12ο ΜΑΘΗΜΑ

21-11-14

$y'' + \alpha y' + \beta y = f(t)$ α, β σταθ.

f "ειδικής μορφής" (πολυώνυμα - $e^{\kappa t}$ - sin - cos)

Μέθοδος απροσδιορίστων μεταβλητών

- αντίστοιχη ομογενής

  $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$

  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$: γρ. ανεξ. λύσεις

- ειδική λύση μη ομογενούς

  $\psi(t)$ (εξαρτάται από την τιμή της $f(t)$ (πινακάκι))

  * Διορθώσεις (μόνο αν δεν είναι λύση της ομογενούς)

Αρχή της υπέρθεσης

$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$

① Αντίστοιχη ομογ.

$y'' - 4y' + 4y = 0$

χαρ. εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$ διπλή ρίζα

$\varphi_1(t) = e^{2t}$, $\varphi_2(t) = t e^{2t}$

$y_{o\mu}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{2t}$ c_1, c_2 αυθ. σταθ.

② ειδική λύση της μη ομογ.

"υποψήφια"

$\psi(t) = \alpha e^{2t}$

1η διόρθωση : $\tilde{\psi}(t) = t\psi(t) = \alpha \cdot t e^{2t}$

2η διόρθωση : $\hat{\psi}(t) = t\tilde{\psi}(t) = \alpha \cdot t^2 e^{2t}$

Αντικαθιστώ στην μη ομογενή Δ.Ε.

$\hat{\psi}'(t) = \alpha 2t e^{2t} + \alpha t^2 2e^{2t} = \alpha e^{2t} (2t + 2t^2)$

$\hat{\psi}''(t) = 2\alpha e^{2t} + 2\alpha\, 2t e^{2t} + 2\alpha t\, 2e^{2t} + 2\alpha t^2\, 2e^{2t}$

$\alpha e^{2t}(2 + 8t + 4t^2)$

αριστερο μέλος $= 2a e^{2t}$
δεξί μέλος $= e^{2t}$ $\Big\} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$

$y'' + k^2 y' = \cos(at)$

① Αντιστ. ομογενής
$y'' + k^2 y' = 0$
$y_{ομ}(t) = c_1 \underbrace{\cos kt}_{\varphi_1(t)} + c_2 \underbrace{\sin kt}_{\varphi_2(t)}$

② Ειδική λύση μη ομογ.
i) $\psi(t) = A\cos(at) + B\sin(at)$ για $k^2 \neq a^2$
ii) $\tilde{\psi}(t) = \tilde{A}t\cos(at) + \tilde{B}t\sin(at)$ για $k^2 = a^2$

$k^2 \neq a^2$: $\psi(t) = \frac{1}{k^2 - a^2}\cos(at)$

$k^2 = a^2$: $\tilde{\psi}(t) = \frac{t}{2a}\sin(at)$

Ασκήσεις για το σπίτι (Α.Σ.Τ.Σ) συνεχής στο $0, \infty$

① $y'' + ay' + \beta y = f(t)$, $t \geq 0$, $f \in C[0, +\infty)$, a, β σταθ.
λ_1, λ_2 ρίζες της χαρ. εξ. της αντιστ. ομογενούς δ.ε.
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ & $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ $j = 1, 2$
Τότε: πραγματικό μέρος (είναι είτε αρνητ. πραγματικές είτε μιγαδ. με αρνητικό πραγμ. μέρος)
f: φραγμένη $\Rightarrow$ όλες οι λύσεις της μη ομογ. δ.ε φραγμένες

Lagrange

$y^{n}(t) + a_1^{(t)} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}^{(t)} y'(t) + a_n^{(t)} y(t) = f(t)$ ας εξ συν
μη σταθ.

Για να έχουμε Π.Α.Τ πρέπει να ξέρουμε

$$\left.\begin{array}{l} y(t_0) = \\ y'(t_0) = \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{array}\right\} \text{n συνθήκες γνωστές}$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & & \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(t)$$

n τάξης με σταθ. συντ.

$y^{n}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t)$

Αντιστ. ομογ.

$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_0 = 0$

Έστω λ ρίζα της χαρακτ. εξ

① $\lambda \in R$: απλή ρίζα $\rightarrow \varphi(t) = e^{\lambda t}$

② $\lambda \in R$: ρίζα αλγεβρικής πολλαπλότητας $k \in N$, $k > 1$

$\varphi_1 = e^{\lambda t}$

$\varphi_2 = t e^{\lambda t}$

$\varphi_3 = t^2 e^{\lambda t}$

$\vdots$

$\varphi_k = t^{k-1} e^{\lambda t}$

③ $\lambda = \sigma \pm i\zeta \in C$ $\sigma, \zeta \in R$ απλή ($\lambda = \sigma + i\zeta$ και η $\bar{\lambda}$ ρίζα) $e^{\lambda t}$

$\varphi_1(t) = e^{\sigma t} \cos(\zeta t)$, $\varphi_2(t) = e^{\sigma t} \sin(\zeta t)$

④ $\lambda = \sigma \pm i\zeta \in C$ $\sigma, \zeta \in R$ με αλγ. πολ. k, $k \in N$, $k > 1$

