# 8ο ΜΑΘΗΜΑ

31-10-14

Σε όλα τα προβλήματα της ενότητας θεωρούμε ότι $f \in C^1$ (μοναδική λύση στο Π.Α.Τ.)

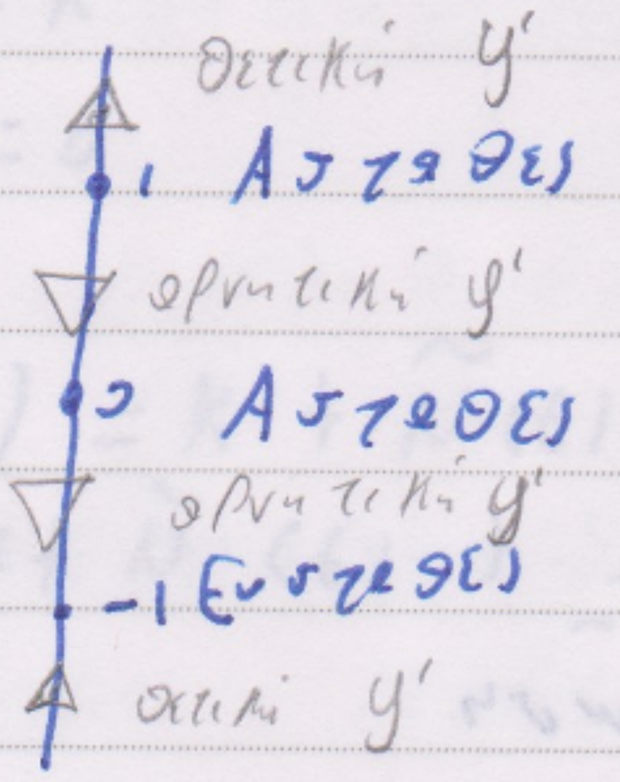
$\tilde{y}$: σημείο (λύση) ισορροπίας $\iff f(\tilde{y}) = 0$

