10º ΜΑΘΗΜΑ

12-11-14

$y'' + ay' + \beta y = 0$

$a, \beta \in R$

- $\lambda^2 + a\lambda + \beta = 0$
- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R \rightarrow e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R \rightarrow e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$
- $\lambda_{1,2} = \underline{\gamma + i\delta} \quad \gamma, \delta \in R$

$\Downarrow$

$e^{\gamma t} \cos \delta t, \; e^{\gamma t} \sin \delta t$

Παραδείγματα

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

e^t, e^{2t} γραμμ. ανεξάρτητες

$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$

2) $y'' + y' + y = 0$

$\lambda^2 + \lambda \; 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right), \; e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right)$

3) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda = -2$ διπλή

$e^{-2t}, \; te^{-2t}$

$y(t) = e^{-2t} (c_1 + c_2 t)$

4) $y'' + \omega^2 y = 0$ αρμονικός ταλαντωτής

πχ. $y'' + 9y = 0$

$\lambda^2 + 9 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 3i$

$y(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t = A \sin(3t + \varphi)$

$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

$\varphi = \arctan \frac{c_1}{c_2}$ (τόσο ερμηνευομένης)

→ Κύμα { πλάτους: A
φάσης: φ

5) $y'' - \mu y = 0$, $\mu > 0$

$\lambda^2 - \mu = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\mu}$

$y(t) = c_1 e^{\sqrt{\mu} t} + c_2 e^{-\sqrt{\mu} t} = k_1 \sinh(\sqrt{\mu} t) + k_2 \cosh(\sqrt{\mu} t)$

υπερβολικό ημίτονο
↑ h = hyperbolic

$c_1 = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $c_2 = \frac{k_1 - k_2}{2}$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (υπερβολικό ημίτονο)

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Θέλουμε να βρεθεί $y \in C^2 [0,2]$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$y'' = y$, $t \in [0,1]$

$y'' = 9y$, $t \in [1,2]$

$y'' = y$: $y_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

$y'' = 9y$: $y_2(t) = c_3 e^{3t} + c_4 e^{-3t}$

$$\left.\begin{aligned} y_1(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y_1'(0) &= c_1 - c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} , \ c_2 = -\frac{1}{2}$$

$y_1(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

$y_1(1) = y_2(1) \Rightarrow$

$\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}) = c_3 e^3 + c_4 e^{-3} = c_3 e^3 + \frac{c_4}{e^{+3}}$ (1)

$y_1'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$
$y_2'(t) = 3c_3 e^{3t} - 3c_4 e^{-3t}$

$y_1'(t) = y_2'(t)$
$\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) = 3c_3 e^3 - 3\frac{c_4}{e^3}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow c_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^4}\right)$

$c_4 = \frac{1}{6}(e^4 - 2e^2)$

$y \in C^2$ συνεχης στην y ~~αρχικ~~ ~~παρ.~~ και στην y'

$y_1''(t) \neq y_2''(t)$ το $y \notin C^2$ αφου η 2η παραγωγος δεν ειναι συνεχης.

$y'' + ay' + \beta y = 0$ με $a > 0$, $\beta > 0$ (στο γενικο $a, \beta \in R$)

!!! Το όριο ∀ λύσης είναι 0
$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$

· $a^2 > 4\beta$ $\lambda_1, \lambda_2 \in R : \lambda_1 \neq \lambda_2$ $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\beta}}{2}$

Τύποι Vietta $\left(\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right)$

$\left. \begin{array}{ll} \lambda_1+\lambda_2 = -a & <0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \beta & >0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$

Άρα $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

• $a^2 < 4\beta$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ $\quad \lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$

$\gamma = -\frac{a}{2} < 0$

$y(t) = e^{\gamma t}\left(c_1 \cos(\delta t) + c_2 \sin(\delta t)\right)$

μηδενική x φραγμένη

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

• $a^2 = 4\beta$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2}$

$y(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left(c_1 + c_2 t\right)$

$\frac{t}{e^{a/2\, t}}$ = ρέει Αν παραγωγίσω de l Hospital

~~ρέει~~ $\frac{1}{\frac{a}{2} e^{a/2\, t}}$

Άρα $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$

Έστω εξίσωση της μορφής: (Εξίσωση Euler)

$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$, $t > 0$, α, β σταθ.

