\omega t}$, τότε

$$\sum_{k=1}^n Z_k J_k - \varepsilon_k = 0.$$

(ε_k : μιγαδική ηλεκτρεγερτική δύναμη)

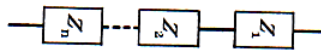
Σημείωση: Τα αθροίσματα στους κανόνες του Kirchhoff είναι αλγεβρικά, δηλαδή το σωστό πρόσημο (+ ή -) κάθε όρου πρέπει να ληφθεί υπ' όψη, αφού οριστεί (αυθαίρετα) η θετική φορά ροής στο κύκλωμα.



Σχήμα 10.4: 2ος κανόνας Kirchhoff.

10.1.5 Μιγαδικές Εμπεδήσεις σε Σειριακή ή Παράλληλη Σύνδεση

Σειριακή Σύνδεση



Σχήμα 10.5: Σειριακή Σύνδεση.

$$U = \left(\sum_{k=1}^n Z_k \right) J,$$

$J = J_1 = J_2 = \dots = J_n$, οπότε

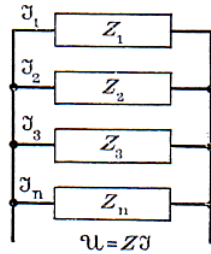
$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k$$

Παράλληλη Σύνδεση

$$U = Z_1 J_1 = Z_2 J_2 = \dots = Z_n J_n = Z J \quad J = \sum_{k=1}^n J_k$$

Έτσι

$$\frac{1}{Z} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}.$$



Σχήμα 10.6: Παράλληλη Σύνδεση.

Παρατήρηση: Μετά τον υπολογισμό της μιγαδικής εμπέδησης ενός κυκλώματος μπορούμε τελικώς να γράψουμε

$$Z(i\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

από όπου έχουμε τη σχέση των πλατών $|Z(i\omega)|$ και της διαφοράς φάσης $\arg Z(i\omega)$.

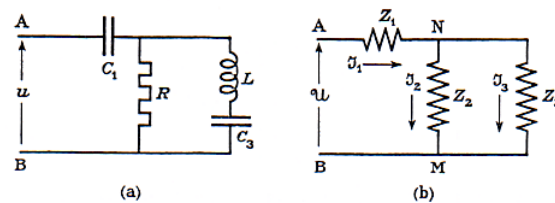
Αντιστοίχως

$$\frac{1}{Z(i\omega)} = Y(i\omega) = G(\omega) + iB(\omega)$$

- Ορολογία $B(\omega)$: φαινόμενη αγωγιμότητα
- $R(\omega)$: πραγματική αντίσταση
- $X(\omega)$: φαινόμενη αντίσταση
- $Y(i\omega)$: (μιγαδική) σύνθετη αγωγιμότητα
- $G(\omega)$: πραγματική αγωγιμότητα

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η εμπέδηση Z του κυκλώματος του σχήματος 10.7a



Σχήμα 10.7:

Αναπαριστούμε το κύκλωμα όπως φαίνεται στο σχήμα 10.7b. Ομαδοποιώντας τις εμπεδήσεις έχουμε

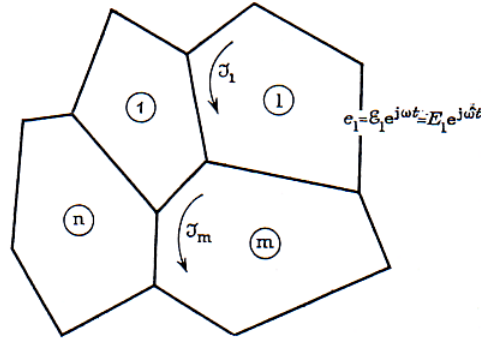
$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}, \quad \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \right)$$

με $Z_1 = -\frac{i}{C_1 \omega}$, $Z_2 = R$, $Z_3 = i\left(L\omega - \frac{i}{C_3 \omega}\right)$.

Σημειώνουμε ότι στον κόμβο N έχουμε $J_1 = J_2 + J_3$, ενώ στο βρόγχο $Z_2 N Z_3 M$ έχουμε $J_2 Z_2 = J_3 Z_3$. Εξ' άλλου $J_1 = \frac{U}{Z}$.

