14º ΜΑΘΗΜΑ

03-12-14

$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$ (ομογενές σύστημα με σταθ. συντελεστές)

A απλής δομής $A \in R^{n\times n}$ (πίνακας με πραγματικούς αριθμούς)

$\lambda \in \sigma(A)$

$\downarrow$

$\vec{u}$ ιδιοδιάνυσμα

$\downarrow$

$e^{\lambda t}\vec{u}$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

① Ιδιοτιμές

$\det(A - \lambda I_3) = 0$

$(1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad (\tau_1 = d_1 = 1)$ $\tau = d$ απλής δομής

$\lambda_2 = 3 \quad (\tau_2 = d_2 = 1)$

$\lambda_3 = -2 \quad (\tau_3 = d_3 = 1)$

② Ιδιοδιανύσματα

$\lambda_1 = 1$

$(A - \lambda_1 I_3)\vec{u}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-u_2 + 4u_3 = 0$

$3u_1 + u_2 - u_3 = 0$

$2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$

$v_1 = -v_3$

$v_2 = 4v_3$

Δίνω μια βολική τιμή σε κάποιο και βρίσκω τα υπόλοιπα π.χ. (ΠΡΟΣΟΧΗ ΜΗ ΓΙΝΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΜΗΔΕΝ)

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = v_3$

$v_2 = 2v_3$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$w_1 = -w_3$

$w_2 = w_3$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③ λύσεις

$$\vec{\varphi}_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_3(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{\varphi}_1(t) + c_2\vec{\varphi}_2(t) + c_3\vec{\varphi}_3(t)$$

παράδειγμα 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

① ιδιοτιμές

$\det(A - \lambda I_3) = 0$

$\lambda_1 = 1 \qquad r_1 = d_1 = 1$

$\lambda_2 = -2 \qquad r_2 = 2$ Αν $r_2 = d_2$ είναι απλώς ημιαπλός

$d_2 = 3 - \text{rank}(A - \lambda_2 I_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 1$$

Άρα $d_2 = 2$ Άρα απλώς ημιαπλός

$r_2 = 2$

② Ιδιοδιανύσματα

$\lambda_1 = 1 \qquad (A - \lambda_1 I_3)\vec{u}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 = u_2 = u_3$

$\vec{\varphi}_1(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2 \qquad (A - \lambda_2 \mathbb{I}_3)\vec{u}_2 = \vec{0}$

$\vec{v}_{\theta} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad v_1 + v_2 + v_3 = 0$ (επιλέγουμε κάτι που να μας βολεύει π.χ.)

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ το $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ίδιο με το πρώτο (γραμ. εξαρτ.)

$\vec{\varphi}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\varphi}_3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

$\lambda = a + i\beta, \quad a, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0$ με $\tau \geq d$

$\bar{\lambda} = a - i\beta$

$\vec{u} \in \mathbb{C}^n - \{\vec{0}\} : (A - \lambda \mathbb{I})\vec{u} = \vec{0}$

$\bar{\vec{u}} \longmapsto \bar{\lambda}$

$\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\vec{u}$ μιγαδική λύση της Δ.Ε.

$\vec{\varphi}(t) = \vec{v}(t) + i\vec{w}(t) \qquad \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, Αν λύση της $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$

τότε $\vec{V}(t)$, $\vec{W}(t)$ πραγματικές λύσεις της
$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$ (γραμμ. ανεξ.)
(Από μια πήραμε 2 λύσεις και η συζυγής θα δίνει 2 λύσεις ίδιες με αυτές άρα από αυτήν και την συζυγή παίρνουμε 2 λύσεις)

$$e^{\lambda t} = e^{(a+i\beta)t} = e^{at}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
$$\vec{u} = \vec{x} + i\vec{z}$$

Σε 3x3 το πολύ να έχουμε 2 μιγαδικά (μιγαδική + συζυγή + πραγματική)

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① Ιδιοτιμές
$\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$
$\lambda_1 = 1$ $\quad r_1 = d_1 = 1$ Απλής
$\lambda_{2,3} = 1 \pm i$ $\quad r_3 = r_2 = d_2 = d_3 = 0$ ίσως

$\lambda_1 = 1$ $\quad (A - \lambda_1 \mathbb{I})\vec{u}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_2 = u_3 = 0$
Αναγκαστικά $u_1 \neq 0$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1 + i$
$(A - \lambda_2 \mathbb{I})\vec{u}_2 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -iV_1 &= 0 \\ -iV_2 - V_3 &= 0 \\ V_2 - iV_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= iV_3 \end{aligned}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}(t) = e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \cdot e^{it}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i\sin t)\cdot$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = e^t\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i e^t\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i e^t\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-e^t\sin t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \vec{\varphi}_2(t) + i\vec{\varphi}_3(t)$$

γενική λύση :

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -c_2\sin t\, e^t \\ c_2\cos t\, e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_3\cos t\cdot e^t \\ c_3\sin t\, e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_3 e^t\cos t - c_2 e^t\sin t \\ c_3 e^t\sin t + c_2 e^t\cos t \end{pmatrix}$$

Όμως έχουμε αρχική συνθήκη :

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΗ ΑΠΛΗΣ ΔΟΜΗΣ

$\exists \lambda \in \sigma(A) : d < \tau$

$d = n - \text{rank}(A - \lambda I)$

↳ πλήθος γραμμ. ανεξ. ιδιοδιανυσμάτων

Λείπουν $\tau - d$ λύσεις (γραμμ. ανεξάρτητες)

$\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης k

Αν $(A - \lambda I_n)^k \vec{v} = \vec{0}$ & $(A - \lambda I_n)^{k-1} \neq \vec{0}$ $k \in \mathbb{N}$

$A^2 = A \cdot A$ (πίνακες)

Για $k = 1$: απλό ιδιοδιάνυσμα

e^{At} (A $n \times n$ πίνακας)

① e^{At} είναι πίνακας και ορίζεται ως εξής

$$e^{At} = I_n + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

πιο σωστός ορισμός

② $e^{At} = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(0)$

Έστω $\vec{y}'(t) = A y(t)$, $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ | $\vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$, $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$

$$\vec{y}_{ομ}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{y}_0 \qquad \vec{y}(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{y}_0}_{\vec{y}_{ομ}(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \cdot \vec{b}(s)\, ds$$

γεν. ιδιοδ. τάξης k (ιδιοτιμής λ)

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} \left[\vec{v} + t (A - \lambda I_n) \vec{v} + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda I)^2 \vec{v} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda I_n)^{k-1} \vec{v} \right]$$

(τερματίζει στο $k-1$)