Θεώρημα I $\vec{F} = (P, Q, R)$

$\vec{F}: A \to \mathbb{R}^3$, συνεχής, A ανοιχτό + συνεκτικό Τ.Ε.Ε.Ι

i) $\vec{F}$ = συντηρητικό

ii) $\oint_{\Gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = 0$, $\forall$ Κ κλειστή "καλή" καμπύλη A

iii) $\exists\, f: A \to \mathbb{R}$, $\vec{F} = \nabla f \left(P = \frac{\partial f}{\partial x}, Q = \frac{\partial f}{\partial y}, R = \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Τότε $\boxed{\int_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{\beta}) - f(\vec{\alpha})}$ (*) $\left(\int_a^\beta g'(x)dx = g(\beta) - g(\alpha) \right)$

(*) Στο (*) το $\int_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ έχει έννοια μόνον σε περίπτωση
όταν το $\vec{F}$ = συντηρητικό, επειδή για τυχαία "καλή" καμπύλη Γ αρχής $\vec{\alpha}$, πέρατος
το $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ΔΕΝ εξαρτάται από την Γ

Ασκήσεις $\boxed{\text{Σελίδα A}}$

1) $\vec{F}(x,y,z) = (e^x \sigma\upsilon\nu y + yz,\ xz - e^x \eta\mu y,\ xy + z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

i) Είναι το Σ.Π $\vec{F}$ συντηρητικό;

ii) Εάν ναι, να βρεθεί η $f: \vec{F} = \nabla f$

Το $\mathbb{R}^3$ είναι απλά συνεκτικό σύνολο

$\vec{F}$ συντηρ. $\Leftrightarrow \vec{F}$ αστρόβιλο

στροβιλισμός του $\vec{F}$: $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{(x,y,z)} =$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(x,y,z)} = (x-x, y-y, (z-e^x ημy)+$$

$$= (0,0,0)$$

i) F = αστρόβιλο $\Rightarrow \vec{F}$ = συντηρητικό

ii) Υπάρχει $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $\vec{F} = \nabla f$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^x συνy + yz \ (1) \xRightarrow{\text{ολ. ως προς } x} f(x,y,z) = e^x συνy + xyz + h_1(y,z) \ (4) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz - e^x ημy \ (2) \xRightarrow{\text{ολ ως προς } y} f(x,y,z) = xyz + e^x συνy + h_2(x,z) \ (5) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + z \ (3) \end{cases}$$

Εξισώναμε τις (4), (5) $h_1(y,z) = h_2(x,z) = h(z)$, $f(x,y,z) = xyz + e^x συνy + h($

Παραγωγίζαμε την (6) ως προς z, και εξισώναμε με την (3):

$$xy + h'(z) = xy + z, \quad h'(z) = z, \quad h(z) = \frac{z^2}{2} + c$$

Τελικά $\boxed{f(x,y,z) = xyz + e^x συνy + \frac{z^2}{2} + c}$

2) $\vec{F}(x,y,z) = (y, x, 4)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$

i) Είναι το δ.π. $\vec{F}$ συντηρητικό;

ii) Να βρεθεί $f: \vec{F} = \nabla f$.

iii) Εαν ναι, να υπολογιστεί $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} \vec{F} \circ d\vec{r}$

$\mathbb{R}^3$ είναι απλά συνεκτικό

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 4 \end{vmatrix} = (0-0,\ 0-0,\ 1-1) = (0,0,0)$$

2) $\vec{F}$ αστρόβιλο στον $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \vec{F}$ συντηρητικό

ii) $\exists\ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy + h_1(y,z) \\ f(x,y,z) &= xy + h_2(x,z) \end{aligned}\right\} h_1(y,z) = h_2(x,z) = h(z)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy + h(z) \\ h'(z) = 4 &\Rightarrow h(z) = 4z \end{aligned}\right\} f(x,y,z) = xy + 4z + c$$

iii) $$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(2,3,-1) - f(1,1,1) = (6-4) - (1+4) = 2-5 = -3$$

3) $W = \int_{\Gamma} 2x\,\text{συν}y\,dx - x^2\,\text{ημ}y\,dy$

όπου $\Gamma_1 : y = (x-1)^2$ από $(1,0) \to (0,1)$

Γ_2 : ευθ τμήμα από $(1,0) \to (0,1)$

$\Gamma_3 : x^{3/2} + y^{3/2} = 1, \quad (x,y \geq 0)$ από $(1,0) \to (0,1)$

$\Gamma_4 : \left(\frac{x-1}{10^{10}}\right)^2 + \left(\frac{y - 10^{10^{10}}}{10^{20}}\right)^2 = 1$

$\vec{F}(x,y) = (2x\,\text{συν}y, -x^2\,\text{ημ}y) = (P,Q)_{(x,y)}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x\,\text{ημ}y = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{F}$ = συντηρητικό στον $\mathbb{R}^2$ = απλά συνεκτικό

$f(x,y) = x^2\,\text{συν}y + c$

$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,0) - f(0,1) = 1$

$\int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ (Γ_4 = κλειστή)

4) $\vec{F}(x,y,z) = \big(z\,\sigma\upsilon\nu(x z), e^{y}, x\,\sigma\upsilon\nu(x z)\big)$, (x,y,z)

i) Να βρεθεί $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\vec{F} = \nabla f$ (αν υπάρχει)

ii) να υπολογ. $W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου Γ τυχαία ημιπεριφέρεια Γ που ενώνει τα $(0,0,0)$, $(1,0,\pi/2)$