10.1.6 Γενίκευση της έννοιας της μιγαδικής εμπέδησης

Θεωρούμε ένα κύκλωμα n βρόγχων. Εργαζόμαστε με τους βρόγχους l και m (σχήμα 10.8). Έστω L_l , R_l , C_l τα στοιχεία του βρόγχου l . Έστω $L_{lm} = L_{ml}$, $R_{lm} = R_{ml}$, $C_{lm} = C_{ml}$ τα



Σχήμα 10.8:

στοιχεία της σύζευξης των βρόγχων l και m . Έστω $e_l(t) = E_l e^{i\omega t}$ η ηλεκτρεγερτική δύναμη στο βρόγχο l , ενώ $e_l(t) = 0$, $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. Τότε το ανωτέρω κύκλωμα περιγράφεται από το σύστημα ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \left[L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} + R_{11} i_1(t) + \frac{1}{C_{11}} \int i_1(t) dt \right] + \dots + \left[L_{1n} \frac{di_n(t)}{dt} + R_{1n} i_n(t) + \frac{1}{C_{1n}} \int i_n(t) dt \right] &= e_1 \\ \vdots \\ \left[L_{n1} \frac{di_1(t)}{dt} + R_{n1} i_1(t) + \frac{1}{C_{11}} \int i_1(t) dt \right] + \dots + \left[L_{nn} \frac{di_n(t)}{dt} + R_{nn} i_n(t) + \frac{1}{C_{nn}} \int i_n(t) dt \right] &= e_n \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\tilde{i}_k(t) = J_k e^{i\omega t}$$

και

$$i\omega L_{lm} + R_{lm} + \frac{1}{i\omega C_{lm}} = z_{lm}(i\omega)$$

και παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
 z_{11}(i\omega)J_1 + \cdots + z_{1n}(i\omega)J_n &= 0 \\
 &\vdots \\
 z_{l1}(i\omega)J_1 + \cdots + z_{ln}(i\omega)J_n &= E_l \\
 &\vdots \\
 z_{n1}(i\omega)J_1 + \cdots + z_{nn}(i\omega)J_n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

Συμβολίζουμε με $D(i\omega)$ την ορίζουσα του συστήματος και με $M_{lm}(i\omega)$ την υποορίζουσα που προκύπτει με διαγραφή της l -γραμμής και m -στήλης. Έτσι

$$J_m = \frac{M_{lm}(i\omega)}{D(i\omega)} E_l$$

Θέτοντας

$$Z_{lm}(i\omega) := \frac{D(i\omega)}{M_{lm}(i\omega)}$$

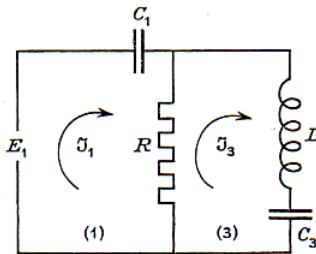
έχουμε τελικά

$$E_l = Z_{lm} J_m$$

Η $Z_{lm}(i\omega)$ ονομάζεται εμπέδηση μεταφοράς από το βρόχο l στο βρόχο m .

Παράδειγμα

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 10.9



Σχήμα 10.9:

Έχουμε

$$\begin{array}{ll}
 R_{11} = R & C_{11} = C_1 \\
 R_{33} = R & C_{33} = C_3 \\
 R_{13} = R_{31} = -R & C_{31} = C_{13} = 0 \quad L_{13} = L_{31} = 0
 \end{array}$$

Το σύστημα είναι

$$\begin{cases} \left(R - \frac{i}{C_1\omega}\right)J_1 - RJ_3 & = E_1 \\ -RJ_1 + \left(R + \left(L\omega - \frac{i}{C_3\omega}\right)i\right)J_3 & = 0 \end{cases}$$

Έτσι

$$Z_{13} = \frac{E_1}{J_3} = \left(R - \frac{i}{C_1\omega}\right)\left(1 + \frac{L\omega - \frac{i}{C_3\omega}}{R}i\right) - R$$

και

$$Z_{11} = \frac{E_1}{J_1} = R - \frac{i}{C_1\omega} - \frac{R^2}{R + \left(L\omega - \frac{i}{C_3\omega}\right)i}$$

10.1.7 Μιγαδικό Διάνυσμα

Έστω $\vec{a}(t)$ διάνυσμα που εξαρτάται ημιτονοειδώς από το χρόνο t : $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ με $a_j(t) = A_j \cos(\omega t + \phi_j)$, $j = 1, 2, 3$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα $a_j(t)$ προέρχονται από μιγαδικές ποσότητες

$$\tilde{a}_j(t) = \hat{A}_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \hat{A}_j = A_j e^{i\phi_j}$$