$t e^{\sigma t} \cos(\zeta t)$, $t e^{\sigma t} \sin(\zeta t)$

$t^2 e^{\sigma t} \cos(\zeta t)$, $t^2 e^{\sigma t} \sin(\zeta t)$

$\vdots$

$t^{k-1} e^{\sigma t} \cos(\zeta t)$, $t^{k-1} e^{\sigma t} \sin(\zeta t)$

$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$

χαρ. $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_{2,3} = 1 \pm i$

$\lambda_1 = 2 \to \varphi_1(t) = e^{2t}$

$\lambda_2 = 1+i \to \varphi_2(t) = e^t \cos t$

$\lambda_2 = 1+i \to \varphi_3(t) = e^t \sin t$

$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3(t)$

$y'''' - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

χαρ. εξ. $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$ απλή

$\lambda_2 = 1$ τριπλή

$\varphi_1(t) = 1$

$\varphi_2(t) = e^t$

$\varphi_3(t) = t e^t$

$\varphi_4(t) = t^2 e^t$

$y''''' - 6y'''' + 16y''' \cancel{+16} - 24y'' + 20y' - 8y = 0$

$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 16\lambda^3 - 24\lambda^2 + 20\lambda - 8 = 0$

$\lambda_1 = 2$ ~~[illegible]~~ απλή $\to \varphi_1(t) = e^{2t}$

$\lambda_{2,3} = 1 \pm i$ διπλές (4 λύσεις)

$\lambda_2 = 1+i$

$\varphi_2(t) = e^t \cos t$

$\varphi_3(t) = e^t \sin t$

$\varphi_4(t) = t e^t \cos t$

$\varphi_5(t) = t e^t \sin t$

Ηλεκτρικά κυκλώματα

Ρεύμα $I = I(t)$

Αντίσταση : $R>0$ θετικό

Χωρητικότητα (πυκνωτές) $C>0$

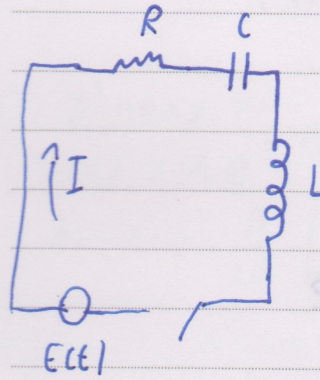
Επαγωγή : $L>0$

Πηγή : $E = E(t)$

Ολικό φορτίο : $Q = Q(t)$

$I(t) = Q'(t)$

2ος νόμος Kirchhoff :



$$E(t) = L I'(t) + R I(t) + \frac{1}{C} Q(t) \Rightarrow$$

$$L Q''(t) + R Q'(t) + \frac{1}{C} Q(t) = E(t)$$

$Q(t_0) = q_0$

$Q'(t) = I(t_0) = i_0$

Μηχανικές ταλαντώσεις

Κατακόρυφο ελατήριο

αρχικού μήκους l

μάζα σφαιριδίου m

επιμήκυνση L

Νόμος Hooke

$mg = kL \quad (k>0)$

Επί του σφαιριδίου δρα κατακόρυφη εξ. δύναμη

που προκαλεί μετατόπιση $u(t)$

αντίσταση : $-\gamma u'(t)$, $\gamma>0$

Εξ. δύναμη : $F(t)$

νόμος Newton $mu'(t) = F(t)$

$m u''(t) + \gamma u'(t) + k u(t) = F(t)$

$u(t_0) = u_0$ (u μετατόπιση)

$u'(t_0) = u_1$

$a y''(t) + \beta y'(t) + \gamma y(t) = f(t)$ $\quad a, \beta, \gamma > 0$ σταθ. f συνεχής

$y(t_0) = y_0$

$y'(t_0) = y_1$

1η περίπτωση

$f(t) \equiv 0$, $\beta = 0$, $a, \gamma > 0$ (ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση)

$$y'' + \frac{\gamma}{a} y(t) = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{a} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{\gamma}{a} = \omega_0^2 > 0$$

$$y(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Έχουμε περιοδική κίνηση με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

ω_0 : ιδιοσυχνότητα ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών

2η περίπτωση

$f(t) \equiv 0$ $\quad a, \beta, \gamma > 0$ (ελευθ. ταλαντ. με απόσβεση)

$$y'' + \underset{>0}{\boxed{\frac{\beta}{a}}} y' + \underset{>0}{\boxed{\frac{\gamma}{a}}} y = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$ (το όριο της λύσης πάει στο 0)

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2a}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a\gamma}{\beta^2}}\right)$$

2i $\beta^2 - 4a\gamma < 0$: υποαπόσβεση

2ii $\beta^2 - 4a\gamma = 0$: κρίσιμη απόσβεση

2iii $\beta^2 - 4a\gamma > 0$: υπεραπόσβεση

κανα χαρακτ.

3 $f \not\equiv 0$

3i $f(t) = h$ σταθ.

3ii) $f(t) = h \sin(\upsilon t)$

$\uparrow$ σταθ.

$\beta = 0$