11ο ΜΑΘΗΜΑ
19-11-14

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$$

Αντιστοιχη ομογενης:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

Αν ψ : ειδική λύση της μη ομογε?

φ_1, φ_2 : γραμ. ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς !!!

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{γενικη λύση} \\ \text{μη ομογ}}}{y(t)} = \underbrace{c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)}_{\text{γενική λύση ομογενους}} + \psi(t),$$

c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές

$$\psi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$$

$c_1(t), c_2(t)$ παραγ. συναρτ. προς προσδιορισμο

$$c_1'(t) = -\frac{\varphi_2(t) f(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2)(t)}$$

$$c_2'(t) = \frac{\varphi_1(t) f(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2)(t)}$$

$$c_1(t) = -\int^t \frac{\varphi_2(s) f(s)}{W(s)} ds$$

$$c_2(t) = \int^t \frac{\varphi_1(s) f(s)}{W(s)} ds$$

λύνω πρώτα την ομογενη (σταθερού όρους - euler - έχω μία απο τις δύο λύσεις)

$y'' + y = \tan t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

① $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$y_{o\mu}(t) = c_1 \underbrace{\cos t}_{\varphi_1(t)} + c_2 \underbrace{\sin t}_{\varphi_2(t)}$ $\quad c_1, c_2$: αυθ. σταθερές

② $\varphi(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$

$c_1'(t) = -\dfrac{\sin(t) \cdot \tan t}{1}$

$c_2'(t) = \dfrac{\cos t \cdot \tan t}{1}$

$c_1(t) = \int c_1'(t) = -\int \sin t \cdot \tan t \, dt = -\int \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \rightsquigarrow$

$c_2(t) = \int c_2'(t) = \int \sin t \, dt = -\cos t$ (παίρνουμε σταθερό όρο με μηδέν)

$\rightsquigarrow + \int \dfrac{\cos^2 t - 1}{\cos t} dt = \int \cos t \, dt - \int \underbrace{\dfrac{dt}{\cos t}}_{\text{Ἰσ } s = \tan\frac{t}{2}} = \eta\mu t - \ln\left(\tan t + \dfrac{1}{\cos t}\right)$

③ $y(t) = \ldots$

$t^2 y'' - 2t y' + 2y = 6t^4, \quad t > 0$

① Αντιστ. ομογενής

$t^2 y'' - 2t y' + 2y = 0, \quad t > 0$

Euler

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \; \Big\langle \; \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \to \varphi_1(t) = t \\ \lambda_2 = 2 \to \varphi_2(t) = t^2 \end{array}$

$y_{o\mu}(t) = c_1 t + c_2 t^2 \quad , \; t > 0 \qquad c_1, c_2$ αυθ. σταθ.

② Ευρεση ειδικης λύσης της μη ομογ.

$\varphi(t) = c_1(t)\, t + c_2 t^2$

$y'' - \frac{2}{t} y' + \frac{2}{t^2} = 6t^2 \quad , \; t > 0$ θα πάρω αυτήν σαν f

$c_1'(t) = -\frac{t^2 \cdot 6t^2}{W(\varphi_1, \varphi_2)} = -6t^2$

$c_2'(t) = \frac{t \cdot 6t^2}{W(\varphi_1, \varphi_2)} = 6t$

$W = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2 \neq 0 \quad , \; t > 0$

$c_1(t) = -2t^3$
$c_2(t) = 3t^2$

$\varphi(t) = t^4$

③ $y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + t^4 \qquad t > 0$

Ασκήσεις για το σπίτι

1) $(1+t^2) y'' - 2t y' + 2y = 6(1+t^2) \quad t > 0 \quad , \; \varphi_1(t) = t$ λύση της αντ. ομογενους

2) $t^2 (t+2) y'' + 2t y' - 2y = (t+2)^2 \; , \; t > 0 \; , \; \varphi_1(t) = t$ λύση της αντ. ομογ.

3) $y'' + p(t) y' + q(t) y = 0 \qquad , \; t > -1 \qquad p, q$ συνεχείς
$\varphi_1(t) = (1+t)^2$ λύση

Η ορίζ. Wronski 2 οποιωνδήποτε λύσεων είναι σταθερή

Να λυθεί η Δ.Ε.

$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 1+t \qquad , \quad t > -1$

$y'' + y' + y = t^2$

Όταν πάμε να λύσουμε την μη ομογ.
θα υπολογίζουμε ολοκλ. της μορφής (με μέθοδο Lagrange)

$\psi(t): \int t^2 e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) dt$

Οπότε θα θέλαμε να έχουμε μια μέθοδο που δεν θα χρειάζεται ολοκληρώματα (η οποία όμως θα είναι πιο ασθενής)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ψ: ειδική λύση της μη ομογ.

$y'' + a y' + \beta y = f(t)$ $\quad a, \beta$: σταθερές (μέθοδος περιορισμός)

$y'' + a y' + \beta y = 0$

φ_1, φ_2 γραμμ. ανεξ. λύσεις της ομογ.

$$\underbrace{y(t)}_{\text{γεν. λύση μη ομογ.}} = \underbrace{c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)}_{\text{γενική λύση αντιστ. ομογ.}} + \psi(t)$$

c_1, c_2 : σταθ.