και έτσι να εισαγάγουμε το μιγαδικό διάνυσμα

$$\vec{\hat{A}} = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$$

όπου

$$Re(\vec{\hat{A}} e^{i\omega t}) = \vec{a}(t)$$

και

$$Im(\vec{\hat{A}} e^{i\omega t}) = \left(A_1 \cos\left(\omega t + \phi_2 - \frac{\pi}{2}\right), A_2 \cos\left(\omega t + \phi_2 - \frac{\pi}{2}\right), A_3 \cos\left(\omega t + \phi_3 - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Επιπλέον το συζυγές του $\vec{\hat{A}}$ είναι

$$\vec{\hat{A}} = (A_1 e^{-i\phi_1}, A_2 e^{-i\phi_2}, A_3 e^{-i\phi_3}).$$

Ακόμα αν

$$\vec{\hat{A}} = \vec{\hat{A}}_1 + i\vec{\hat{A}}_2$$

τότε

$$\vec{a}(t) = \vec{\hat{A}}_1 \cos \omega t - \vec{\hat{A}}_2 \sin \omega t \quad \left(= \left(Re \vec{\hat{A}}\right) \cos \omega t - \left(Im \vec{\hat{A}}\right) \sin \omega t \right).$$

(Τα διανύσματα $\vec{\hat{A}}_1$, $\vec{\hat{A}}_2$ είναι, αντιστοίχως, οι θέσεις που καταλαμβάνει το $\vec{a}(0)$ και το $\vec{a}\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right)$).

Το πλεονέκτημα της χρήσης των μιγαδικών διανυσμάτων στο λογισμό των ημιτονοειδών διανυσμάτων, είναι ότι δεν εμφανίζεται στους υπολογισμούς το t . Π.χ. για την εξίσωση του Maxwell

$$\text{curl} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\vec{H} = \vec{H}(x_1, x_2, x_3, t), \vec{E} = \vec{E}(x_1, x_2, x_3, t))$$

σε ημιτονοειδή \vec{E} , \vec{H} αντιστοιχούν μιγαδικά διανύσματα $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ και η εξίσωση Maxwell γράφεται

$$\text{curl} \vec{\mathcal{H}} = i\omega \vec{\mathcal{E}}$$

όπου $\eta = \varepsilon - \frac{\sigma}{\omega}$ είναι η μιγαδική διηλεκτρική σταθερά.

10.2 Εφαρμογές στο Στατικό Ηλεκτρισμό

10.2.1 Ο νόμος του Coulomb

Θεωρούμε δύο ηλεκτρικά φορτία q_1 , q_2 σε απόσταση r το ένα από το άλλο. Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb σε καθένα από τα φορτία ασκείται από το άλλο δύναμη με μέγεθος

$$F = \frac{q_1 q_2}{k r^2}.$$

Η δύναμη αυτή είναι ελκτική, εάν τα δύο φορτία είναι ετερόσημα (ένα θετικό κι ένα αρνητικό), και απωστική, εάν τα δύο φορτία είναι ομόσημα (και τα δύο θετικά ή και τα δύο αρνητικά). Η σταθερά k καλείται *διηλεκτρική σταθερά* και εξαρτάται από το υλικό με το οποίο είναι γεμάτος ο χώρος. Για το κενό είναι $k = 1$, ενώ σε άλλες περιπτώσεις είναι $k > 1$.

10.2.2 Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου. Ηλεκτροστατικό Δυναμικό

Μια δεδομένη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου (σημειακά φορτία ή συνεχής κατανομή ή συνδυασμός των δύο) δημιουργεί ένα *ηλεκτρικό πεδίο*. Εάν ένα θετικό φορτίο ίσο με τη μονάδα (που υποθέτουμε ότι είναι αρκετά μικρό ώστε να μην επηρεάσει το πεδίο) τοποθετηθεί σε ένα σημείο A του πεδίου (όπου δε βρίσκεται άλλο σημειακό φορτίο), τότε η δύναμη που ασκείται πάνω στο φορτίο αυτό καλείται *ένταση* του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο A και συμβολίζεται με \mathcal{E} . Η δύναμη αυτή προκύπτει από το ένα δυναμικό Φ που καλείται *ηλεκτροστατικό δυναμικό*. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{E} = -\text{grad}\Phi = -\nabla\Phi$$

Εάν η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου είναι δισδιάστατη, δηλ. η περίπτωση που μας ενδιαφέρει εδώ, τότε

$$\mathcal{E} = E_x + iE_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \text{όπου } E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad E_y = -i\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \quad (10.2)$$

