13ο ΜΑΘΗΜΑ

28-11-14

$$ay'' + \beta y' + \gamma y = 0 \qquad a,\beta,\gamma > 0$$

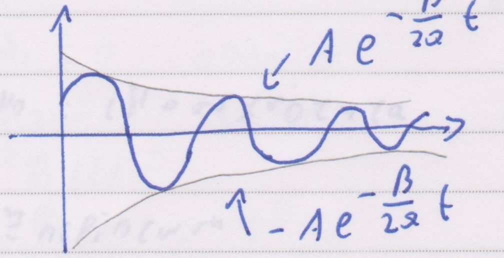
① $\beta^2 - 4a\gamma < 0$ υποαπόσβεση

$$y(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2a}t}\cos(\mu t - \varphi)$$

$\mu = \dfrac{\sqrt{4a\gamma-\beta^2}}{2a}$ ημισυχνότητα, $T_d = \dfrac{2\pi}{\mu}$ ημιπερίοδος

$$\left(\omega_0^2 = \frac{\gamma}{a}, \quad T = \frac{2\pi}{a\gamma} : \beta = 0\right)$$

$\omega_0$ συχνότητα $\qquad$ περίοδος




$$\frac{\mu}{\omega_0} = \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4a\gamma}} \simeq 1 - \frac{\beta^2}{8a\gamma}$$ για μικρό β

$$1-p \simeq (1-p/2)^2 = 1-p+\frac{p^2}{4}$$ για μικρά p

$$\frac{T_d}{T} = \left(\sqrt{1-\frac{\beta^2}{4a\gamma}}\right)^{-1} \simeq 1+\frac{\beta^2}{8a\gamma}$$

$$\frac{1}{1-p} = 1+p+p^2+\dots \simeq 1+p+p^2 \simeq 1+p+\frac{p^2}{4} = \left(1+\frac{p}{2}\right)^2$$

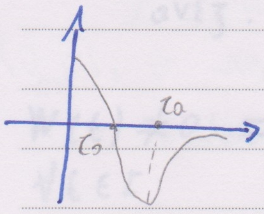
$$\sqrt{\frac{1}{1-p}} \simeq 1+\frac{p}{2}$$

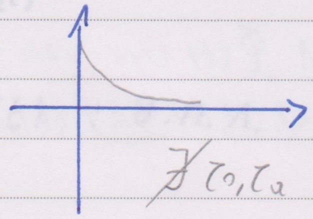
② $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ κρίσιμη απόσβεση

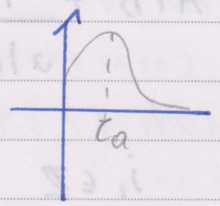
$y(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t}$ $(\beta = b)$

Το πολύ ένα σημείο μηδενισμού (ρίζα): $t_0 = -\frac{A}{B}$

Το πολύ ένα ακρότατο (παράγωγος = 0): $t_a = \frac{2a}{b} + t_0$




③ $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ υπεραπόσβεση

$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2\alpha}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}\right)$

$t_0, t_a$

---

$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = h$ , $h$ σταθ.

$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$
$\downarrow$
$y_{ομ}(t)$

$y(t) = y_{ομ}(t) + \frac{h}{\gamma}$

---

$\alpha y'' + \gamma y = h\sin(\sigma t)$ $h$ σταθ (b = 0 δεν έχει απόσβεση)

$\alpha, \gamma > 0$

$w_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$

$\alpha y'' + \gamma y = 0$

$y_{ομ}(t) = A\cos(w_0 t) + B\sin(w_0 t)$

$i)\ \omega_0 \neq \sigma$

$$y(t) = y_{o\mu}(t) - \frac{h}{a(\sigma^2-\omega_0^2)} \sin(\sigma t)$$

· φραγμένη

$$|y(t)| \leq A+B + \frac{|h|}{a|(\sigma^2-\omega_0^2)|}$$

· $\sigma = j_1 \tau$ $\quad j_1 \in \mathbb{Z}$ $\quad , \tau \in R$

$\omega_0 = j_2 \tau$ $\quad j_2 \in \mathbb{Z}$

$y$ : περιοδική με $\frac{2\pi}{\tau}$ περίοδο

$ii)\ \omega_0 = \sigma = \sqrt{\frac{\gamma}{a}}$

$$y(t) = y_{o\mu}(t) - \frac{h}{2a\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$$

"συντονισμός" (μη φραγμένη) (πέφτει γέφυρα κ.ο.κ.)