$f(t)$		$\psi(t)$ (ειδική λύση)
$\sum_{k=0}^{m} a_k t^k e^{\mu t}$	μ, m, a_k γνωστά	$\sum_{k=0}^{m} \beta_k t^k e^{\mu t}$, β_k αγν. σταθερά
$\sum_{k=0}^{m} a_k t^k e^{\mu t} \sin(\lambda t)$	$\{m, \mu, \lambda$ γνωστά$\}$	$\sum_{k=0}^{m} \beta_k t^k e^{\mu t} \sin(\lambda t) + \sum_{k=0}^{m} \gamma_k t^k e^{\mu t} \cos(\lambda t)$
$\sum_{k=0}^{m} a_k t^k e^{\mu t} \cos(\lambda t)$	μ, m, λ, a_k γνωστά	β_k, γ_k : σταθερές άγνωστες

$y'' + \alpha y' + \beta y = e^{\mu t}$ $\quad m=0 \;,\; \alpha_0 = 1$

$\psi(t) = \beta_0 e^{\mu t}$ αντικαθιστώ στην Δ.Ε.

$\beta_0 \underbrace{(\mu^2 + \alpha\mu + \beta)}_{\neq 0} e^{\mu t} = e^{\mu t}$

$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$

$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ $\quad \lambda_1 \to e^{\lambda_1 t}$, $\quad \lambda_2 \to e^{\lambda_2 t}$

$\beta_0 = \dfrac{1}{\mu^2 + \alpha\mu + \beta}$

Αν $\mu = \lambda_1$ ή $\mu = \lambda_2$ Άτοπο

η $\psi(t) = \beta_0 e^{\mu t}$ δεν είναι λύση οπότε τη παίρνουμε σαν λύση:

$\tilde{\psi}(t) = t\beta_0 e^{\mu t}$

Αν είχαμε $\lambda_1 = \lambda_2$ (διπλή ρίζα) τότε η $\tilde{\psi}(t)$ θα είχε πρόβλημα και θα πάρουμε

$\hat{\psi}(t) = t^2 \beta_0 e^{\mu t}$

$y'' + y' + y = t^2$ έχει σταθ. όρους t πολυώνυμο στο δεξί μέλος άρα

1) αντιστ. ομογ.

$y'' + y' + y = 0$

Χαρακτ. εξίσωση $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi_1(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

$\varphi_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

② Εύρεση ειδ. λύσης της μη ομογ.
· ομογ → σταθ. συνεχή.
· $f(t) = t^2$, πολυώνυμο
$m=2$ $(\mu=0)$
$a_2 = 1$
$a_1 = a_2 = 0$

αναζητώ ειδική λύση
$\psi(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$ ①
όπου
b_0, b_1, b_2 σταθερές προς προσδιορισμό

$(b_2 t^2 + b_1 t + b_0)'' + (b_2 t^2 + b_1 t + b_0)' + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 = t^2 \Rightarrow$
$2b_2 + 2b_2 t + b_1 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 = t^2 \Rightarrow$
$b_2 t^2 + (b_1 + 2b_2) t + (b_0 + b_1 + 2b_2) = t^2 , \forall t$

Άρα
$$\left.\begin{aligned} 2b_2 + b_1 + b_0 &= 0 \\ 2b_2 + b_1 &= 0 \\ b_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b_2 &= 1 \\ b_1 &= -2 \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$ ⓘⓘ

Άρα ①, ⓘⓘ $\Rightarrow \psi(t) = t^2 - 2t$

-

$y'' - y' = 3t + 4\boxed{e^t}$ (πολυώνυμο + εκθετικό)

① Γενική λύση ομογενούς
$y_{o\mu}(t) = c_1 + c_2 e^t$

② Ειδική λύση της μη ομογ.
$\psi(t) = b_1 t + b_0 + \boxed{\gamma_0 e^t}$
η $\psi(t)$ περιέχει κομμάτι της γενικής λύσης της ομογενούς ①
Άρα θέλει διόρθωση
$\tilde{\psi}(t) = t(b_0 + b_1 t) + \gamma_0 t e^t$

$(b_0 t + b_1 t^2 + \gamma_0 t e^t)'' - (b_0 t + b_1 t^2 + \gamma_0 t e^t)' = 3t + 4e^t$

$(2b_1 - b_0) \quad -2b_1 t \quad + \gamma_0 e^t \quad = 3t + 4e^t$

$$\left.\begin{aligned} 2b_1 - b_0 &= 0 \\ -2b_1 &= 3 \\ \gamma_0 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b_0 &= -3 \\ b_1 &= -(3/2) \\ \gamma_0 &= 4 \end{aligned}$$

$\psi(t) = -3\left(1 + \frac{t}{2}\right)t + 4te^t$

Ερώτηση για το λινκκακι στο