7ο ΜΑΘΗΜΑ
29-10-14

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ Δ.Ε.
ΘΕΩΡΙΑ

ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

$y' = f(y)$ Αυτόνομες εξισώσεις
↳ χωριζομένων μεταβλητών

$N(t)$: πληθυσμός ένος είδους

1) Εκθετική αύξηση
Νόμος Malthus (ο ρυθμός μεταβολής (1η παράγωγος) είναι ανάλογος του πληθυσμού)

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad , r: \text{σταθερά}$$

~~Αν $r<0$: $N(t)$~~

$$N(t) = ce^{rt} \begin{cases} r<0 : N(t) \to 0 , & t\to\infty \\ \boxed{r>0} : N(t)\to\infty , & t\to\infty \end{cases}$$

(χονδροειδές νόμος καθώς $N(t)\to\infty$)

Αν $N(t_0) = N_0$

Λύση Π.Α.Τ.
$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$$

2) Μοντέλο Λογιστικής Αύξησης (πιο ρεαλιστικό)

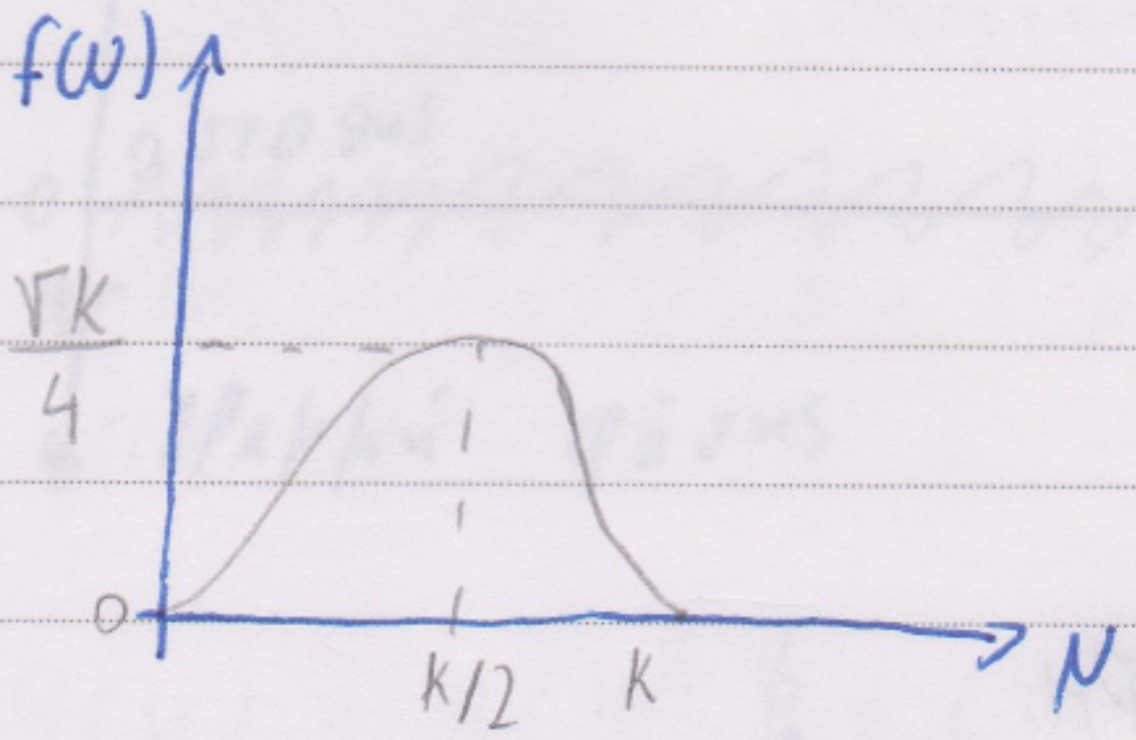
$$\frac{dN}{dt} = (r - aN)N \quad , r, a : \text{σταθερές} \quad r>0,\ a>0$$

μη γραμμική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{\boxed{r\left(1-\frac{N}{K}\right)N}}_{= f(N)} \quad , K = \frac{r}{a} > 0$$

$N(0) = N_0$

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0)\, e^{-rt}}$$ (Αν δεν την ξέρω)



Πληθυσμιακή όρια $f(N) \geq 0$

Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική.

