5º ΜΑΘΗΜΑ
22-10-14

Ακριβείς (πλήρεις) Δ.Ε.

$y = y(t)$

$M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0$: ακριβής $\iff \exists\, G(t,y)$ έτσι ώστε η Δ.Ε. να γράφεται $\frac{dG(t,y)}{\partial t} = 0$

/*

$y' = -\frac{M}{N}$

$F(t,y)$

$\frac{\partial F}{\partial t}$ $\frac{\partial y}{\partial y}$

(F_t) (F_y)

$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$ $\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}}$

Αν είναι συνεχείς είναι ίσες αλλιώς όχι.

γνωστός ορισμός

$\frac{dF(t,y)}{dt}$ ολικό διαφορικό $= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

*/

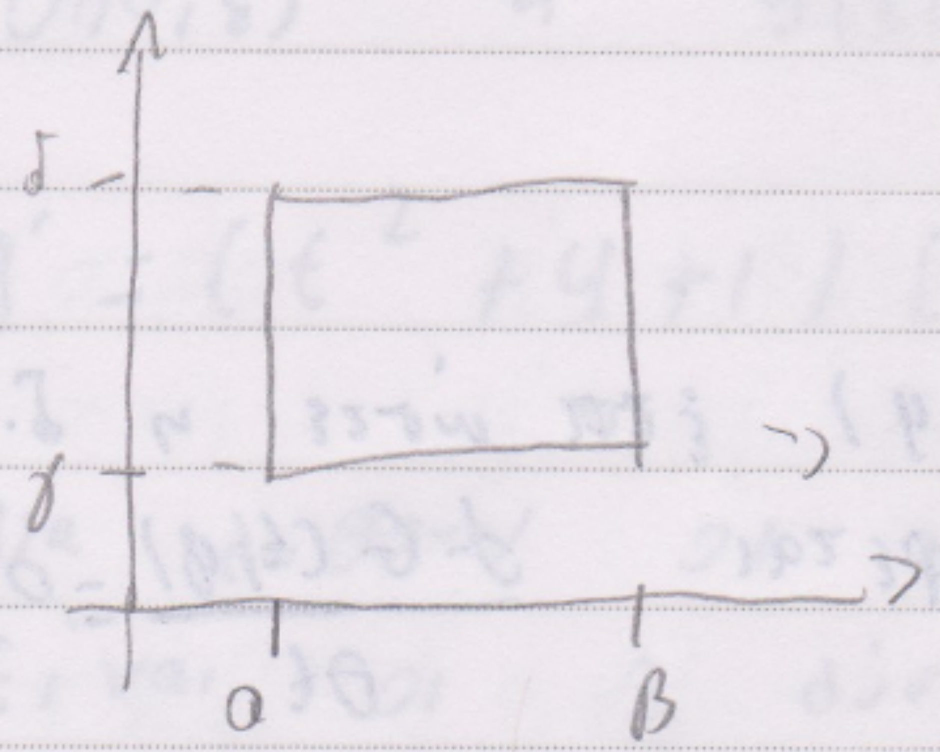
Έστω $\exists\, G(t,y)$:

$\frac{\partial G}{\partial t} = M$ & $\frac{\partial G}{\partial y} = N$

Τότε $\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$

$\frac{dG(t,y)}{dt} = 0 \Rightarrow G(t,y) = C$ σταθερή (Δεν ξέρουμε πότε και ποια είναι)

ΘΕΩΡΗΜΑ

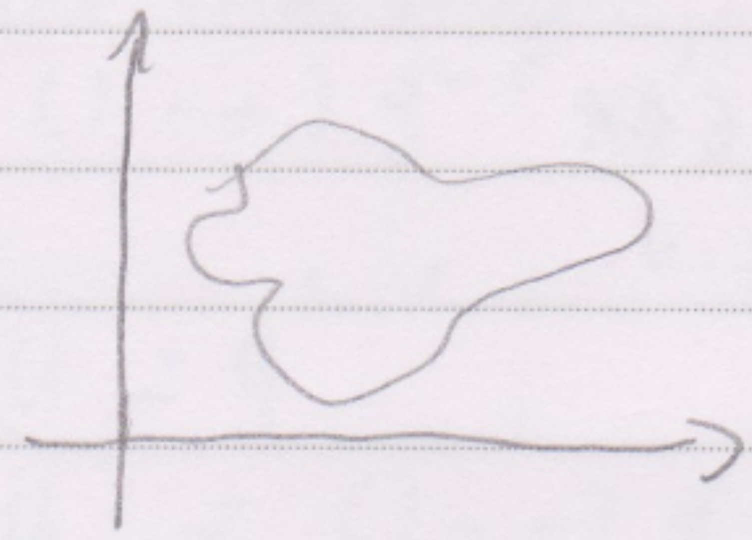


τα α, β, γ, δ μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά

κανονικά πεδία ορισμού M, N

$R = \{ (t,y) : t \in (\alpha,\beta) , y \in (\gamma,\delta) \}$

Αντί για το ορθογώνιο μπορούμε να έχουμε



R : απλά συνεκτικό (χωρίς τρύπες για R^2)