$$y' = f(y)$$
$$y(0) = y_0$$

$$y' = y^4 - y^2 = y^2(y-1)(y+1)$$

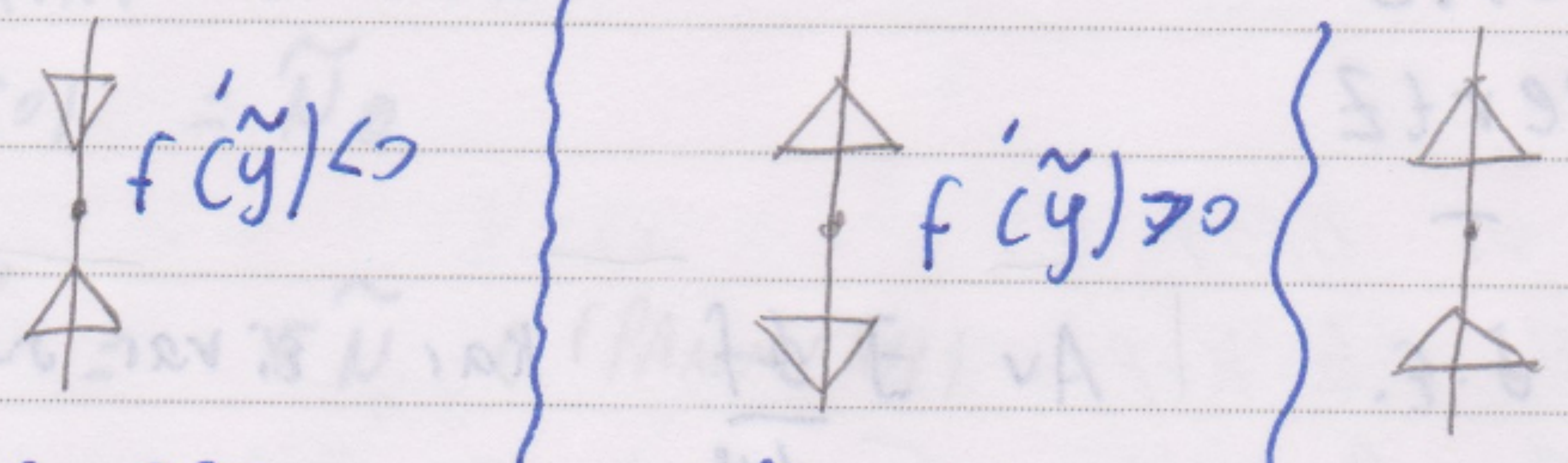
Λύσεις ισορροπίας

$y = 0,\ y = 1,\ y = -1$




Γραμμή φάσης

Κατάταξη σημείων ισορροπίας *

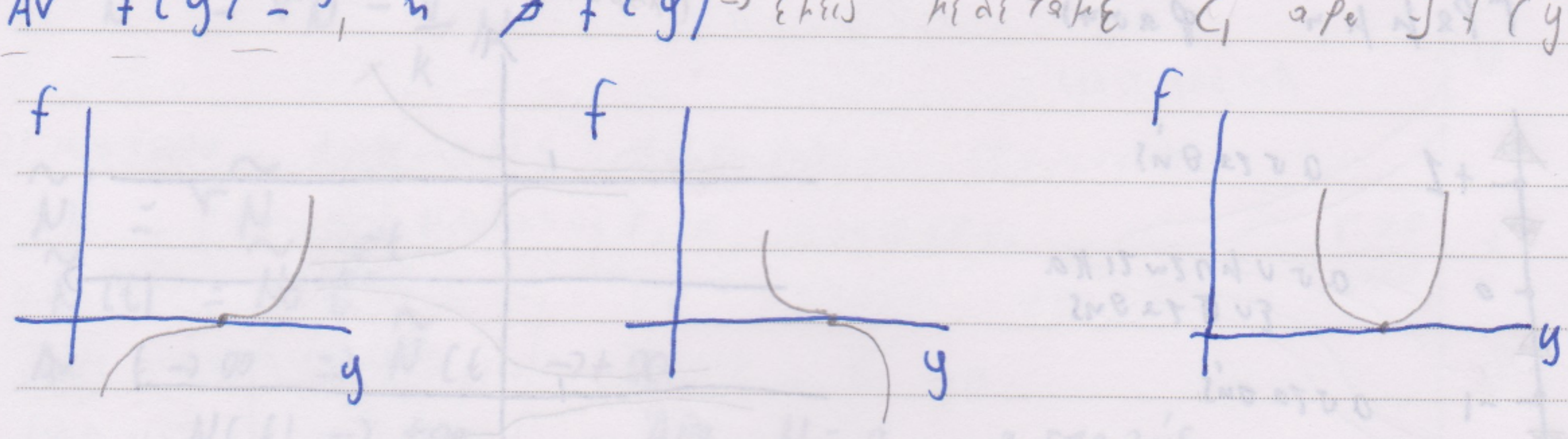


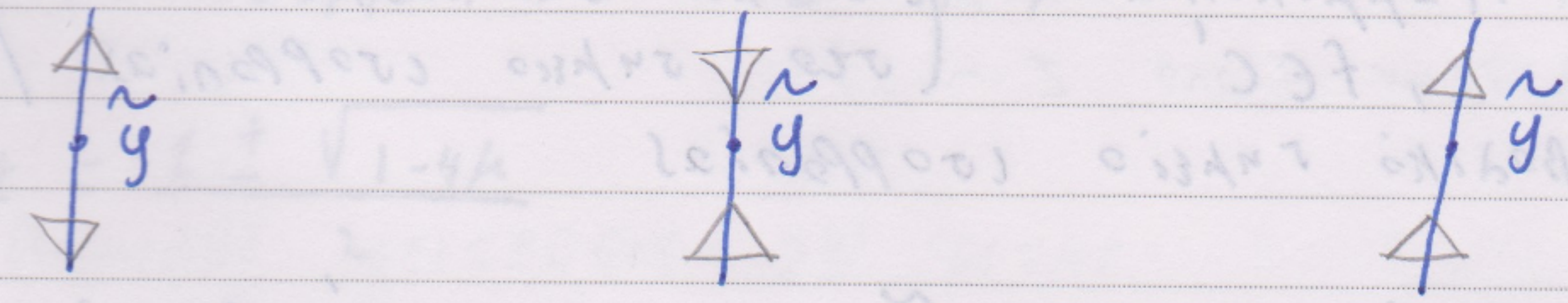

Καταβόθρα ευσταθής | πηγή ασταθής | κόμβος ασταθής

* Αν $f'(\tilde{y}) \neq 0$ : $\tilde{y}$ υπερβολικό σημείο ισορροπίας

Αυτά εξαρτώνται από την μονοτονία της $f$ στο $\tilde{y}$ ~ -//- από το πρόσημο της $f'(\tilde{y})$

Αν $f'(\tilde{y}) = 0$, ή $\nexists f'(\tilde{y})$ → επειδή μελετάμε $C_1$ άρα $\exists f'(\tilde{y})$





Έστω $g(y)$ θα αναπτύξω ως προς Taylor για $y^*$

$$g(y) = g(y^*) + (y - y^*)\, g'(y^*) + \frac{1}{2}(y - y^*)^2\, g''(y^*) + \dots$$

Αν κόψω τους μη γραμμικούς όρους

$$g(y) \simeq g(y^*) + (y - y^*)\, g'(y^*) =$$

$$g'(y^*)\, y + g(y^*) - y^*\, g'(y^*)$$

$f \in C'$, $\tilde{y}$ σημείο ισορροπίας

Taylor περί του $\tilde{y}$ (σημείο ισορροπίας)

$$f(y) \simeq f'(\tilde{y})\, y + \underbrace{f(\tilde{y})}_{0} - \tilde{y}\, f'(\tilde{y})$$

$$f(y) \simeq f'(\tilde{y})\, y - \tilde{y}\, f'(\tilde{y})$$