Αν $0 < N < k$: $f(N) > 0 \Rightarrow N'(t) > 0 \Rightarrow N$: αύξουσα

(ίσον το $N \in (0,k)$)

$N > k$: $f(N) < 0 \Rightarrow N'(t) < 0 \Rightarrow N$: φθίνουσα

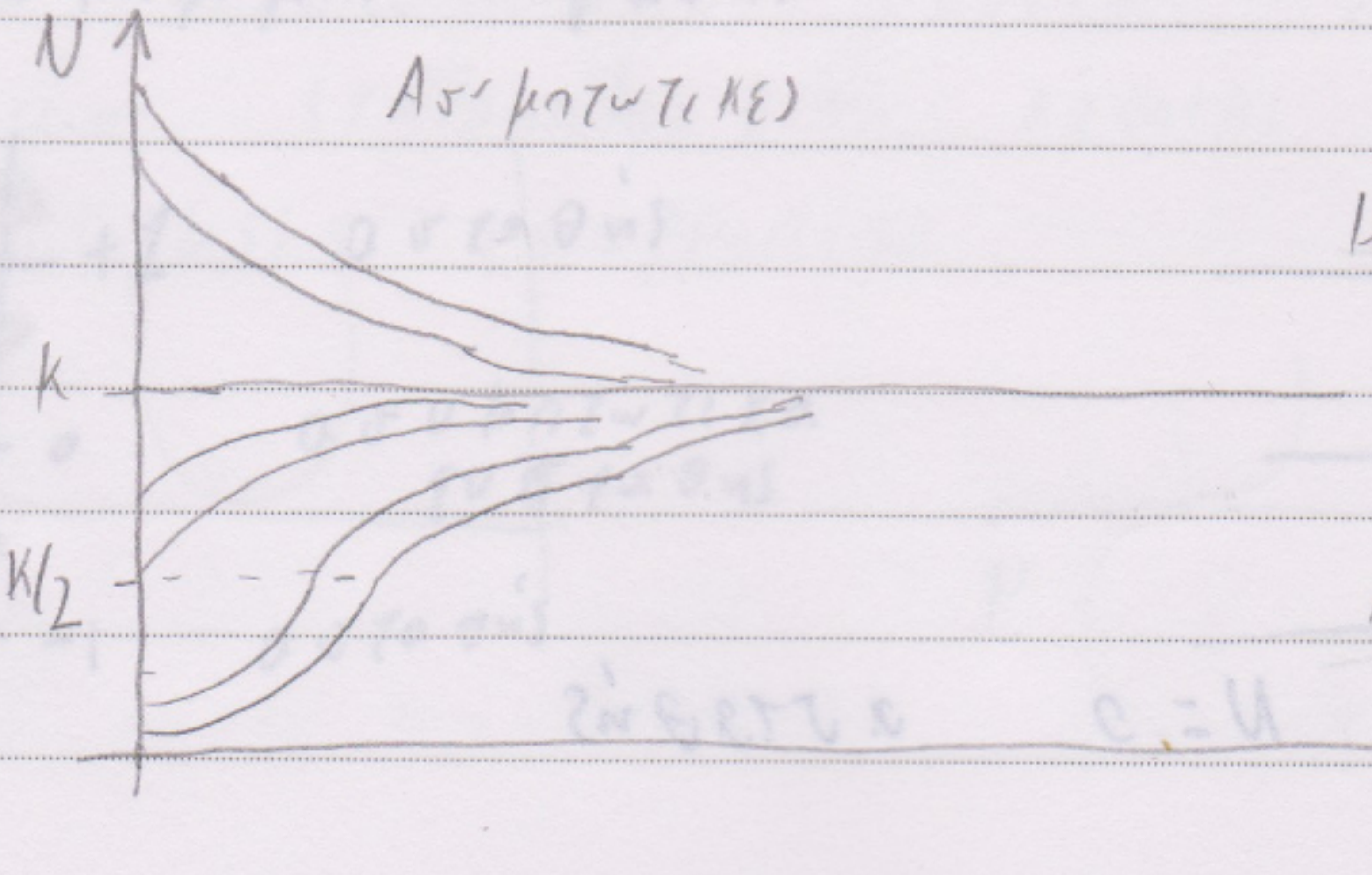
$N = 0$: $f(N) = 0 \Rightarrow N'(t) = 0 \Rightarrow N(t)$ σταθερή

$N = k$: $f(N) = 0 \Rightarrow N'(t) = 0 \Rightarrow N(t)$ σταθερή

ρίζες της $f(N)$

f(N) ως προς N	N(t) ως προς t
θετική & αύξουσα	↗ & κυρτή
-//- & φθίνουσα	↗ & κοίλη
αρνητική & αύξουσα	↘ & κυρτή
-//- & φθίνουσα	↘ & κοίλη

$$\frac{d^2N}{dt^2} = N''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dN}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(f(N)) = f'(N)\frac{dN}{dt} = f'(N)f(N)$$