Εάν E_t είναι η συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, η εφαπτόμενη σε μια απλή κλειστή καμπύλη C του μιγαδικού επιπέδου z , τότε

$$\int_C E_t ds = \int_C E_x dx + E_y dy = 0.$$

10.2.3 Το θεώρημα του Gauss

Θεωρούμε μια δισδιάστατη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου. Εάν C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη (στο επίπεδο z) που περικλείει συνολικό φορτίο q (στην πραγματικότητα μια κυλινδρική επιφάνεια απείρου μήκους που περικλείει συνολικό φορτίο q ανά μονάδα μήκους) και E_n η κάθετη στην C συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα του Gauss**

$$\int_C E_n ds = 4\pi q.$$

Εάν το συνολικό φορτίο που περικλείει η C είναι μηδέν, τότε

$$\int_C E_n ds = \int_C E_x dy - E_y dx = 0.$$

από τη σχέση αυτή έπεται ότι σε έναν τόπο που δεν περιέχει καθόλου φορτίο (δηλαδή η πυκνότητα του φορτίου είναι παντού μηδέν) έχουμε

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (10.3)$$

Από τις 10.2, 10.3 έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

δηλαδή η Φ είναι αρμονική συνάρτηση σε κάθε σημείο όπου δεν υπάρχει φορτίο.

10.2.4 Το μιγαδικό ηλεκτροστατικό δυναμικό

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι υπάρχει μια αρμονική συνάρτηση Ψ , συζυγής αρμονική της Φ , τέτοια ώστε η

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

να είναι αναλυτική σε έναν τόπο όπου δεν υπάρχει φορτίο. Η $\Omega(z)$ καλείται μιγαδικό ηλεκτροστατικό δυναμικό ή απλά μιγαδικό δυναμικό και η 10.2 μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{d\Omega}{dz} = -\overline{\Omega'(z)}. \quad (10.4)$$

Το μέτρο της \mathcal{E} είναι $E = |\mathcal{E}| = |-\Omega'(z)| = |\Omega'(z)|$. Οι καμπύλες (στην πραγματικότητα κυλινδρικές επιφάνειες) $\Phi(x, y) = \alpha$ και $\Psi(x, y) = \beta$ καλούνται αντίστοιχα ισοδυναμικές γραμμές και γραμμές ροής.

10.2.5 Γραμμικά φορτία

Είναι φανερό ότι υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ ενός ηλεκτρικού πεδίου και του πεδίου ροής ενός ρευστού. Το ηλεκτρικό πεδίο αντιστοιχεί στο πεδίο ταχυτήτων του ρευστού, με μόνη διαφορά ένα αντίθετο πρόσημο στα αντίστοιχα μιγαδικά δυναμικά. Οι έννοιες θετικής και αρνητικής πηγής στη ροή ρευστού έχουν ανάλογες έννοιες στο στατικό ηλεκτρισμό. Έτσι, το μιγαδικό (ηλεκτροστατικό) δυναμικό που οφείλεται σε ένα φορτίο q (ακριβέστερα σε άπειρου μήκους γραμμικό φορτίο q ανά φορτίο μήκους) στο σημείο z_0 στο κενό είναι

$$\Omega(z) = -2q \ln(z - z_0). \quad (10.5)$$

Το μιγαδικό αυτό δυναμικό περιγράφει θετική ή αρνητική πηγή, εάν αντίστοιχα είναι $q < 0$ ή $q > 0$. Όμοια, ορίζουμε μιγαδικό δυναμικό διπόλου, κτλ. Σε περίπτωση που ο χώρος δεν είναι κενός, αντικαθιστούμε στην 10.5 το q με q/k .

10.2.6 Αγωγοί

Εάν ένα σώμα είναι (τέλειος) αγωγός, όλο το φορτίο που έχει κατανέμεται μόνο στην επιφάνειά του. Έτσι, σε δισδιάστατα προβλήματα, όπου η επιφάνεια του σώματος αντιπροσωπεύεται από μια απλή κλειστή καμπύλη C στο επίπεδο z , το φορτίο κατανέμεται στην C και ισορροπεί. Συνεπώς η C είναι μια ισοδυναμική γραμμή του πεδίου.

Ένα σημαντικό πρόβλημα στο στατικό ηλεκτρισμό είναι ο προσδιορισμός του δυναμικού που οφείλεται σε δεδομένους (κυλινδρικούς) αγωγούς. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισης.

10.2.7 Χωρητικότητα

Θεωρούμε δύο αγωγούς με αντίθετα φορτία με απόλυτη τιμή q το καθένα. Εάν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών είναι V , τότε η ποσότητα C που ορίζεται με τη σχέση

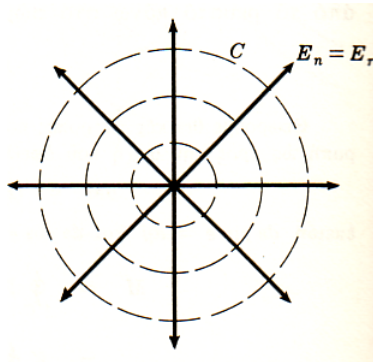
$$q = CV \quad (10.6)$$

εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του συστήματος των αγωγών και καλείται χωρητικότητα. Το σύστημα των αγωγών αποτελεί ένα πυκνωτή.

