6º ΜΑΘΗΜΑ

-10-14

Έστω ότι έχουμε

$y = y(t)$

$M(t,y) + N(t,y)y' = 0$

Αν $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Longleftrightarrow$ τότε η δ.ε. είναι ακριβής

$\exists G = G(t,y)$

$\frac{\partial G}{\partial t} = M$

και

$\frac{\partial G}{\partial y} = N$

Γενική λύση

$G(t,y) = C$

Αναγωγή σε ακριβής : $\mu = \mu(t,y)$

$\mu M + \mu N y' = 0$ όλα με (t,y)

$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$

$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)\mu = 0$

1 $\mu = \mu(t) \Rightarrow$ αναγκαία συνθήκη

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = P(t)$ (να είναι μόνο του t)

Τότε

$\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$

② $\mu = \mu(y)$ α.σ.

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = q(y)$$

$$\mu(y) = e^{\int q(y)\,dy}$$

③ $\mu(ty)$ (η συνάρτηση έχει μόνο txy ή t^2y^2 κ.οκ.) $S := t\cdot y$

$R'(s) = g(s)$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \cancel{\partial(ty)}\ \mu'(ty)\,y$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(ty)\,t$$

α.σ.

$$\frac{1}{yN - tM}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = g(ty)$$

$S := t\cdot y$

$R'(s) = g(s)$

$\mu(s) = e^{R(s)}$

$\mu(ty) = e^{R(t\cdot y)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΩΝ Δ.Ε.

1) $\underbrace{2ty^4e^y}_{M} + \underbrace{2ty^3 + y + (t^2y^4e^y - t^2y^2 - 3t)}_{N}\,y' = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8ty^3e^y + 2ty^4e^y + 6ty^2 + 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2ty^4e^y - 2ty^2 - 3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} = -8ty^3e^y + 8ty^2 + 4$$

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = -\frac{4}{y}, \quad y \neq 0 \text{ (συνάρτηση του } y\text{)}$$

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = y^{-4}, \quad y \neq 0$$

$$\underbrace{2te^y + \frac{2t}{y} + \frac{1}{y^3}}_{\tilde{M}} + \underbrace{\left(t^2e^y - \frac{t^2}{y^2} - \frac{3t}{y^4}\right)}_{\tilde{N}}y' = 0 \quad \text{Ακριβής}$$

$\exists\, \tilde{G}(t,y)$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \tilde{M} = 2te^y + \frac{2t}{y} + \frac{1}{y^3}$$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = \tilde{N} = t^2e^y - \frac{t^2}{y^2} - \frac{3t}{y^4} \quad (1)$$

$\boxed{\text{ολοκληρώνω ως προς } t}$

$$\Rightarrow \tilde{G}(t,y) = t^2e^y + \frac{t^2}{y} + \frac{t}{y^3} + \tilde{h}(y)$$

παραγωγίζω ως προς y

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = t^2e^y - \frac{t^2}{y^2} - \frac{3t}{y^4} + \tilde{h}'(y) \quad (2)$$

$(1),(2) \Rightarrow \tilde{h}'(y) = 0 \Rightarrow \tilde{h}(y) = \tilde{c}$, c σταθερά

$$\tilde{G}(t,y) = t^2e^y + \frac{t^2}{y} + \frac{t}{y^3} + \tilde{c}$$

Γενική λύση

$$t^2e^y + \frac{t^2}{y} + \frac{t}{y^3} = c, \quad y \neq 0$$

Για $y=0$ πάμε στην αρχική εξίσωση και βλέπουμε ότι είναι λύση. Άρα $y=0$ είναι ιδιάζουσα λύση

2) $\underbrace{t^2 y + y^2}_{M} \underbrace{- t^3}_{N} y' = 0$ (είναι και bernoulli)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = t^2 + 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -3t^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} = 2y + 2t^2 = 2(y + 2t^2)$$

