$9^{\underline{o}}$ ΜΑΘΗΜΑ
5-11-14

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $2^{\underline{ης}}$ ΤΑΞΗΣ

$$\left.\begin{aligned} &y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \quad , t \in I \\ &y(t_0) = y_0 \\ &y'(t_0) = \tilde{y}_0 \quad t_0 \in I \, , \, y_0, \tilde{y}_0 \in R \end{aligned}\right\} \text{Π.Α.Τ.}$$

a, b, f συνεχείς στο I
Αν $f(t) \equiv 0$ τότε η διεξίσωση είναι ομογενής

Θεώρημα Υπαρξης Μοναδικότητας
Αν a, b, f συνεχείς στο I τότε το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

Η ομογενής εξίσωση είναι η
$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ (ΟΜ)
Αν φ_1, φ_2 : λύσεις της (ΟΜ)
$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$, c_1, c_2 : σταθ.
λύσεις της (ΟΜ)

Έστω φ_1, φ_2 λύσεις της (ΟΜ)
· Γραμμικά εξαρτημένες λέγονται εξ' ορισμού αν $\exists c \in R$: $\varphi_1(t) = c\varphi_2(t)$
· Γραμ. Ανεξαρτ. $\overset{\text{εξ' ορισμού}}{\Longleftrightarrow}$ Αν δεν είναι γραμμικά εξ.

$\varphi_1, \varphi_2 \in C^1$

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

ορίζουσα Wronski

Θεώρημα 1

Έστω φ_1, φ_2 λύσεις της (ΟΜ) $(Ly=0)$

$$\underbrace{y'' + a(t)y' + b(t)y}_{Ly} = 0 \qquad a, b \text{ συνεχείς}$$

Οι φ_1, φ_2 είναι γραμμ. ανεξ. $\iff W(\varphi_1, \varphi_2)(t) \neq 0, \ \forall t \in I$

Απόδειξη

1) Έστω $W(t) \neq 0$ και $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0, \ \forall t \in I$

Παραγωγίζοντας την 2η σχέση παίρνουμε

$c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) = 0$

Έστω $t^* \in I$ (αυθαίρετο t)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t^*)c_1 + \varphi_2(t^*)c_2 = 0 \\ \varphi_1'(t^*)c_1 + \varphi_2'(t^*)c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{σύστημα ως προς } c_1, c_2$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t^*) & \varphi_2(t^*) \\ \varphi_1'(t^*) & \varphi_2'(t^*) \end{vmatrix} = W(t^*) \neq 0$$

Άρα $c_1 = c_2 = 0$ $(\Leftarrow)$

2) $\Rightarrow$

Έστω φ_1, φ_2 γρ. ανεξ στο I

Έστω $\tilde{t}$: $W(\varphi_1, \varphi_2)(\tilde{t}) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(\tilde{t})c_1 + \varphi_2(\tilde{t})c_2 = 0 \\ \varphi_1'(\tilde{t})c_1 + \varphi_2'(\tilde{t})c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \neq (0,0)$$

∃ μη μηδενική λύση

Θεωρώ την συνάρτηση

$\varphi(t) = \tilde{c}_1\varphi_1(t) + \tilde{c}_2\varphi_2(t)$

$L\varphi = 0$ (για $\varphi(t)$ με $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$)

$\varphi(\tilde{t}) = 0$

$\varphi'(\tilde{t}) = 0$ Π. Α. Τ

το Π. Α. Τ. έχει μοναδική λύση όπως η $\varphi_0(t) \equiv 0 \ (\forall t)$ είναι λύση. Άρα έχει μόνο την μηδενική λύση. Άτοπο γιατί $\exists (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \neq (0,0)$

Τύπος του Liouville (Abel)

$W(t) = W(\tau)\, e^{-\int_\tau^t a(s)\,ds}$

↳ συγκεκριμένο σημείο

Απόδειξη

$\varphi_1, \varphi_2 : L\varphi_1 = L\varphi_2 = 0$

$\varphi_j'' = -a(t)\varphi_j' - b(t)\varphi_j$ (1) $\quad j = 1,2$

$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$

$W'(t) = (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2)' = \varphi_1\varphi_2'' + \varphi_1'\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2' - \varphi_1''\varphi_2 =$
$\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} W'(t) + a(t)W(t) = 0$