Αν $\tilde{y}$: μη υπερβολικό $f(y) \simeq 0$

$y' = f(y)$ → μη γραμμική

$y' \simeq f(\tilde{y})\, y - \tilde{y}\, f(\tilde{y})$ → Γραμμική της μορφής αυτής

$\tilde{y}$ υπερβολικό

Αυτή η διαδικασία λέγεται γραμμικοποίηση περί σημείου ισορροπίας (το κάνουμε τόσες φορές όσα τα σημεία ισορροπίας

Θεώρημα Γραμμικοποίησης (τοπικό αποτέλεσμα κοντά στο σημείο ισορροπίας)

$y' = f(y)$, $f \in C^1$

$\tilde{y}$ : υπερβολικό σημείο ισορροπίας

Το είδος ευστάθειας του $\tilde{y}$ για την $y' = f(y)$ είναι το ίδιο με το είδος ευστάθειας του $\tilde{y}$ για την γραμμικοποιημένη δ.ε. $y' = f'(\tilde{y})y - \tilde{y}f'(\tilde{y})$

Ασκήσεις

1) $y' = \sin y$, $y(0) = y_0$ (ΝΑ βρω σημεία ισορροπίας (επιλέγω να τα 3-4 όχι όλα), να κάνω γραμμή φάσης ? $(-\pi, 0, \pi)$ χωρίζονται που λέει τη λύση και μετά αναλυτικά)

2) $N' = r\left(1 - \frac{N}{K_1}\right)\left(\frac{N}{K_2} - 1\right)N$ (γραμμή φάσης να δω τι γίνεται με τα $K_1, K_2$ ποιο πιο μεγάλο)

$r, K_1, K_2$ : σταθ > 0

$N = N(t)$

α.σ. $N(0) = N_0$

Διακλαδώσεις

$N = N(\tau)$

$\frac{dN}{d\tau} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right)N - h$, $r, k, h$ : σταθ. > 0