Η λύση κ τρέχει κοντά στο (ευσταθής λύση)

→ ασταθής λύση

Η λύση 0 απέχει μακριά της μόνο αν ξεκινήσει από το 0 θα μείνει στον x'x

ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

$$N' = \underbrace{r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N}_{F(N)} \qquad r, k > 0 : \text{σταθ}$$

$F(N) = 0$: λύσεις ισορροπίας

$N = k$

$N = 0$

διαταραχή ΜΙΚΡΗ

$N(t) = k + \tilde{N}(t)$ διαταραγμένη λύση ισορροπίας

$$(k + \tilde{N}(t))' = r\left(1 - \frac{k + \tilde{N}(t)}{k}\right)(k + \tilde{N})$$

$$\tilde{N}' = -r\tilde{N} - \frac{r}{k}\tilde{N}^2 \quad \text{πάρα πολύ μικρό}$$

Αρχική συνθήκη

$\tilde{N}(0) = \tilde{N}_0$

$\tilde{N}' = -r\tilde{N}$ (ΓΡΑΜΜΙΚΗ)

$\tilde{N}(t) = \tilde{N}_0 e^{-rt}$

Αν $t \to \infty \Rightarrow \tilde{N}(t) = 0$

Άρα $N(t) \to k$ ευσταθής λύση

$N(t) = 0 + \tilde{N}(t)$

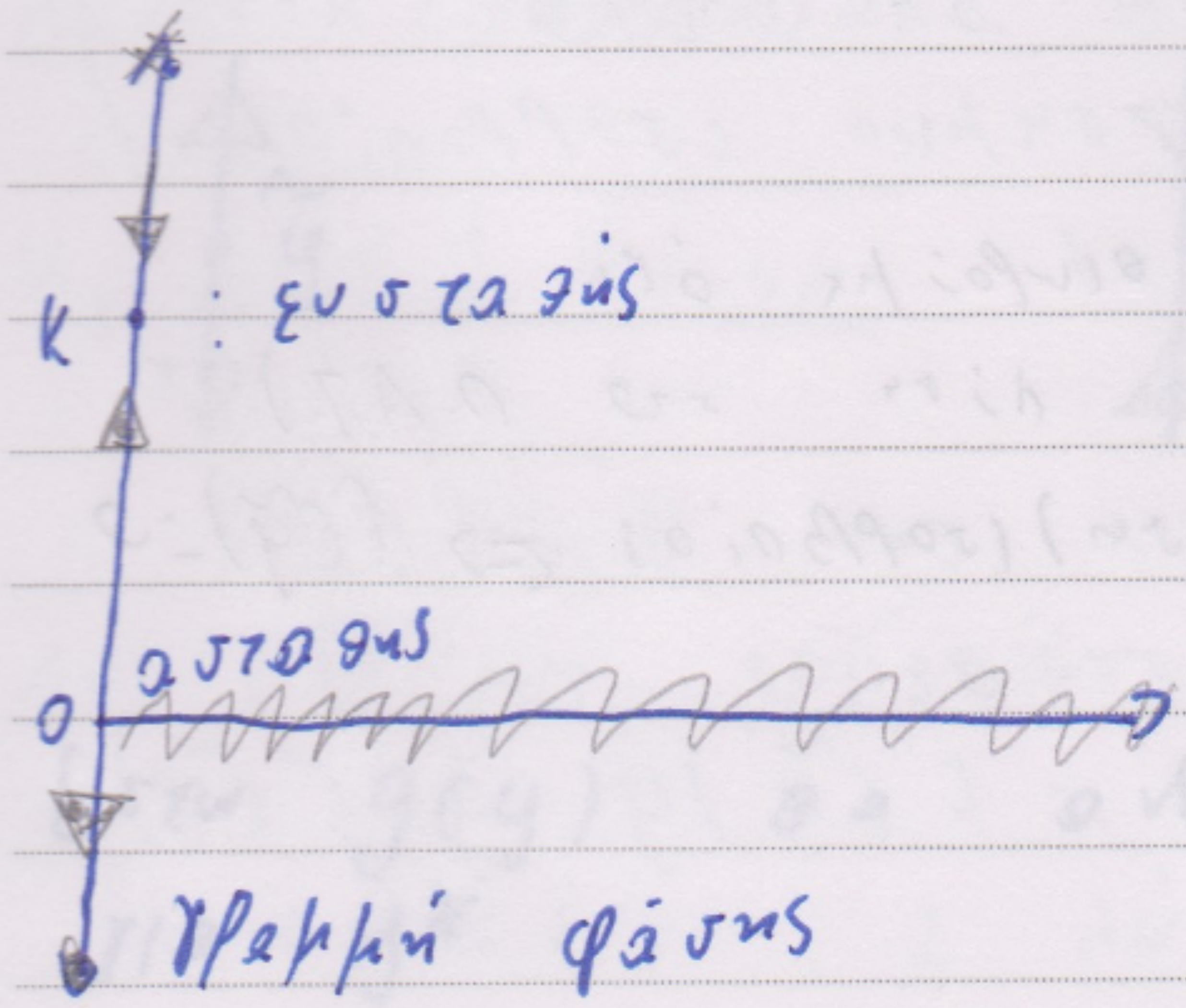
$$\tilde{N}' = r\tilde{N} - \frac{r}{k}\tilde{N}^2$$