$((\rho t + \sigma \to t)$ ρ, σ σταθ.$)$

και θέτουμε $t = e^s \Rightarrow s = \ln t$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tilde{y}}{ds} = \underbrace{\frac{1}{t} \frac{d\tilde{y}}{ds}}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{d\tilde{y}}{ds} =$$

$$\frac{1}{t^2} \frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + \left(-\frac{1}{t^2}\right) \frac{d\tilde{y}}{ds} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} - \frac{d\tilde{y}}{ds}\right)$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} - \frac{d\tilde{y}}{ds} + \alpha \frac{d\tilde{y}}{ds} + \beta \tilde{y} = 0$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{ds} + \beta y = 0$$ σταθ. συντελεστών. (ως προς $s = \ln t$)

$\lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda + \beta = 0$: $\lambda_{1,2}$ $\qquad e^s = t$

• $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 \neq \lambda_2$ $\qquad y(s) = c_1 e^{\lambda_1 s} + c_2 e^{\lambda_2 s}$

$\qquad y(t) = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2}$

• $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad y(s) = e^{\lambda s}(c_1 + c_2 s)$

$\qquad y(t) = t^{\lambda}(c_1 + c_2 \ln t)$

• $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$ $\qquad y(s) = e^{\gamma s}(c_1 \cos(\delta s) + c_2 \sin(\delta s))$

$\qquad y(t) = t^{\gamma}(c_1 \cos[\delta \ln t] + c_2 \sin[\delta \ln t])$

Άσκηση για το σπίτι

$(\sin^2 t) y'' + (\tan t) y' + (k^2 \cos^2 t) y = 0$

$t \in (0, \pi/2)$, $k > 0$ $\qquad \rho = \sin t$ euler ως προς ρ

ομογενής μη σταθ. συντελεστές

$y'' + a(t) y' + \beta(t) y = 0$

φ_1, φ_2 γραμ. ανεξ. λύσεις

$y_\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$

αντίστοιχη ομογενής

μη ομογενής

$y'' + a(t) y' + \beta(t) y = f(t)$

· ψ_1, ψ_2 : λύσεις της μη ομογενούς

$\varphi = \psi_1 - \psi_2$: λύση της αντισ. ομογενούς.

Θεώρημα

Έστω φ_1, φ_2 γραμ ανεξ. λύσεις της ομογενούς

και έστω ψ μια ειδική λύση της μη ομογενούς

Τότε η γενική (άρα οποιαδήποτε) λύση της μη ομογενούς γράφεται ως:

$y(t) = \underbrace{c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)}_{y_{o\mu}(t)} + \psi(t)$, c_1, c_2 σταθ

Επομένως πρέπει να βρω την ομογενή + μια ειδική λύση

Μέθοδος μεταβολής των σταθερών (ή των παραμέτρων ή του Lagrange)

$y'' + a(t) y' + b(t) = f(t)$ $\quad a, b, f$ συνεχής

$y'' + a(t) y' + b(t) = 0 \to \varphi_1, \varphi_2$: γραμ. ανεξ. λύσεις

$c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$c_1(t) \qquad c_2(t)$

$\psi(t) = c_1(t) \varphi_1(t) + c_2(t) \varphi_2(t)$

$\psi'(t) = c_1'(t) \varphi_1(t) + c_1(t) \varphi_1'(t) + c_2'(t) \varphi_2(t) + c_2(t) \varphi_2'(t)$

$$\psi''(t) = c_1''(t)\varphi_1(t) + 2c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_1(t)\varphi_1''(t) + c_2''(t)\varphi_2(t) + 2c_2'(t)\varphi_2(t) + c_2(t)\varphi_2''(t)$$

$$c_1''\varphi_1 + 2c_1'\varphi_1' + \underline{c_1\varphi_1''} + c_2''\varphi_2 + 2c_2'\varphi_2' + \underline{c_2\varphi_2''} + a c_1'\varphi_1 + \underline{a c_1\varphi_1'} + a c_2'\varphi_2 + \underline{a c_2\varphi_2'} + \underline{\beta c_1\varphi_1} + \underline{\beta c_2\varphi_2} = f \Rightarrow$$

$$(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2)' + (c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2') + a(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2) = f$$

$c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0$ (επιλέγω να είναι 0) (επιλογή μόνο $c_1(t), c_2(t)$)

$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = f$

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων c_1', c_2' του μη ομογ. γραμ. συστ. είναι

$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}$ ξηδ. είναι η ορίζ. Wronski των φ_1, φ_2

$$c_1'(t) = -\frac{\varphi_2 f}{W}$$

$$c_2'(t) = \frac{\varphi_1 f}{W}$$