Εξίσωση Schaefer

Τι γίνεται όταν μεταβάλλεται το h

$u = \frac{N}{k}$, $t = r\tau$

$\frac{du}{dt} = u(1-u) - \mu$, $\mu := \frac{h}{rk} > 0$

παράμετρος διακλάδωσης

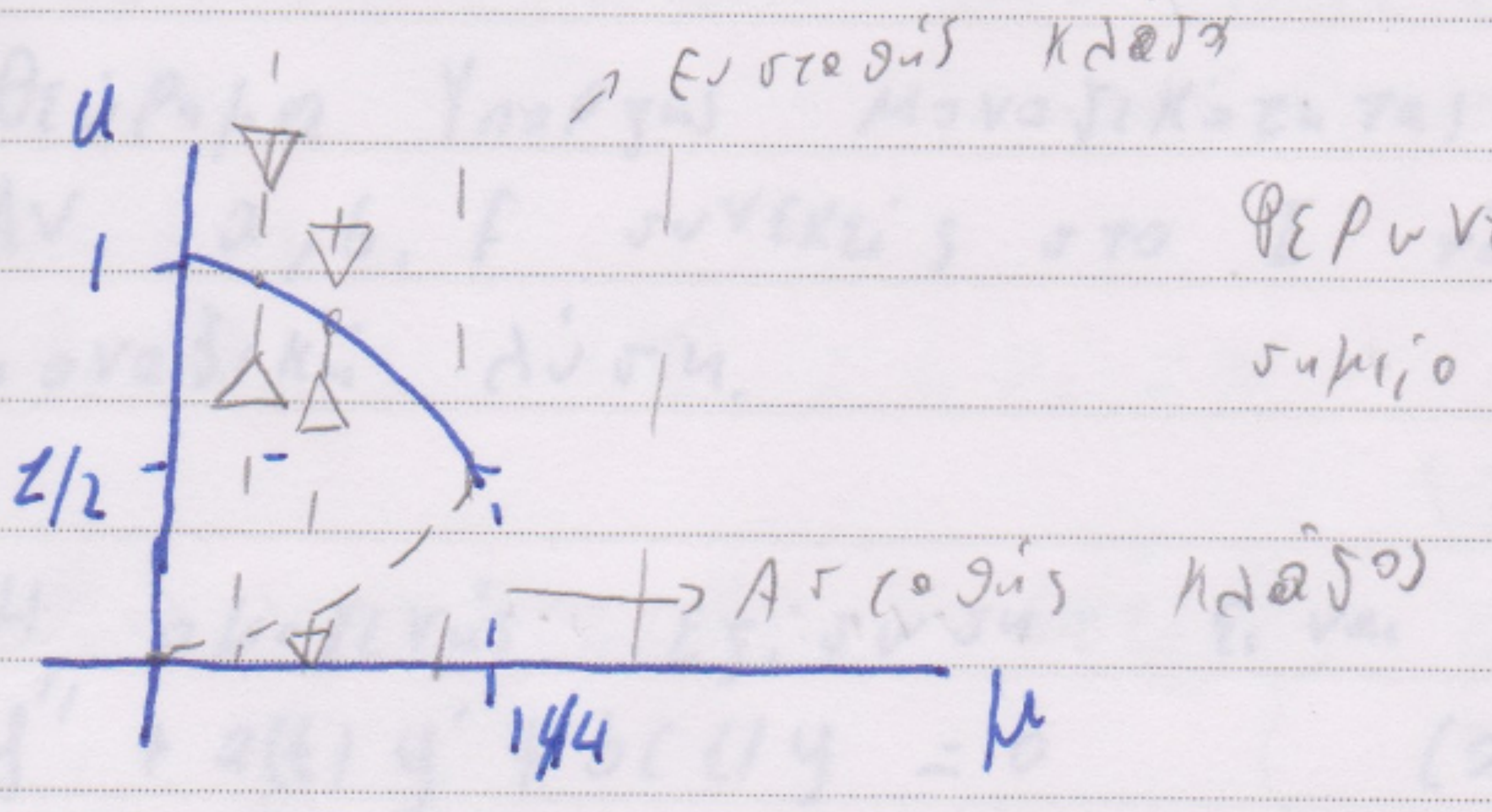
Λύσεις ισορροπίας : $u(1-u) - \mu = 0$

$$u_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu}}{2}$$