$\tilde{N}' = r\tilde{N}$

$\tilde{N}(t) = \tilde{N}_0 e^{rt}$

Αν $t \to \infty \Rightarrow \tilde{N}(t) \to +\infty$

$N(t) \to +\infty$, Άρα $N = 0$ ασταθής



$N > k : f(N) < 0 \Rightarrow N' < 0$

$0 < N < k : f(N) > 0 \Rightarrow N' > 0$

$N < 0 : f(N) < 0 \Rightarrow N' < 0$

$N' = AN^a - BN^b$ $\quad \beta > 0$

von Bertalanffy

$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Λογιστική εξίσωση

$N' = N^a(A - B\ln N)$ $\quad \beta > 0$

γενικευμένη εξ. Gompertz

$a = 1$ εξ. Gompertz

$y' = f(y)$ αυτόνομη Δ.Ε. | Αν $\exists \frac{df}{dy}$ και είναι συνεχής

$y' = y^3 - y$

| το Π.Α.Τ $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ έχει μοναδική λύση

1ο Λύσεις ισορροπίας

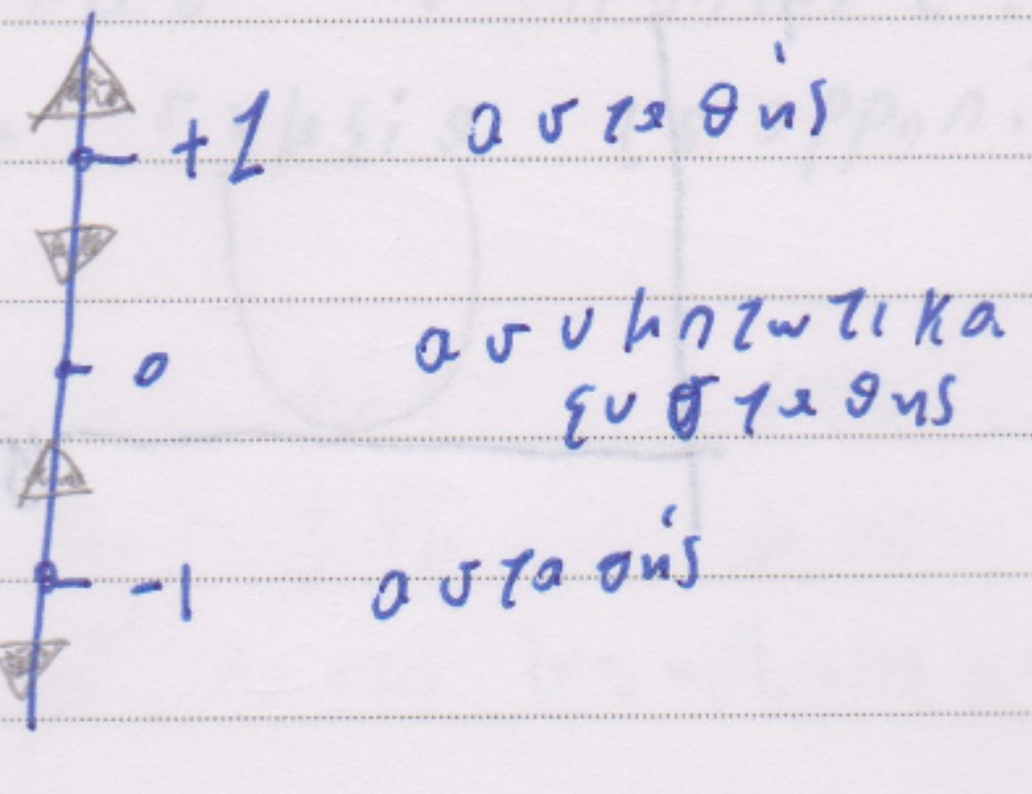
$y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = y(y-1)(y+1) = 0 \Rightarrow$

$y = 0$

$y = 1$

$y = -1$

2ο Γραμμή φάσης



(ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ)