21/05/10
Μάθημα 32

Τοπικά Ακρότατα (ανέχεια)

f: C^2 συνάρτηση, (x_0,y_0) Π.Ο. f: $U(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

U ανοιχτό

$\boxed{(x_0,y_0): \text{κρίσιμο σημείο}}$

άρα $\boxed{\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = (0,0)}$

Τύπος Taylor $\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(\xi_1,\xi_2)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}$

με (ξ_1,ξ_2) μεταξύ των (x_0,y_0), (x,y).

$H_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$ ο Εσσιανός Πίνακας στο (x_0,y_0)

Θετικά / Αρνητικά / Αόριστα ορισμένος Πίνακας$_{2\times2}$

$A = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$

i) $A>0$ θ.ο. $\iff \forall (x,y) \neq (0,0)$ $(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$

ii) $A<0$ α.ο. $\iff \forall (x,y) \neq (0,0)$ $(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} < 0$

iii) A αόρ. ορ. $\iff \exists (x_1,y_1), (x_2,y_2)$ $(x_1,y_1)A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} > 0$

$(x_2,y_2)A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} < 0$

Για $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 3$ έχουμε ανάλογα αποτελέσματα.

Ισοδύναμα (Sylvester)

i) $A>0 \iff \alpha>0$ και $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma-\beta^2>0$

$\iff$ ιδιοτιμές του A $\lambda_1, \lambda_2>0$

ii) $A<0 \iff \alpha<0$ κ' $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} > 0$

$\iff \lambda_1,\lambda_2<0$

iii) A αόριστος $\iff \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}<0 \iff \lambda_1\cdot\lambda_2<0$

Συμπεράσματα για το κρισ. σημ. (x_0,y_0) **

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(x-x_0,y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(\xi_1,\xi_2)}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}$$

i) $H_{(x_0,y_0)}>0$, δηλ. $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}>0$

τότε $\exists\, \delta>0: 0\neq\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ με $(x,y)\in U$ ώστε

$H(x,y)>0 \Rightarrow H(\xi_1,\xi_2)>0$

Τότε $f(x,y)>f(x_0,y_0)$. Άρα για

$$\boxed{f_{xx}(x_0,y_0)>0, \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}>0 \text{ το } (x_0,y_0) \text{ τοπ. ελάχιστο}}$$

ii) $H_{(x_0,y_0)}<0$ δηλ. $f_{xx}(x_0,y_0)<0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}>0$

τότε $\exists\ \delta>0$: $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ με $(x,y)\in U$ ώστε $H_{(x,y)}<0$

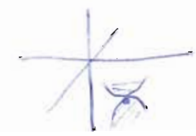
$\Rightarrow H_{(\xi_1,\xi_2)}<0$

Τότε, $f(x,y)<f(x_0,y_0)$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$. Άρα για

$\boxed{f_{xx}(x_0,y_0)<0,\ \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}>0 \text{ το } (x_0,y_0) \text{ Τοπ. Μέγιστο}}$

iii) $H(x_0,y_0)$ αόρ. ορ.

$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}<0$ τότε έχουμε τοπ. μέγ. ως προς κατεύθυνση, τοπ. ελάχ. ως προς άλλη



Τότε, το (x_0,y_0) σημείο σέλλας ή σαγματικό σημείο

• Στις υπόλοιπες περιπτώσεις ΔΕΝ έχουμε συμπέρασμα.

Ασκήσεις

1) $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Να βρεθούν τα τοπ. ακρότατα ~~και~~ κ' σημ. σέλλας

Κρίσιμα Σημεία: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

δηλ. $f_x = y_0-2x_0-2$, $f_y = x_0-2y_0-2$ $\Big|$ $y_0-2x_0=2$, $x_0-2y_0=2$ $\Big\}\Rightarrow (x_0,y_0)=(-2,2)$

$f_{xx}(-2,-2)=-2<0$, ~~$f_{yy}(-2,-2)$~~

$H_{(-2,2)}=\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3>0$

Άρα, το $(-2,2)$ τοπ. μέγιστο

$f_y(x_0,y_0)=0$

$f_x(x_0,y_0) = 3x_0^2 - 6x_0$ | $(x_1,y_1) = (0,0)$

$f_y(x,y) = 2y$ | $(x_2,y_2) = (2,0)$

i) $(x_1,y_1) = (0,0)$

$f_{xx}(x,y) = 6x-6$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 2$

$f_{xx}(0,0) = \underline{-6<0}$

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-12<0}$$

Άρα το $(0,0)$ σημ. σέλλας

ii) $(x_2,y_2) = (2,0)$

$f_{xx}(2,0) = \underline{6>0}$

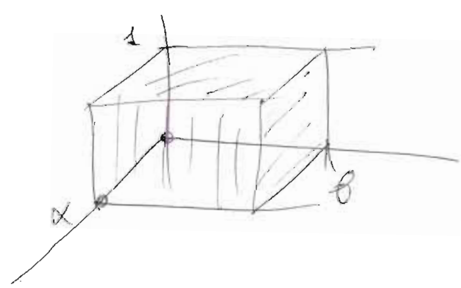
$$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{12>0}$$