10.2.8 Ασκήσεις

1. (α') Βρείτε το μιγαδικό δυναμικό που οφείλεται σε ένα γραμμικό φορτίο q (ανά μονάδα μήκους) κάθετο στο επίπεδο z στο σημείο $z = 0$.
(β') Τι τροποποίηση πρέπει να γίνει στο προηγούμενο ερώτημα, αν το γραμμικό φορτίο είναι κάθετο στο $z = \alpha$;

Λύση



Σχήμα 10.10: Ακτινικό πεδίο.

- (α') Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το γραμμικό φορτίο είναι ακτινικό, δηλαδή έχει μόνο ακτινική συνιστώσα E_r (βλέπε σχήμα 10.10). Εάν C είναι κυλινδρική επιφάνεια με κέντρο το $z = 0$ και ακτίνα r , η κάθετη στην C συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_n ισούται με E_r και είναι σταθερή πάνω στην C . Από το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$\int_C E_n ds = E_r \int_C ds = E_r \cdot 2\pi r = 4\pi q$$

και $E_r = \frac{2q}{r}$. Είναι όμως $E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ και άρα $\Phi = -2q \ln r$, όπου παραλείψαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης. Αυτό είναι το πραγματικό μέρος του $\Omega(z) = -2q \ln z$, που είναι το ζητούμενο μιγαδικό δυναμικό.

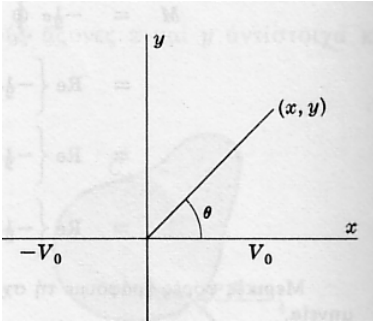
- (β') Εάν το γραμμικό φορτίο είναι το σημείο $x = a$, το μιγαδικό δυναμικό είναι $\Omega(z) = -2q \ln(z - a)$.
2. (α') Βρείτε το δυναμικό σε κάθε σημείο του τόπου του σχήματος 10.11, αν το δυναμικό του άξονα x είναι V_0 για $x > 0$ και $-V_0$ για $x < 0$.
- (β') Προσδιορίστε τις ισοδυναμικές γραμμές και τις γραμμές ρής.

Λύση

- (α') Πρέπει να βρούμε μια αρμονική συνάρτηση που να παίρνει τις τιμές V_0 για $x > 0$ (δηλαδή $\theta = 0$) και $-V_0$ για $x < 0$ (δηλαδή $\theta = \pi$). Αν A και B είναι πραγματικές σταθερές η $A\theta + B$ είναι αρμονική. Οι συνθήκες $A(0) + B = V_0$, $A(\pi) + B = -V_0$ δίνουν $A = -2V_0/\pi$, $B = V_0$. Άρα το ζητούμενο δυναμικό είναι

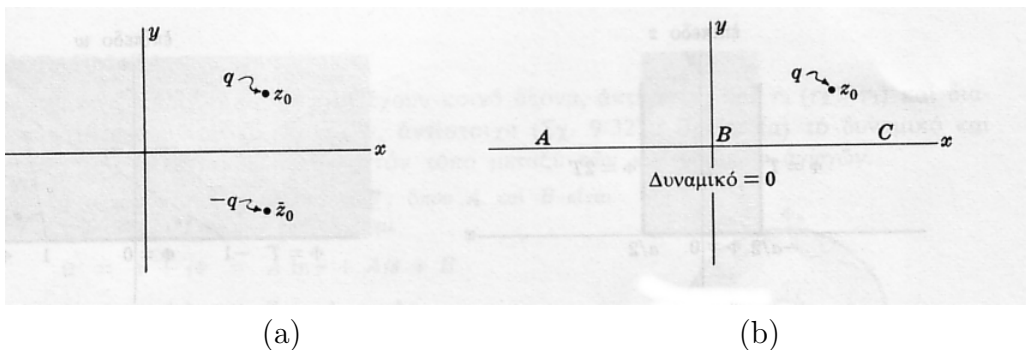
$$V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta \right) = V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{y}{x} \right)$$

για $y > 0$. Το δυναμικό για $y < 0$ προκύπτει από τη συμμετρία του πεδίου ως προς τον άξονα x .



