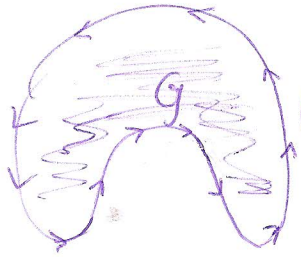




Θ. Green (εφαρμοσμένη μορφή)

Υποθέτουμε $\vec{F} = (P, Q)$ $A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A = \text{ανοικτό}$, \vec{F} είναι C^1

G -όριο Green: $\partial G = \gamma$, $\vec{r} = r(t)$, $t \in [a, \beta]$, ω αριστερά, ω δεξιά, C^1 λεία (υπό ελίφια)



$$\oint_{(\partial G^+)} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int_a^\beta \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^\beta P(x(t), y(t)) dx + Q(x(t), y(t)) dy \quad \partial G = \gamma$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|}, ds = \|\vec{r}'\| dt$$

Μοναδιαίο εφαπτόμενο

Υπολογισμός επιβαδών χρησιμοποιώντας Θ. Green.

$$\vec{F}_1(x, y) = (0, x), \quad A(G) = \iint_G 1 dx dy = \oint_G \vec{F}_1(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \oint_G 0 dx + x dy$$

$$\vec{F}_2(x, y) = (-y, 0), \quad A(G) = \oint_G \vec{F}_2(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \oint_G -y dx + 0 dy$$

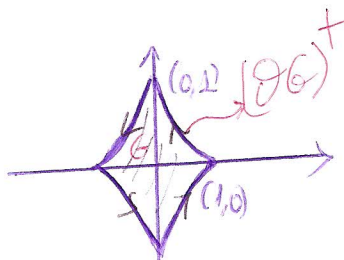
$$A(G) = \frac{1}{2} \oint_a^\beta -y dx + x dy, \quad \vec{F}(xy) = (-y, x) \quad (= -\vec{F}_1(x, y) + \vec{F}_2(x, y))$$



Εμβαδόν $G = \{(x,y) : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$

$(\partial G)^+$ $\vec{r}(t) = (aw^3t, nk^3t), t \in [0, 2\eta]$

$\vec{r}'(t) = (-3aw^2t, 3nk^2t)$



$$A(G) = \int_0^{2\eta} (-2nk^3t, aw^3t) \cdot (-3aw^2t, 3nk^2t) dt =$$

$$= 3 \int_0^{2\eta} (nk^4t + aw^4t) dt = 3 \int_0^{2\eta} nk^2t^2 dt = 3\eta/8$$

Λειτουργία Green για 2-μεταβλητές

$f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \underline{G^1, 2}$

G : εσωτερικό Green, ∂G προσεγγίζεται από μία αλυσίδα υλειρών, G^1 (u.r.), G^2 (u.z.) λεία υαφινύτη και $\underline{G \subseteq A}$.

i) $\iint_G (f \nabla^2 g) dx dy + \iint_G (\nabla f \cdot \nabla g) dx dy = \oint_{(\partial G)^+} -f \frac{\partial g}{\partial y} dx + f \frac{\partial g}{\partial x} dy =$

$(= \oint_{\partial G^+} (f \nabla g) \cdot \vec{n} ds)$



1η ταυτότ. Green

$$ii) \iint_G (f \nabla^2 f) dx dy + \iint_G \|\nabla f\|^2 dx dy = \oint_{(\partial G)^+} -f \frac{\partial f}{\partial y} dx + f \frac{\partial f}{\partial x} dy$$

2η ταυτότ. Green

iii) Έστω f αρμονική συνάρτηση ($\nabla^2 f = 0$) και $f(x,y) = 0$ για κάθε $(x,y) \in \partial G$. Τότε $f(x,y) = 0$ για κάθε $(x,y) \in G$.

(Ίσως: η λύση της $\nabla^2 g = 0$ ικανοποιεί λίαν

από τις ομογενείς συνθήκες στο G
 δηλ. αν g, h $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ και $g(x,y) = h(x,y)$ αν $(x,y) \in \partial G$
 τότε $g(x,y) = h(x,y)$ για $\forall (x,y) \in G$)

Λύση

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (\text{λαπλασιανή της } \phi)$$

$$2) \vec{F}(x,y) = \left(-f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial x} \right) = (P, Q)$$

$$\oint_{(\partial G)^+} -f \frac{\partial g}{\partial y} dx + f \frac{\partial g}{\partial x} dy = \oint_{(\partial G)^+} \left(-f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \cdot \vec{T} \cdot ds \stackrel{\text{2η Green}}{=} \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$= \iint_G (\nabla f \cdot \nabla g) dx dy + \iint_G (f \nabla^2 g) dx dy$$



ii) $f \equiv g$

iii) Έχουμε $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ στο G

$f(x,y) = 0$ για $(x,y) \in \partial G$

Άρα από την $\iint_G \|\nabla f\|^2 dx dy = 0 \rightarrow$

$\|\nabla f\|^2 = 0 \Rightarrow \nabla f(x,y) = \vec{0}, (x,y) \in G$ σ.μ.τ

$f(x,y) = c, (x,y) \in G$. Όπως $f(x,y) = 0, (x,y) \in \partial G$

Άρα $f(x,y) = 0, (x,y) \in G$ ($f = 0$ παντού)