$\mathbb{R}^3$ = απλά συνεκτικό

$\vec{F}$ = συντηρητικό $\Leftrightarrow$ $\vec{F}$ = αστρόβιλο

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\,\sigma\upsilon\nu(xz) & e^{y} & x\,\sigma\upsilon\nu(xz) \end{vmatrix} = \big(0-0, -(\sigma\upsilon\nu(xz) - xz\,\eta\mu(xz)) + (\sigma\upsilon\nu(xz) - xz\,\eta\mu(xz)), \ldots$$

$$= (0,0,0)$$

i) $\exists$ $f : \vec{F} = \nabla f$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = z\cdot\sigma\upsilon\nu(x z) \Rightarrow f(x,y,z) = \eta\mu(xz) + h_1(y,z) \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y} \Rightarrow f(x,y,z) = e^{y} + h_2(x,z) \quad (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x\cdot\sigma\upsilon\nu(xz) \Rightarrow f(x,y,z) = \eta\mu(xz) + h_3(x,y) \quad (3) \end{cases}$$

$(1) = (2)$ $\quad h_1(y,z) = h_3(x,y) = h(y)$ $\qquad f(x,y,z) = \eta\mu(xz) + h(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y} = h'(y) \Rightarrow h(y) = e^{y} + c$$

$$f(x,y,z) = \eta\mu(xz) + e^{y} + c$$

ii) $W = \int_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = f(1,0,\pi/2) - f(0,0,0) = (1+1) - (0+e^0) = 1$

5) $\vec{F}(x,y,z) = (\overset{P}{y^2 + 2axz}, \overset{Q}{y(\beta x + az)}, \overset{R}{y^2 + ax^2})$

i) Υπάρχει $a, \beta \in \mathbb{R}$: $\vec{F}$ να είναι συντηρητικό;

ii) Εάν ναι, να βρεθεί $f : \vec{F} = \nabla f$.

$\mathbb{R}^3$ = απλά συνεκτικό
Συντηρητικό $\Leftrightarrow$ αστρόβιλο

$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$2y = \beta y$ | $\beta = 2$
$ay = 2y$ | $a = 2$
$2ax = 2ax$

$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + 4xz, 2xy + 2yz, y^2 + 4x^2)$

Λύνουμε το $\vec{F} = \nabla f$.

$f(x,y,z) = xy^2 + 2x^2 z + y^2 z + c$

6) $\vec{F}(x,y) = (5x^4y + y^5 + \beta y,\ ax^5 + 5xy^4 + x)$

i) a, β · $\vec{F}$ = συντηρητική

ii) f με $\nabla f = \vec{F}$

iii) Ακρότατα / σαγματ. της f.

---

i) Πρέπει να ισχύει: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $a = \beta = 1$

ii) $\vec{F}(x,y) = (5x^4y + y^5 + y,\ x^5 + 5xy^4 + x)$. Λύνουμε το σύστημα $\vec{F} = \nabla f$

$$f(x,y) = x^5y + y^5x + xy$$

iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, Κρίσιμο $(0,0)$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Το $(0,0)$ είναι σαγματικό ~~σημείο~~ σημείο

$\boxed{\text{Σημείωση}}$: i) $\vec{F}$ = συντηρητικό, $\vec{F} = \nabla f$. Την $\varphi = -f$ καλάμε δυναμικό του δ.π. $\vec{F}$

ii) Η f είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Αν $f = \nabla f_1 = \nabla f_2 \Rightarrow \nabla(f_1 - f_2) = 0 \overset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{\Rightarrow} f_1 = f_2 + c$

Ομάδα Β

1) $\vec F : B \to \mathbb{R}^3$, B = ανοιχτό + απλά συνεκτικό

$\vec F$ αστρόβιλο + ασυμπίεστο

Τότε $\exists\, f : \vec F = \nabla f$ και $\nabla^2 f = 0$.

B = ανοιχτό + απλά συνεκτικό $\Rightarrow \vec F$ = συντηρητικό

άρα $\exists\, f : \vec F = \nabla f$.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2} = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}$$

Τελικά: η f είναι αρμονική δηλ $\nabla^2 f = 0$

ισχύει $\operatorname{div}(P,Q,R) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{R}{\partial z}\right)$ όπου $P = \frac{\partial}{\partial}$ $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ $R = \frac{\partial f}{\partial z}$

Εφαρμογή

2) $\vec F(\vec r) = -GM \frac{\vec r}{r^3}$, π. βαρύτητας της Γης.

$\vec r = (x,y,z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|\vec r\|$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ (=απλά συνεκτι

i) $\vec F$ είναι αστρόβιλο + ασυμπίεστο

ii) $\varphi = -MG\frac{1}{r}$ συνάρτηση δυναμικού της $\vec F$

και $\nabla^2 \varphi = 0$.

- $\vec F$ ασυμπίεστο (σελ. 274)
- $\vec F$ αστρόβιλο (εύκολο)
- Παίρνουμε την $-\frac{\vec r}{r^3} = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$

Βρίσκουμε $f : \nabla f = \frac{\vec r}{r^3}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{+1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + h_1(y,z) \\ f(x,y,z) &= +\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + h_2(x,z) \\ f(x,y,z) &= +\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + h_3(x,y) \end{aligned}\right\} \; h_1(y,z) = h_2(x,z) = h_3(x,y) = c$$

Στο βαρυτικό πεδίο παίρνουμε $c=0$

Οπότε $\varphi(\vec{r}) = -MG\frac{1}{r}$ έχει, $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\varphi$

Τελικά: Ζούμε στο βαρ. πεδίο της Γης που είναι

Αστρόβιλο = Συντηρητικό

Ασυμπίεστο

Η συν. δυναμικού του είναι Αρμονική

Οι έννοιες $rot\vec{F}$, $div\vec{F}$ έχουν φυσική ερμηνεία. Για τους ενδιαφερόμενους υπάρχει βιβλιογραφία.

Τέλος