Σχήμα 10.11:

- (β') Οι ισοδυναμικές γραμμές έχουν εξίσωση $V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{y}{x}\right) = a$ ή $y = mx$, όπου m μια σταθερά. Είναι ευθείες γραμμές που περνούν από την αρχή των αξόνων. Οι γραμμές ροής είναι ορθογώνιες τροχιές στις ευθείες $y = mx$, δηλαδή οι περιφέρειες κύκλων με κέντρο την αρχή $x^2 + y^2 = \beta$.
 Άλλη μέθοδος. Μια συνάρτηση συζυγής αρμονική της $V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{y}{x}\right)$ είναι η $-\frac{2V_0}{\pi} \ln r$. Συνεπώς οι γραμμές ροής είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{σταθ.}$, δηλαδή περιφέρειες κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων.
3. (α') Βρείτε το δυναμικό που οφείλεται σε ένα γραμμικό φορτίο q (ανά μονάδα μήκους) κάθετο στο $z = z_0$ και ένα άλλο γραμμικό φορτίο $-q$ (ανά μονάδα μήκους) κάθετο στο $z = \bar{z}_0$.
- (β') Δείξτε ότι το δυναμικό, που οφείλεται σε ένα άπειρο επίπεδο ABC (σχήμα 10.12b) με σταθερό δυναμικό μηδέν και σε ένα γραμμικό φορτίο q (ανά μονάδα μήκους) παράλληλο στο επίπεδο αυτό, μπορεί να βρεθεί από το αποτέλεσμα του προηγούμενου μέρους.



Σχήμα 10.12:

Λύση

(α') Το μιγαδικό δυναμικό που οφείλεται στα δύο γραμμικά φορτία (σχήμα 10.12a) είναι

$$\Omega(z) = -2q \ln(z - z_0) + 2q \ln(z - \bar{z}_0) = 2q \ln\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right)$$

Το ζητούμενο δυναμικό είναι το πραγματικό μέρος του $\Omega(z)$, δηλαδή

$$\Phi = 2q \Re \left\{ \ln\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right) \right\}. \quad (10.7)$$

(β') Αρκεί να δείξουμε ότι η 10.7 δίνει δυναμικό $\Phi = 0$ στον άξονα x , δηλαδή στο επίπεδο ABC του σχήματος (σχήμα 10.12b). Αυτό όμως είναι φανερό, αφού στον άξονα x έχουμε $z = x$, οπότε

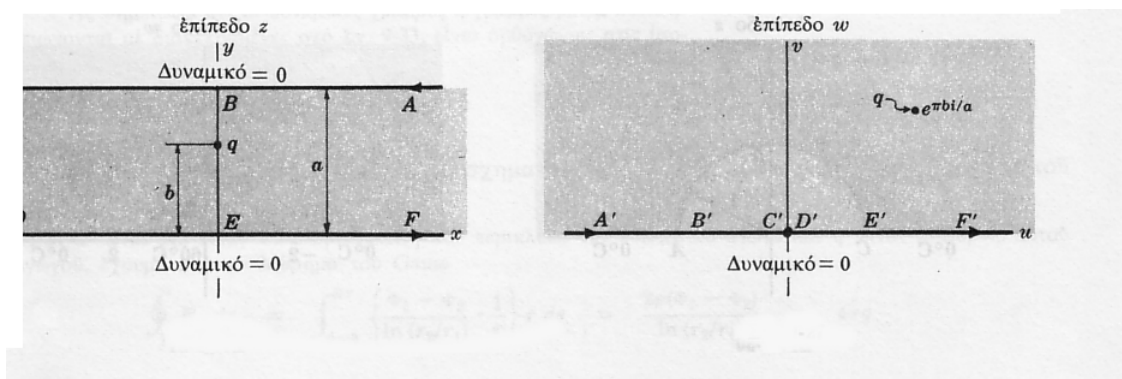
$$\Omega = 2q \ln\left(\frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0}\right) \text{ και } \bar{\Omega} = 2q \ln\left(\frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}\right) = -\Omega$$

δηλαδή $\Phi = \text{Re}\{\Omega\} = 0$. Έτσι, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το φορτίο $-q$ στο \bar{z}_0 με ένα απίπεδο ABC που διατηρείται σε σταθερό δυναμικό μηδέν και αντίστροφα.

4. Δύο άπειρα παράλληλα επίπεδα, σε απόσταση a το ένα από το άλλο, είναι γειωμένα, δηλαδή έχουν σταθερό δυναμικό μηδέν. Ένα γραμμικό φορτίο q (ανά μονάδα μήκους) τοποθετείται μεταξύ των επιπέδων, παράλληλο προς αυτά και σε απόσταση b από το ένα επίπεδο. Βρείτε το δυναμικό σε τυχαίο σημείο μεταξύ των επιπέδων.