Έστω ότι οι $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial t}$ είναι συνεχείς στο R

Η δ.ε. $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ είναι ακριβής ΤΟΤΕ ΚΑΙ ΜΟΝΟΝ ΤΟΤΕ αν

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

στο R(*) (μας λέει το πότε έχουμε)

Αν ισχύει ∃ η G

Αυτό σημαίνει ότι $\exists\, G(t,y)$:

$\dfrac{\partial G}{\partial t} = M$ & $\dfrac{\partial G}{\partial y} = N$ (ολοκληρώνουμε από την 1η θα βρούμε άπειρες λύσεις από την 2η μία)

αν και μόνον αν οι M και N ικανοποιούν την (*)

$$\underbrace{y\cos t + 2te^{y}}_{M(t,y)} + \underbrace{(\sin t + t^2 e^{y} - 1)}_{N(t,y)}\, y' = 0$$

Για να λύνεται πρέπει:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos t + 2te^{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \cos t + 2te^{y}$$

$\Rightarrow$ η Δ.Ε. είναι ακριβής $\Rightarrow \exists\, G(t,y)$:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = M = y\cos t + 2te^{y}$$ (1) ολοκληρώνουμε ως προς t

και

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N = \cancel{y\cos}\ \sin t + t^2 e^{y} - 1$$ (2)

"$h(y)$" (ανεξάρτητη επαρκώς παραγωγίσιμη)

(1) $\Rightarrow G(t,y) = \int M\, dt = y\sin t + t^2 e^{y} +$ "σταθερά" (ως προς t)

παραγωγίζω ως προς y

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \sin t + t^2 e^{y} + h'(y)$$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow \sin t + t^2 e^{y} - 1 = \sin t + \cancel{e^2}\, t^2 e^{y} + h'(y) \Rightarrow$

$h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$ $+C$ Αλλά θέλουμε μια $h(y)$

οπότε το C δεν το βάζουμε

Τελικά $G(t,y) = y\sin t + t^2 e^y - y$
και η γενική λύση της Δ.Ε είναι

$$y(\sin t - 1) + t^2 e^y = c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Άσκηση να κάνω την δική της

$$\underbrace{10ty + 3y}_{M} + \underbrace{(5t^2 + 3t + y^2)}_{N} y' = 0$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 10t + 3$ $\quad \frac{\partial N}{\partial t} = 10t + 3$; ακριβώς

$\frac{\partial G}{\partial t} = M = 10ty + 3y$ → ολοκλ. ως προς t : $G(t,y) = 5t^2 y + 3ty + h(y)$

$\frac{\partial G}{\partial y} = N = 5t^2 + 3t + y^2$

παραγωγίζω ως προς y → $\frac{\partial G}{\partial y} = 5t^2 + 3t + h'(y)$

⇒ $h'(y) = y^2$
ολοκληρώνοντας
$h(y) = \frac{1}{3} y^3$

$$G(t,y) = (5t^2 + 3t)y + \frac{1}{3}y^3$$

γενική λύση
$$y[5t^2 + 3t + \frac{1}{3}y^2] = c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Χαμιλτονιανά συστήματα

$x = x(t)$, $y = y(t)$

$H(x,y)$: C^2 συνάρτηση

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial H}{\partial x}}_{M(x,y)} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial y}}_{N(x,y)}\frac{dy}{dx} = 0$$

Για να είναι ακριβής πρέπει: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cancel{\frac{\partial N}{}}\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad G = H \qquad \text{Άρα } H(x,y) = c$$

(Σχέση x με y την έχω λύση το σύστημα γιατί την έχω λύση ως προς t)

Έστω $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ μη ακριβής $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \neq 0$

Μπορώ να βρω $\mu = \mu(t,y)$:

$$\underbrace{\mu(t,y)M(t,y)}_{\tilde{M}} + \underbrace{\mu(t,y)N(t,y)}_{\tilde{N}}y' = 0 \quad \text{ακριβής;}$$

Πρέπει $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t}N + \mu\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)\mu = 0$$

- ($1^{η}$ περίπτωση) $\mu = \mu(t)$
- $\mu = \mu(y)$
- $\mu = \mu(ty)$

$1^{η}$ περίπτωση $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ Άρα

$$\mu' + \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)\mu = 0$$

Αν εξαρτάται μόνο του t $\quad p(t)$

$$\mu(t) = e^{+\int p(t)\,dt} \quad \Big| \; \mu' + p\mu = 0$$

$2^{η}$ περίπτωση $-N\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$