Αν $\mu > 1/4$ : $\nexists$ λύσεις ισορροπίας

$0 < \mu < 1/4$ : 2 λύσεις ισορροπίας

$\mu = 1/4$ : 1 λύση $u_\pm = 1/2$

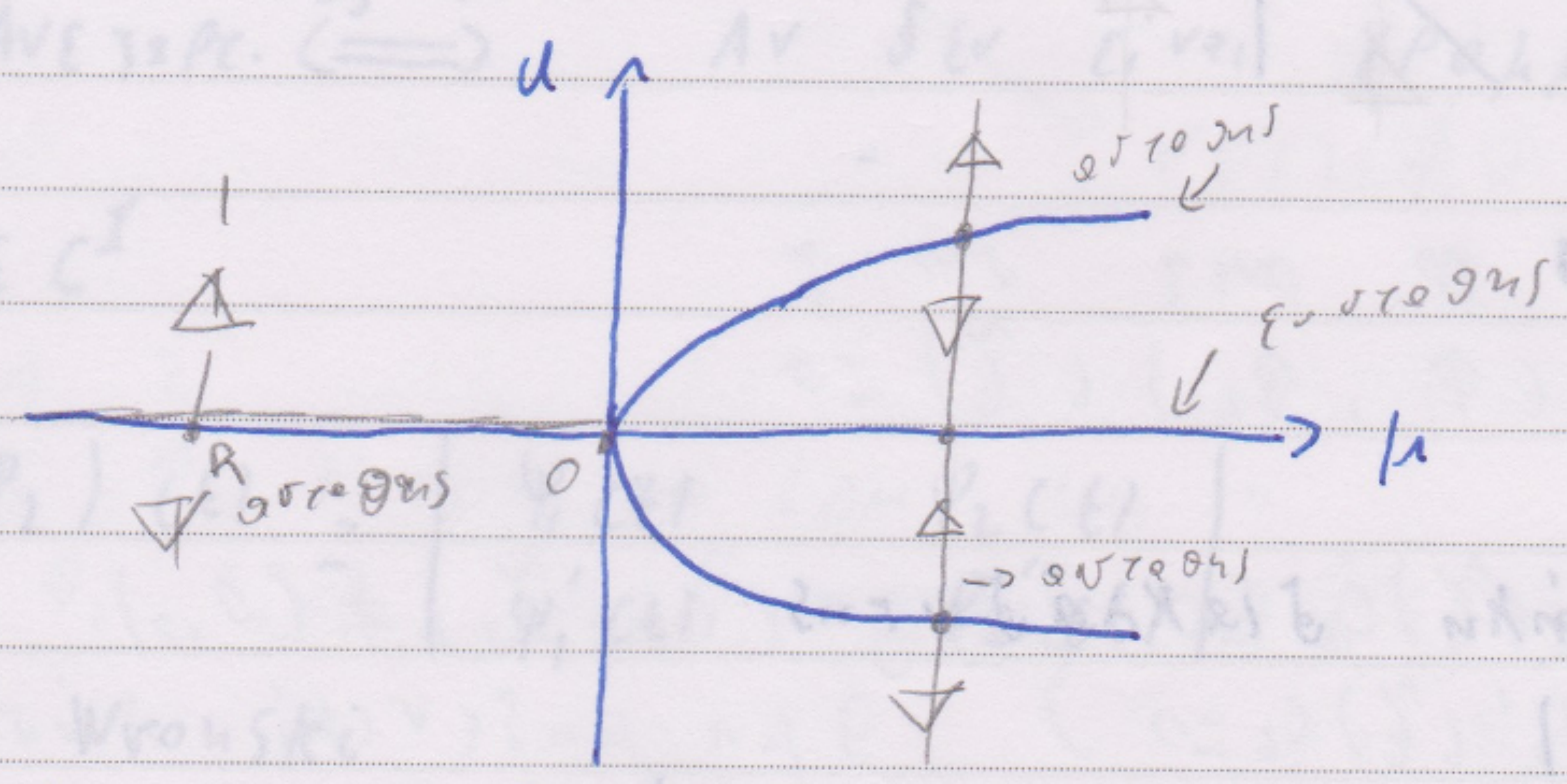



Φέρνοντας κάθετες βλέπουμε πόσα σημεία (λύσεις) έχουμε, και το είδος με την γραμμή φάσης