(κανονικά πρέπει να ελέγξω διαιρόντας, δεν είναι όλα οπότε πάμε στην 3η περίπτωση)

$$\frac{1}{yN - tM}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = -\frac{2}{ty} \quad , \ t \neq 0 \text{ και } y \neq 0$$

$$g(s) = -\frac{2}{s}$$

$$R'(s) = g(s)$$

$$R(s) = \int g(s)\,ds = \ln\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\mu(s) = e^{R(s)} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mu(ty) = \frac{1}{t^2 y^2} \quad , \ t \neq 0 \ \& \ y \neq 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{y} + \frac{1}{t^2}}_{\tilde{M}} \underbrace{- \frac{t}{y^2}}_{\tilde{N}} y' = 0 \quad : \text{Ακριβής}$$

$$\exists \tilde{G}(t, y)$$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \tilde{M} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t^2} \quad (1)$$

$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = \tilde{N} = -\frac{t}{y^2}$ ολοκληρώνω ως προς y

$\tilde{G}(t,y) = \frac{t}{y} + \tilde{h}(t)$ παραγωγίζω ως προς t

$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \frac{1}{y} + \tilde{h}'(t)$ ②

①,② $\Rightarrow \tilde{h}'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \tilde{h}(t) = -\frac{1}{t}$

$\tilde{G}(t,y) = \frac{t}{y} - \frac{1}{t}$ $t \neq 0$

γενική λύση

$\frac{t}{y} - \frac{1}{t} = c \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{1+ct}$

ιδιάζουσα λύση $y_0(t) \equiv 0$, $t \in R$

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

$3t + \frac{6}{y} + \left(\frac{t^2}{y} + \frac{3y}{t}\right) y' = 0$ είναι συνάρτηση του ty

$g(ty) = 1/ty$

$\mu(ty) = ty$

$x = x(t)$, $y = y(t)$ $\quad x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$

$x' = ax - \beta xy$, $a, \beta > 0$ σταθ. Volterra - Lotka
$y' = -\gamma y + \delta xy$, $\gamma, \delta > 0$ σταθ

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{ax - \beta xy} \Rightarrow$

$$\underbrace{\gamma y - \delta x y}_{M(x,y)} + \underbrace{(\alpha x - \beta x y)}_{N(x,y)} \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} \ne y'$$

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy}$$

$\tilde{G}(x,y) = -\delta x + \gamma \ln x - \beta y + \alpha \ln y = c$

$y(x) = 0$ είναι λύση

Συμπεριφορά στο επίπεδο φάσεων

—

Έστω μια συνάρτηση $F(t,y)$ λέγεται ομογενής βαθμού m ως προς t και y αν $\forall (t,y)$ στο Π.Ο. της f & $\forall \lambda \in R$ ισχύει

$F(\lambda t, \lambda y) = \lambda^m F(t,y)$, $(t,y) \in R^2$

$y = y(t)$

$M(t,y) + N(t,y) y' = 0$ (1)

M, N : ομογενείς του ίδιου βαθμού

$M(t,y)$

$N(t,y)$

$u = \frac{y}{t} \Rightarrow y = ut$, $t \ne 0$

$M(t,y) = M(t, tu) = t^k M(1,u)$

$N(t,y) = M(t, tu) = t^k N(1,u)$

$u = \frac{y}{t} \Rightarrow y = ut \Rightarrow y' = (ut)' = u't + u$

$t^k M(1,u) + t^k N(1,u)(u + tu') = 0$

(1) $y' = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)} \left(= -\frac{M(1,u)}{N(1,u)} \right)$

$$\frac{M(t,y)}{N(t,y)} = \frac{M(1,u)}{N(1,u)} = f(u)$$

$$\frac{du}{u+f(u)} = -\frac{dt}{t}$$ χωριζομένων μεταβλητών

Παράδειγμα

$$y' = \frac{t+y}{t-y}$$ για $y=t$ δεν υπάρχει η εξίσωση

$$\left.\begin{aligned} N(t,y) &= t-y \\ M(t,y) &= -(t+y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ ομογενείς 1ου βαθμού

$$u = \frac{y}{t} \Rightarrow y = ut \Rightarrow y' = u + u't$$

$$u + u't = \frac{t+ut}{t-ut} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \frac{dt}{t}$$ χ.μ.

$$\int \frac{du}{1+u^2}\,du - \int \frac{u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dt}{t} + c$$

$$\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|t| + c$$

$$2\arctan\frac{y}{t} = \ln(t^2+y^2) + c$$