—

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΔΕ $1^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

Διανυσματικές εξισώσεις $\quad$ συνεχής $\quad t \in I \subset R$

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$A(t) \in R^{n\times n}$ (πίνακας), $\vec{b}(t) \in R^n$ συνεχής

μη ομογενής

$t_0 \in I$, $\vec{y}_0 \in R^n$ $\qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$

→ το π.α.τ. έχει ακριβώς μια λύση

$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)$ $\qquad A(t) \in R^{n\times n}$ (πίνακας)

$\Lambda_0$ το σύνολο των λύσεων της ομογενούς (μη κενό μηδενική λύση)

· $\Lambda_0 \neq 0$

· $\Lambda_0$: διανυσματικός χώρος

· $\dim \Lambda_0 = n$

$\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t) \in \Lambda_0$ $\quad$ αν είναι γρ. ανεξ. δίνουν

$\vec{y}(t)$ : τυχούσα λύση : $\vec{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{\varphi}_j(t)$ $\qquad c_j$ σταθ.

$\Phi(t) = [\vec{\varphi}_1(t) : \vec{\varphi}_2(t) : \ldots : \vec{\varphi}_n(t)]$ πινακας λύσεων

(μπορει να έχω την ίδια λύση $\overset{2 \text{ εως } n}{\sqrt{}}$ φορες)

$W(\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n)(t) = \det \Phi(t)$

$\Phi$ : θεμελιώδης πιν. λύσεων αν αποτελειται από γραμμ. ανεξ. λύσεις

$W(t) \neq 0 \Rightarrow \Phi(t)$ : θ.π.λ.

$\forall t \in I$

Διχοτομία

· $W(t) = 0 \ \forall t$

ή · $W(t) \neq 0 \ \forall t$

$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)$ , $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i, j \le n}$ , $t \in I$ $a_{ij} : I \to R$ συνεχής

$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ , $t_0 \in I$ , $\vec{y}_0 \in R^n$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in R^n$

$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c} \Rightarrow$

$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ $\vec{y}_0$

$\overset{\shortparallel}{\Phi(t_0)\vec{c}}$

$\vec{y}_0 = \Phi(t_0)\vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0$

$\Rightarrow \vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0$ $\Phi$ : θ.π.λ.

Έστω $\Psi(t)$ θεμελ. πινακας λύσεων

$\left.\begin{array}{l} \cdot \Phi : \text{θ.π.λ.} \\ C \in R^{n \times n}, \det C \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi(t)C$ : θ.π.λ

$\cdot \Phi, \Psi$ : θ.π.λ. $\Rightarrow \exists C \in R^{n \times n}$ : $\det C \neq 0$ έτσι ώστε $\Phi(t) = \Psi(t)C$

$G(t,t_0) \equiv \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)$ : επιλύων πίνακας (πίνακας μεταφοράς κατάστασης)

Άρα $\vec{y}(t) = G(t,t_0)\,\vec{y}_0$

Ιδιότητες του $G$

1) ανεξ της επιλογής του θ.π.λ $\Phi(t)$ (για άλλο $\Phi$ θα βρω το ίδιο $G$)

2) λύνει της (ομογ) Δ.Ε. $\dfrac{\partial G(t,t_0)}{\partial t} = A(t)\,G(t,t_0)$

3) $G(t,t) = I_n$

4) $G^{-1}(t,t_0) = G(t_0,t)$

5) $G(t_2,t_0) = G(t_2,t_1)\,G(t_1,t_0)$

—

$\vec{y}\,'(t) = A(t)\,\vec{y}(t) + \underbrace{\vec{b}(t)}_{\text{μη ομογεν.}}$

$\vec{y}(t_0) = y_0$

$$\vec{y}(t) = \underbrace{G(t,t_0)\,\vec{y}_0}_{y_{om}(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\vec{b}(s)\,ds}_{\text{ειδική λύση μη ομογ.}}$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int_0^t y_1(s)\,ds \\ \int_0^t y_2(s)\,ds \end{pmatrix}$$

—

$y'(t) = A\,y(t)$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ : σταθ

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\lambda$ : ιδιοτιμή ($\lambda \in \sigma(A)$)

$\vec{u}$ : ιδιοδιάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{C}^n - \{\vec{0}\}$ : αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow (A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$

$\exists$ μη μηδενικές λύσεις : $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$\lambda \in \sigma(A)$ : τ: αλγεβρική πολλαπλότητα

d: γεωμ πολλ/τα: πλήθος γραμ ανεξάρτητων ιδιοδ. της $\lambda \in \sigma(A)$

$1 \le d \le \tau$

$r = \text{rank}(A - \lambda I_n)$

$d = n - r$

αν

- για όλες τις ιδιοτιμές ισχύει $d = \tau$ : ο A λέγεται "απλής δομής"
- αν $\exists\, \lambda \in \sigma(A) : d < \tau$ τότε ο A λέγεται "μη απλής δομής"

Βήματα

1. Εύρεση ιδιοτιμών του A
   Έλεγχος αν ο A είναι απλής δομής
2. Εύρεση αντιστοίχων ιδιοδιανυσμάτων
3. Εύρεση αντιστοίχων λύσεων
   $\lambda, \vec{u} \rightarrow \vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t} \vec{u}$

/* $\vec{u}_j$

$\vec{\varphi}_j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{u}_j$

$\vec{\varphi}_j(0) = \vec{u}_j$

*/