$W(t) = W(\tau)\, e^{-\int_\tau^t a(s)\,ds}$

$\to W(t) \equiv 0$ (για $\forall t \in I$)

ή

$\to W(t) \not\equiv 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω φ_1, φ_2 λύσεις της (ΟΜ) $Ly = 0$

Αν φ_1, φ_2 είναι γραμμ. ανεξ. $\Longleftrightarrow \exists\, \hat{t} \in I : W(\hat{t}) \neq 0$

↳ συγκεκριμένο

σημείο σε Π.Α.Τ επιλέγουμε το t_0

$Ly = y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$

Έστω ότι έχω $\varphi_1(t)$: γνωστή λύση

Τότε θέλω να βρω μια δεύτερη λύση φ_2 που είναι γραμ. ανεξ. από την φ_1

Τότε η $\varphi_2(t)$ γράφεται ως εξής.

$\varphi_2(t) = u(t)\varphi_1(t)$

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ

$(u\varphi_1)'' + a(u\varphi_1)' + bu\varphi_1 = 0$

$(u'\varphi_1 + u\varphi_1')' + a(u'\varphi_1 + u\varphi_1') + bu\varphi_1 = 0$

$u''\varphi_1 + \underbrace{u'\varphi_1' + u'\varphi_1'}_{2u'\varphi_1'} + au'\varphi_1 + au\varphi_1' + bu\varphi_1 = 0$

$u(\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1) = 0$

$L\varphi_1 = 0$

$\varphi_1 u'' + (2\varphi_1' + a\varphi_1)u' = 0$ Δ τύπος

$v := u'$

$v' + \frac{2\varphi_1' + a\varphi_1}{\varphi_1} v = 0$

όμως φ_1 είναι γνωστή. Άρα γνωστές

$v(t) = e^{-\int(\dots)\,dt}$

Έστω $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$

και φ_1, φ_2 : γραμ. ανεξ. λύσεις

$y(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$

↑

γενική λύση (της ομογενούς)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1) $(t+1)y'' + ty' - y = 0$, $t > 0$, $\varphi_1(t) = t$ λύση

2) Υποβιβασμός τάξης μέσω της W (τύπος Liouville)

3) $y'' - \frac{2t}{t^2+1}y' + \frac{2}{t^2+1}y = 0$, $t \in R$, $\varphi_1(t) = t$ λύση

4) Να λυθεί η Δ.Ε. $(1-t)y'' + ty' - y = 0$ ①, $t>1$
με δεδομένο ότι έχει μια κοινή λύση με τη Δ.Ε.
$2t(t-1)y'' - (4t^2+1)y' + (2t+1)y = 0$ ②, $t>1$
(Βρίσκω λύση ... ② δεν μπορώ να λύσω την ②)

∄ γενικός τρόπος εύρεσης λύσεων. Αν ξέρω μια τότε μπορώ να βρω άλλη μια. Αν η εξίσωση έχει σταθερούς συντελεστές ∃ γενικός τρόπος.

$Ly = y'' + ay' + by = 0$ $\quad a,b$: σταθ.
Αν έχει λύση εκθετική:
$e^{\lambda t}$

$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$ όμως $e^{\lambda t} \neq 0$
Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

· $a^2 > 4b$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda e^{\lambda_1 t} & \lambda e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \neq 0$$

· $a^2 = 4b$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2} \Rightarrow \varphi_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t} = e^{\lambda t}$
υποβιβασμός τάξης ... $\Rightarrow \varphi_2(t) = t e^{-\frac{a}{2}t} = te^{\lambda t}$
$\Rightarrow$ γραμμ. ανεξ.

· $a^2 < 4b$ $\quad \lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{\lambda_1 t}$ | $\longrightarrow$ πραγματικές λύσεις $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(t) = e^{\gamma t} \cos(\delta t) \\ \varphi_2(t) = e^{\gamma t} \sin(\delta t) \end{array} \right\}$ γραμ. ανεξ.
$e^{\lambda_2 t}$ | γραμμ. ανεξ.

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\gamma t}(\cos(\delta t) + i\sin(\delta t))$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\gamma t}(\cos(\delta t) - i\sin(\delta t))$$