Διάγραμμα διακλάδωσης

Διακλάδωση έχουμε αν αλλάζει το πλήθος λύσεων ή το είδος λύσεων (ευσταθής - ασταθής) ή και τα δύο

$u' = u(u^2 - \mu)$, $\mu \in R$ σταθ



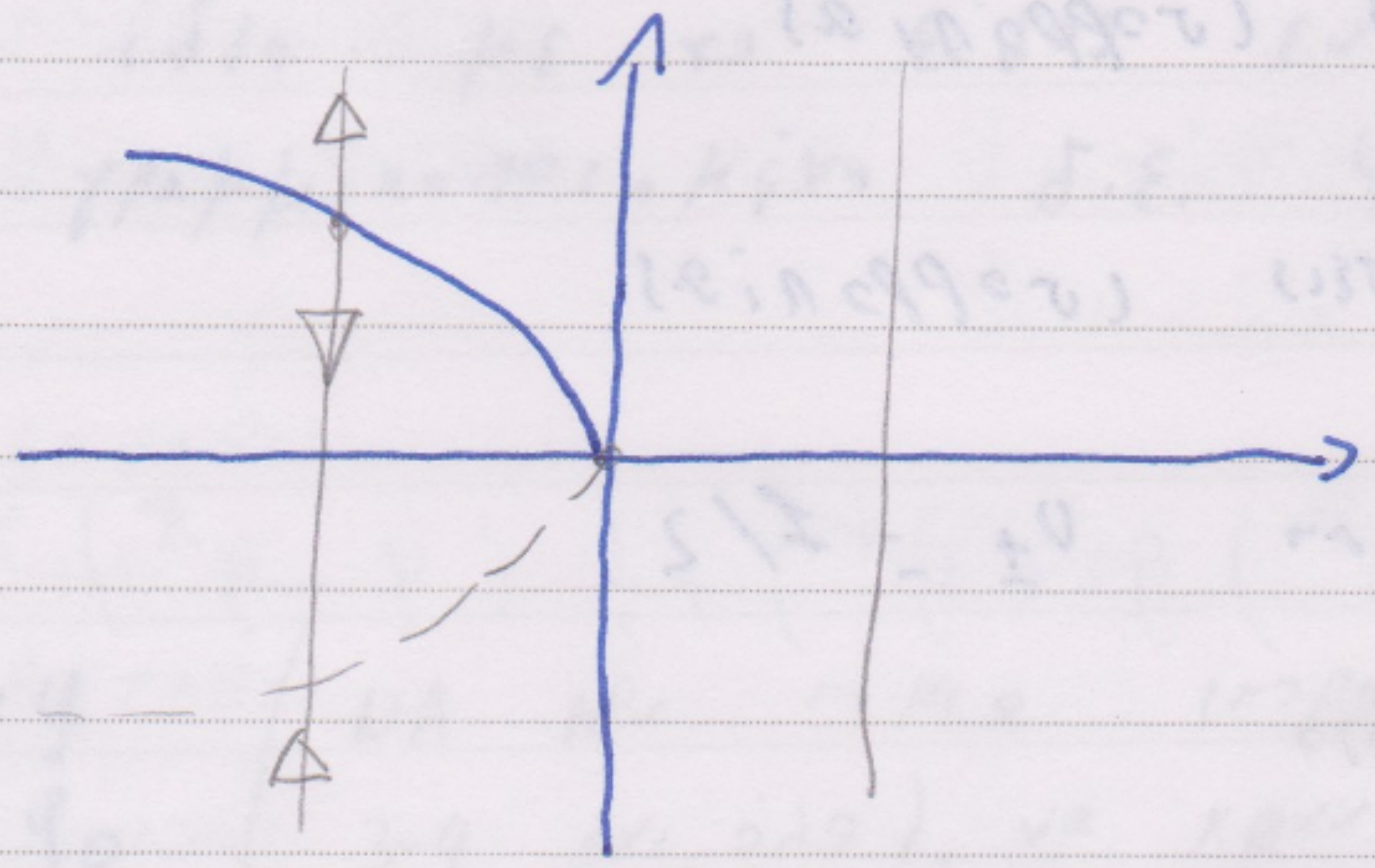

$u = 0$ λύση, $\mu < 0$

$u = \pm\sqrt{\mu}$ $\mu > 0$

$\nexists$ λύσεις $\mu < 0$

Η μηδενική λύση αλλάζει είδος & αλλάζει το πλήθος λύσεων (από 2 → 3)

$y' = \mu + y^2$, $\mu \in \mathbb{R}$