Λύση

Έστω ότι ABC και DEF παριστάνουν στο σχήμα 10.13 τα δύο επίπεδα (κάθετα στο



Σχήμα 10.13:

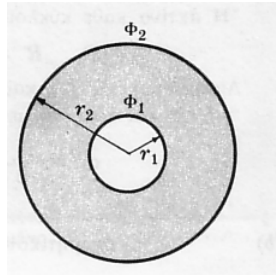
επίπεδο z) και έστω ότι το γραμμικό φορτίο είναι κάθετο στο επίπεδο z στο σημείο του φανταστικού άξονα $z = bi$. Η συνάρτηση απεικόνισης $w = e^{\pi z/a}$ απεικονίζει το σκιασμένο τόπο του σχήματος στο πάνω μισό επίπεδο w του σχήματος. Το γραμμικό φορτίο q στο $z = bi$ του σχήματος απεικονίζεται στο γραμμικό φορτίο q στο $w = e^{\pi bi/a}$. Το σύνορο $ABCDEF$ του σχήματος (που βρίσκεται σε δυναμικό μηδέν) απεικονίζεται στον άξονα $u A'B'C'D'E'F'$ (επίσης σε δυναμικό μηδέν), όπου τα C' και D' συμπίπτουν με το $w = 0$. Από το προηγούμενο πρόβλημα το δυναμικό στο σκιασμένο τόπο του σχήματος είναι

$$\Phi = 2q \operatorname{Re} \left\{ \frac{w - e^{-\pi bi/a}}{w - e^{\pi bi/a}} \right\}.$$

Συνεπώς, το δυναμικό στο σκιασμένο τόπο του σχήματος είναι

$$\Phi = 2q \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{\pi z/a} - e^{-\pi bi/a}}{e^{\pi z/a} - e^{\pi bi/a}} \right\}.$$

5. Δύο απείρου μήκους κυλινδρικοί αγωγοί έχουν κοινό άξονα, ακτίνες r_1 και r_2 ($r_2 > r_1$) και διατηρούνται σε σταθερά δυναμικά Φ_1 και Φ_2 αντίστοιχα (σχήμα 10.14). Βρείτε
- (α') Το δυναμικό
- (β') την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στον τόπο μεταξύ των κυλινδρικών αγωγών.



Σχήμα 10.14:

Λύση

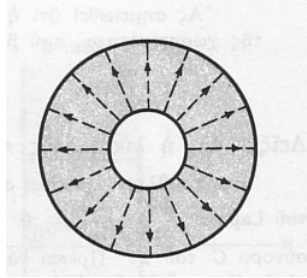
- (α') Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Omega = A \ln z + B$, όπου A και B είναι πραγματικές σταθερές. Αν $z = r e^{-i\theta}$, έχουμε $\Omega = \Phi + i\Psi = A \ln r + Ai\theta + B$ ή $\Phi = A \ln r + B$, $\Psi = A\theta$. Η Φ ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, δηλαδή είναι αρμονική, για $r_1 < r < r_2$ και δίνει αντίστοιχα $\Phi = \Phi_1$ και $\Phi = \Phi_2$ για $r = r_1$ και $r = r_2$. Συνεπώς $\Phi_1 = A \ln r_1 + B$, $\Phi_2 = A \ln r_2 + B$ από όπου

$$A = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln(r_2/r_1)}, \quad B = \frac{\Phi_1 \ln r_2 - \Phi_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Επομένως το ζητούμενο δυναμικό είναι

$$\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1 \ln(r_2/r_1)) \ln r + \frac{\Phi_1 \ln r_2 - \Phi_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}.$$

(β') Ένταση ηλεκτρικού πεδίου = $\mathcal{E} = -grad\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r}$. Ας σημειωθεί ότι οι δυναμικές γραμμές ή γραμμές ροής, που σημειώνονται με διακεκομμένες στο σχήμα 10.15, είναι ορθογώνιες στις ισοδυναμικές γραμμές.



Σχήμα 10.15:

6. Βρείτε τη χωρητικότητα του πυκνωτή που σχηματίζεται από τους δύο κυλινδρικούς αγωγούς του προηγούμενου προβλήματος.