Άρα το $(2,0)$ τοπ. ελάχιστο

3) $B_{a,b} = [0,a]\times[0,b]\times[0,1]$, $a,b>0$ (ορθ. //επίπεδο)

Για ποια $a,b>0$ το δ.π. $\vec{F}(x,y,z) = (-x^2-4xy, -6yz, 12z)$ έχει την μέγιστη ροή διαμέσου της επιφάνειας του B_{ab} ;

$$P_{a,b} = \iint_{(\partial B_{ab})^+} \vec{F}\, d\vec{S} \overset{(Gauss)}{=} \iiint_{B_{ab}} \operatorname{div}\vec{F}\, dV$$



$$(P,Q,R) = \left(-x^2-4xy,\ -6yz,\ 12z\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)(x,y,z)$$

$$= -2x-4y-6z+12$$

$$P_{a,b} = \int_0^1 \int_0^a \left(\int_0^b (12-2x-4y-6z)\,dy\right)dx\,dz = \dots = ab(9-a-2b)$$

$$f(a,b) = P_{a,b} = ab(9-a-2b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 9b-2ab-2b^2 \overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} 9-2a-2b=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 9a-a^2-4ab \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} 9-a-4b=0$$

Λύση: $(a=3,\ b=\frac{3}{2})$

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} -2b & 9-2a-4b \\ 9-2a-4b & -4a \end{pmatrix}_{(3,3/2)} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$f_{aa}(3,\tfrac{3}{2}) = -3 < 0$$

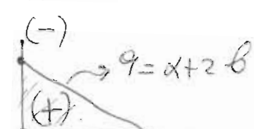
Ορίζουσα του $H(3,3/2) = 3\cdot 12 - 9 > 0$

$\Big\}$ $(3,3/2)$ Τοπ. Μεγ.

Σημ. Το $(3,\ 3/2)$ είναι σημ. Ολικού Μεγίστου $f(a,b)=ab(9-a-$

(x,y): $x+2y>9$ η $f(x,y)<0$

$f(3,3/2)>0$



Στο τρίγωνο η $f(\alpha,\beta)\geq 0$ συνεχής με ένα μόνο κρίσιμο σημείο. Επειδή στο τρίγωνο (κλειστό+φραγμένο) παίρνει μέγιστη τιμή και στις πλευρές παίρνει τιμή $=0$, το $(3,\frac{3}{2})$ είναι σ. μέγιστο στο τρίγωνο, άρα και σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

4)** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, C^2 κ' $H_{(x,y)}>0$ κ' (x_0,y_0) Κρισ. σημ. 187

Τότε, το (x_0,y_0) είναι Ολικό Ελάχιστο.

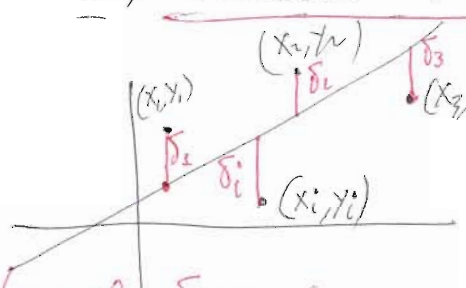
$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}^T H(\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix} > f(x_0,y_0),$$

$(x,y)\neq(x_0,y_0)$

$$\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\,y-y_0)=0$$

(Σημ. Εάν κυρτή συνάρτηση έχει κρ. σημείο $\Rightarrow$ έχει σ' αυτό Ολ. Ελαχ.

5)** Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων



$\delta_i = y_i-(\alpha x_i+\beta)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_N,y_N)$, $(N\geq 2)$

Ζητάμε $a,b\in\mathbb{R}$, ευθεία $y=ax+b$ η οποία ελαχιστοποιεί $\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-(ax_i+b)\right)^2$

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{N}(y_i-ax_i-b)^2$$

$$f_a(a,b) = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i-ax_i-b)x_i = 0 \Rightarrow a_0\sum_{i=1}^{N}x_i^2 + b_0\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right) = \sum_{i=1}^{N}x_iy_i$$

$$f_b(a,b) = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i-ax_i-b)=0 \Rightarrow a_0\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)+Nb_0 = \sum_{i=1}^{N}y_i$$

$f_{aa} = 2\sum x_i^2>0$

$f_{bb} = 2N$

$f_{ab} = 2\sum x_i$

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} 2(\sum x_i)^2 & 2(\sum x_i)\\ 2(\sum x_i) & 2N\end{pmatrix}$$

$f_{aa}>0$

ορίζουσα $H(a,b)>0$ (αν C-S)

Άρα, η f κυρτή κ' το μοναδικό κρίσιμο (a_0,b_0) είναι Ολ. Ελάχιστο

// ΤΕΛΟΣ ☺ //