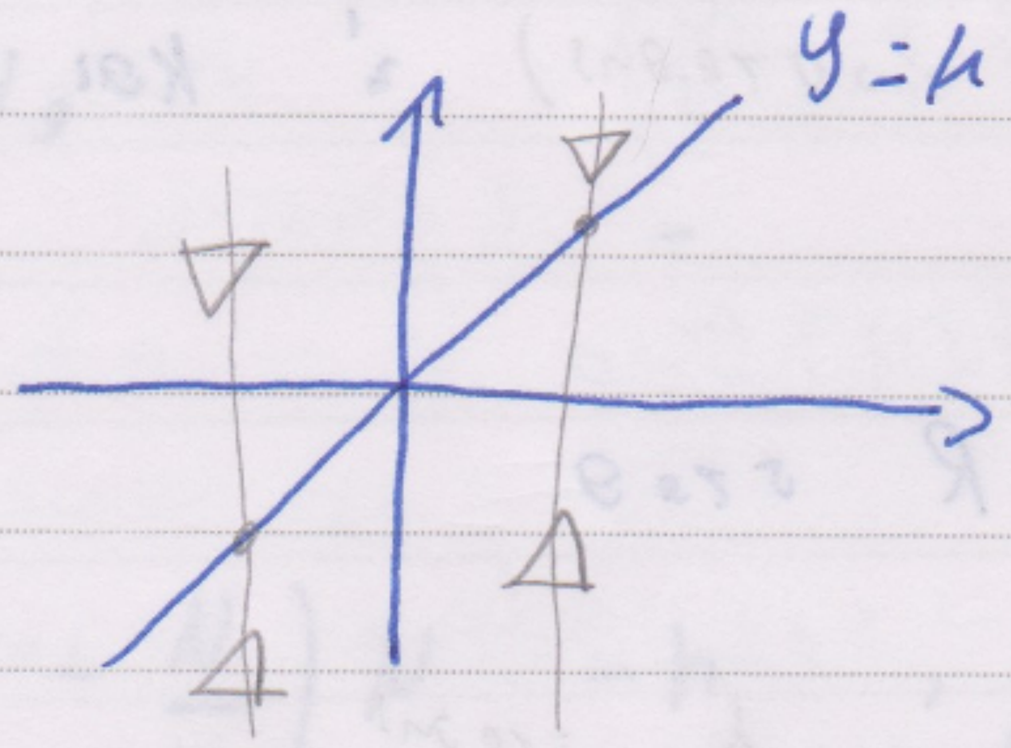


$\mu > 0$ : ∄ λύση ισορ.

$\mu < 0$ : ∃ 2 λύσεις ισορ.

Αλλάζει το πλήθος

$y' = \mu - y$, $\mu \in \mathbb{R}$ σταθ




ευσταθείς λύσεις

∄ διακλάδωση

Αναγκαία συνθήκη διακλάδωσης

$y' = f(y,\mu)$

$f(\tilde{y},\tilde{\mu}) = 0$ (σημείο ισορροπίας)

$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{y},\tilde{\mu}) = 0$ (μη υπερβολικότητα του σημ. ισορ. $(\tilde{y},\tilde{\mu})$)