3º ΜΑΘΗΜΑ

15-10-14

$y' + P(t)y = 0$ Γραμμική ομογενής (0) → χωρίζ. μεταβλ.

$y(t_0) = y_0$ με $P(t)$ συνεχής συνάρτηση

$t \in I$ με $P: I \to R$ συνεχής

· Αν $y_0 = 0$ τότε η $y_0(t) = 0$ λύση του Π.Α.Τ.

· $y' + P(t)y = 0$ χωρ. μεταβλ.

$y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = -P(t)\,dt$ ολοκλήρωση από t_0 έως t

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dy}{y} = -\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt \Rightarrow \ln\frac{|y(t)|}{|y(t_0)|} = -\int_{t_0}^{t} P(\xi)\,d\xi \Rightarrow$$

$$|y(t)| = |y(t_0)|\, e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi)\,d\xi} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = \pm y(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} P_s\,ds} \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad t_0 \to t$$

Άρα $y(t_0) = \pm y(t_0)$

$$y(t) = y_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} P_s\,ds}$$ Δ λύση Π.Α.Τ.

Επεκτείνεται ✓ για $y_0 = 0$

Γραμμική $(a_1 y_1 + a_2 y_2)' = a_1 y_1' + a_2 y_2' =$

$= -a_1 P y_1 - a_2 P y_2 = -P(a_1 y_1 + a_2 y_2)$

$(a_1 y_1 + a_2 y_2)' + P(a_1 y_1 + a_2 y_2) = 0$

$y' + P(t)y = g(t)$ γραμμική μη ομογενής ($g(t)$)

ΔΕΝ είναι χωρίζ. μεταβλ.

$y = c \cdot e^{-\int P(t)\,dt}$, όπου c: αυθαίρετη σταθερά

$\Sigma \cdot y' + p(t)\, y = g(t)$, p, g συνεχείς

$$y' = -p(t)\, y + g(t)$$

ο τύπος θα ισχύει με συντελεστή Σ στην y' $(\Sigma \cdot y')$

Έστω $\mu(t) > 0$

και έστω $\mu(t)$ τέτοια ώστε

$$\mu(t)\,(y' + p(t)\, y) = (\mu(t)\, y)'$$

$$\mu y' + \mu p y = \mu y' + \mu' y$$

$$\mu' - p\mu = 0$$

$$\mu(t) = c\, e^{\int p(t)\, dt}$$ θέλω με μ απλ

$$\boxed{\mu(t) = e^{\int p(t)\, dt}}$$

$$\mu y' + \mu p y = \mu g$$

$$(\mu y)' = \mu g \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω}}$$

$$\mu y = \int \mu g + c$$

$$\boxed{y = c\mu^{-1} + \mu^{-1} \int \mu g}$$

ολοκληρώνω ως προς t

$$y(t) = c\, e^{-\int p(t)\, dt} + e^{-\int p(t)\, dt} \int^{t} e^{\int^{t} p(s)\, ds}\, g(s)\, ds$$

Τύπος επίλυσης χωρίς αρχική συνθήκη

Αν έχουμε αρχική συνθήκη

$y(t_0) = y_0$

(1) $$y(t) = c\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} + e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \cdot g(s)\,ds$$

$y_0 \qquad c \qquad 1 \qquad 0$

$c = y_0$

Παρατηρούμε αν το c δεν είναι ανεξάρτητο η λύση είναι μοναδική (παντού, όχι τοπικά)

Άρα η λύση με Α.Σ δίνεται αν το c ισούται y_0

Αν ~~έχου~~ δεν έχουμε Α.Σ δουλεύουμε σε ένωση διαστημάτων όπου και p και g είναι συνεχής

Αν έχουμε Α.Σ. τότε δουλεύουμε στο διάστημα που είναι συνεχής & ανήκει το y_0

(2) Γενική λύση μη ομογενούς

$y' = p(t)\, y = 0$

$y_{ομογ} = c\, e^{-\int p(t)\,dt}$

$$y(t) = c\, e^{-\int p(t)\,dt} + e^{-\int p(t)\,dt} \int e^{\int^{s} p(t)\,dt}\, g(s)\,ds$$

γενική λύση μη ομογενούς $(y' + p(t)y = g(t))$ = γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $(y' + p(t)y = 0)$ + μια ειδική λύση της μη ομογενούς

Λυση όταν έχω Α.Τ

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \cancel{+ e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}} + \int_{t_0}^{t} \left(e^{-\int_{\tau}^{t} p(s)\,ds}\right) \cdot g(\tau)\,d\tau$$

$$y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{\tau}^{t} p(s)\,ds} \cdot g(\tau)\,d\tau$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Π.Α.Τ

$$y' + \frac{1}{t} y = 1 \quad , t>0$$

$$y(1) = 0 \qquad (y(t_0) = y_0$$

$p(t) = \frac{1}{t}$ συνεχης $(0, +\infty)$

$g(t) = 1$ -//-

$t_0 = 1$

$y_0 = 0$

$$y(t) = \int_1^t e^{-\int_{\tau}^{t} \frac{ds}{s}}\, d\tau$$

$$-\int \frac{ds}{s} = -\ln s$$

$$-\int_{\tau}^{t} \frac{ds}{s} = \ln \tau - \ln t = \ln\left(\frac{\tau}{t}\right)$$

$$e^{-\int_{\tau}^{t} \frac{ds}{s}} = \frac{\tau}{t}$$

$$\int_1^t \frac{\tau}{t}\, d\tau = \frac{1}{t} \int_1^t \tau\, d\tau = \cancel{\frac{1}{t}}\ \cancel{\frac{t}{t}}\left[\frac{t^2}{2}/_1\right]$$

$$\frac{1}{t}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_1^t = \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \quad t>0$$

$\cdot\, y' - y = 1 + 3\sin t$
$y(0) = y_0$

Για ποια y_0 η λύση είναι · φραγμένη συνάρτηση
· περιοδική

$p(t) = -1$
$g(t) = 1 + 3\sin t$
$t_0 = 0$

Γενική λύση
$y(t) = ce^{t} - 1 - \frac{3}{2}(\sin t + \cos t)$

$y_0 = y(0) = c - 1 - \frac{3}{2} = c - \frac{5}{2} \Rightarrow c = y_0 + \frac{5}{2}$

$y(t) = \left(y_0 + \frac{5}{2}\right)e^{t} - 1 - \frac{3}{2}(\sin t + \cos t)$

Για να είναι φραγμένη πρέπει
$\left(y_0 + \frac{5}{2}\right)e^{t}$ να είναι φραγμένη άρα
$y_0 = -\frac{5}{2}$
το ίδιο για την περιοδική

$y' + ay(t) = \boxed{\int_0^b y(t)\,dt}$ $\quad a, b \in R$

$y(0) = \gamma$, $\gamma \in R$ προσδιοριστικός αριθμός (άγνωστος)
Έστω m.

$y' + ay = m$
$y(0) = \gamma$
$y(t) = \gamma e^{-at} - \frac{m}{a}\left(e^{-at} - 1\right)$ λύση για m ①

$m = \int_0^b y(t)\,dt = \int_0^b \gamma e^{-at} - \frac{m}{a}\left(e^{-at} - 1\right) dt$

$$\Rightarrow \frac{\gamma\left(1-e^{-aB}\right)}{a+\frac{1}{a}\left(1-e^{-aB}\right)-B} = m \qquad M2$$

Να λύσω αναλυτικά τις ασκήσεις

(ΔΕΝ ΘΑ ΜΕΤΡΗΘΕΙ ΚΑΛΟΥ)