Λύση

Αν Γ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη που περικλείει τον εσωτερικό αγωγό και q είναι το φορτίο αυτού του αγωγού, έχουμε από το θεώρημα του Gauss

$$\int E_n ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r} \right\} d\theta = \frac{2\pi(\Phi_1 - \Phi_2)}{\ln(r_2/r_1)} = 4\pi q.$$

Συνεπώς $q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2 \ln(r_2/r_1)}$ και

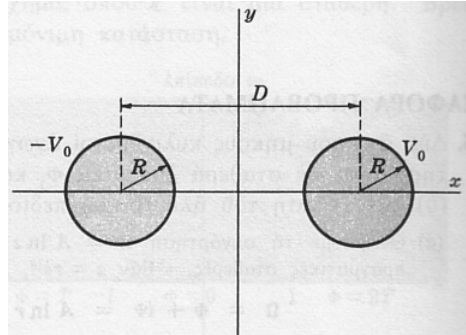
$$C(\text{χωρητικότητα}) = \frac{\text{φορτίο}}{\text{διαφορά δυναμικού}} = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{1}{2 \ln(r_2/r_1)}$$

που εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του συστήματος των αγωγών. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει όταν ο χώρος μεταξύ των κυλίνδρων είναι κενός. Εάν είναι γεμάτος από υλικό με διηλεκτρική σταθερά k , πρέπει και αντικαταστήσουμε το q με q/k . Στην περίπτωση αυτή η χωρητικότητα γίνεται $1/[2k \ln(r_2/r_1)]$.

7. Δύο κυλινδρικοί αγωγοί άπειρου μήκους έχουν ο καθένας ακτίνα R και τα κέντρα τους απέχουν απόσταση D το ένα από το άλλο (μεγαλύτερη της διαμέτρου του καθενός, σχήμα). Εάν διατηρούνται σε δυναμικά V_0 και $-V_0$ υπολογίστε

- (α') το φορτίο καθενός (ανά μονάδα μήκους) και
 (β') τη χωρητικότητα του πυκνωτή που σχηματίζουν.

Λύση



Σχήμα 10.16:

- (α') Μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε κυλινδρικό αγωγό σαν μια ισοδυναμική επιφάνεια με συγκεκριμένο δυναμικό. Θέτοντας $a = -V_0$ και $a = V_0$ (και επειδή $k = 2q$) βρίσκουμε ότι τα κέντρα των κύκλων είναι στα σημεία

$$x = -a \coth(V_0/2q) \text{ και } x = a \coth(V_0/2q)$$

από όπου

$$D = 2a \coth(V_0/2q). \quad (10.8)$$

Η ακτίνα κάθε κύκλου είναι

$$R = a \cdot \operatorname{cosech}(V_0/2q). \quad (10.9)$$

Διαιρώντας τις 10.8 και 10.9 βρίσκουμε $2 \cosh(V_0/2q) = D/R$ και το ζητούμενο φορτίο είναι $q = \frac{V_0}{2 \operatorname{arccosh}(D/2R)}$.

- (β')

$$C(\text{χωρητικότητα}) = \frac{\text{φορτίο}}{\text{διαφορά δυναμικού}} = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{1}{2 \ln(r_2/r_1)}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει όταν ο χώρος γύρω από τους αγωγούς είναι κενός. Αν είναι γεμάτος με υλικό διηλεκτρικής σταθεράς k , τότε το αποτέλεσμα πρέπει να διαιρεθεί με k . Ας σημειωθεί ότι η χωρητικότητα εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του συστήματος. Η έκφραση της χωρητικότητας που βρήκαμε έχει μεγάλη σημασία στη μεταφορά ενέργειας.

Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas. *Complex Variables: Introduction and Applications* (Υπό μετάφραση από τις Παν. Εκδ. Κρήτης). Cambridge University Press, 1997.
- [2] A. Angot. *Compléments de Mathématiques*. Masson, Paris, 1972.
- [3] J. Back and D. J. Newman. *Μιγαδική Ανάλυση*. Leader Books, Αθήνα, 2004.
- [4] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.
- [5] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Βασική Μιγαδική Ανάλυση*. Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1994.
- [6] G. Polya and G. Latta. *Complex Variables*. Wiley, New York, 1974.
- [7] M. R. Spiegel. *Μιγαδικές Μεταβλητές*. Schaum's Outline Series, ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1980.
- [8] Ν. Αρτεμιάδης. *Μιγαδική Ανάλυση*. Αθήνα, 1992.
- [9] Ε. Γαλανής. *Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*. Εκδ. Συμεών, Αθήνα, 1994.
- [10] Σ. Μερκουράκης και Τ. Χατζηαφράτης. *Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση*. Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 2005.
- [11] Σ. Τερσένοβ. *Αναλυτικές Συναρτήσεις και Μερικές Εφαρμογές τους*. Διάυλος, Αθήνα, 1995.
- [12] Α. Τσαρπαλιάς, Τ. Χατζηαφράτης. *Αναλυτικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*. Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 2000.