Άσκηση. Δίνεται το διαν. πεδίο

$$\vec{F} = (y^2+z^2)\vec{i} + (x^2+z^2)\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$$

και η επιφάνεια S που αποκόπτει το πρώτο οκταμόριο από το επίπεδο $x+y+z=1$.
(1) Να βρεθεί η ροή του $\mathrm{rot}\vec{F}$ διαμέσου της S.
(2) Να επαληθευτεί η ισχύς του θεωρήματος Stokes

Απαντ. (1) Έχουμε

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{pmatrix} = 2(y-z,\ -x,\ x-y)$$

οπότε, εφ' όσον το διάνυσμα $\vec{N} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ είναι κάθετο στην S παντού,

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot 2(y-z, z-x, x-y)\, dS$$

$$= \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}}(y-z+z-x+x-y)\, dS$$

$$= \iint_S 0\, dS = 0.$$

(2) Το θεώρημα Stokes μας εγγυάται πως

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

όπου γ είναι το θετικά προσανατολισμένο σύνορο της S. Από το παράδειγμα της σελίδας (257) θα είναι

$$\partial S^{+} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

και άρα

$$\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Υπολογίζουμε

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{0} (1+t)^2(-1) + t^2 \, dt = 0$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{0}^{1} (1-t)^2\cdot 1 + t^2(-1) \, dt = 0$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{1}^{2} (t-1)^2\cdot(-1) + (2-t)^2\cdot 1 \, dt = 0$$

Οπότε

$$\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

και το θεώρημα Stokes επαληθεύεται.

<u>Άσκηση.</u> Δίνεται το διαν. πεδίο

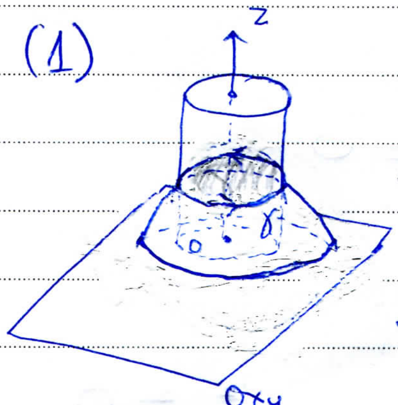
$$\vec{F} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

(1) Να βρεθεί η ροή του $rot\vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας S' που αποκόπτει ο κύλινδρος $x^2+y^2=4$ από το ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=16, z\geq 0$.

(2) Εάν c είναι η καμπύλη που αποτελεί το σύνορο της S' με την αρνητική φορά, να βρεθεί η ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της c.

<u>Απάντηση.</u>

(1)



Η τομή του κυλίνδρου και του ημισφαιρίου είναι η καμπύλη

$$\gamma: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=\sqrt{12} \end{cases}$$

Έστω ότι η γ είναι προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Από το θεώρημα Stokes

$$\iint_{S'} rot\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ επί της γ.

Μια παραμετρική παράσταση της γ είναι

$$\gamma: \ \vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, \sqrt{12}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Συνεπώς

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t \, 8\sin^3 t\,(-2\sin t) + 2\cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-64\cos^2 t \sin^4 t + 2\cos t\right) dt$$

$$= -64 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} \cdot \frac{(1-\cos(2t))^2}{4}$$

$$= -8 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2(2t)}{8} - \frac{\sin^2(2t)\cos(2t)}{8} \right) dt$$

$$= -8 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(4t)}{16} - \frac{(\sin^3(2t))'}{16 \cdot 3} \right) dt$$

$$= -8\,\frac{\pi}{8} = -\pi.$$

(2) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi.$