Εφαρμογή θ. Green για αερόπλοια δ.η $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

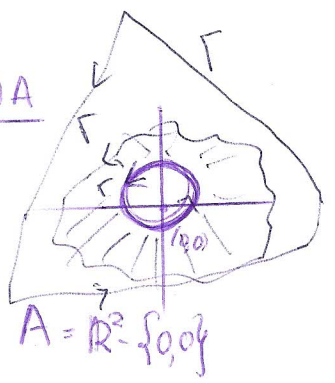
ο βερόβιλο $\nabla_x f(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) \vec{k} = \vec{0}$

για $\forall (x,y) \in A$

\vec{F} είναι C^1 , η.ο. $A = \text{ανοικτό-ΑΣΤΡΟΒΛΙΝΟ}$

Έστω ότι η F δεν ορίζεται στο $(\alpha, \beta) \in \partial A$

Τότε $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{z} = \begin{cases} 0 & \text{αν } (\alpha, \beta) \notin \partial \Gamma \\ c & \text{αν } (\alpha, \beta) \in \partial \Gamma \end{cases}$



για κάθε Γ αερίτι κλειστό + εία + C^1
(κ,ζ) κ,ζ

Το c ΔΕΝ εξαρτάται από την καμπύλη Γ

Θα το δούμε μέσω παραδείγματος. Η αδόξη γίνεται και για το ίδιο αερόπλοιο δ.η, εφέως ανάφορα.

1 Αθκ 6η

(π.ο. ως \vec{F} έχει αλγ. συντεταγμένο δυνάμειο)

Έστω $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right), (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

i) Αποδείξε ότι το \vec{F} έχει εσροβιζιμό $\vec{0}$ (αθρόβιζο) για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

ii) Υπολογίστε την ροή $I_1 = \oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ δια μέσον κλειστής, αλγ. C^1 γείας καμπύλης που $(0,0) \notin \text{εε}\Gamma_1$ (Γ1)

iii) Υπολογίστε την ροή $I_2 = \oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ δια μέσον κλειστής, αλγ. C^1 γείας καμπύλης που $(0,0) \in \text{εε}\Gamma_2$ (Γ2)

Λύση i) $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
 $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ } $\text{rot} \vec{F}(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) \vec{k} = \vec{0}$.

ii) Το $G = \text{εε}\Gamma_1 \cup \Gamma_1$ είναι αλγό δύννηο Green και η \vec{F} είναι C^1 εσροβ. άρα, (θ. Green) $I_1 = \oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G 0 dx dy = 0$

(Το δύννηο του G είναι η Γ_1). Για ωχαι $\Gamma_1 \notin (0,0) \notin \text{εε}\Gamma_1 \implies \oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 0$

iii) Το $(0,0) \in \text{εε}\Gamma_2$, η \vec{F} δεν ορίζεται στο $(0,0)$. Το $A = (\text{εε}\Gamma_2) \cup \Gamma_2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι δύννηο Green (το δύννηο του A , $\partial A = \Gamma_2 \cup \{(0,0)\}$ δεν είναι αλγ., κλειστό, C^1 γεία καμπύλη).

Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θ. Green !!

Παίρνουμε ένα κύκλο Γ_2^* κέντρον $(0,0)$ ακίνας $\alpha (\alpha > 0)$ ώστε $\text{εε}\Gamma_2^* \subseteq \text{εε}\Gamma_2$. Τότε το $B = (\text{εε}\Gamma_2 \setminus \text{εε}\Gamma_2^*) \cup \Gamma_2^* \cup \Gamma_2$ είναι δύννηο Green ($\partial B = \Gamma_2^* \cup \Gamma_2$).

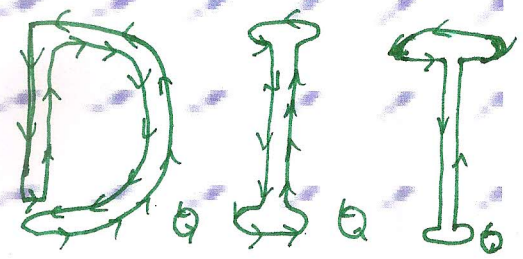
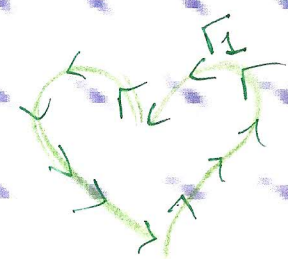
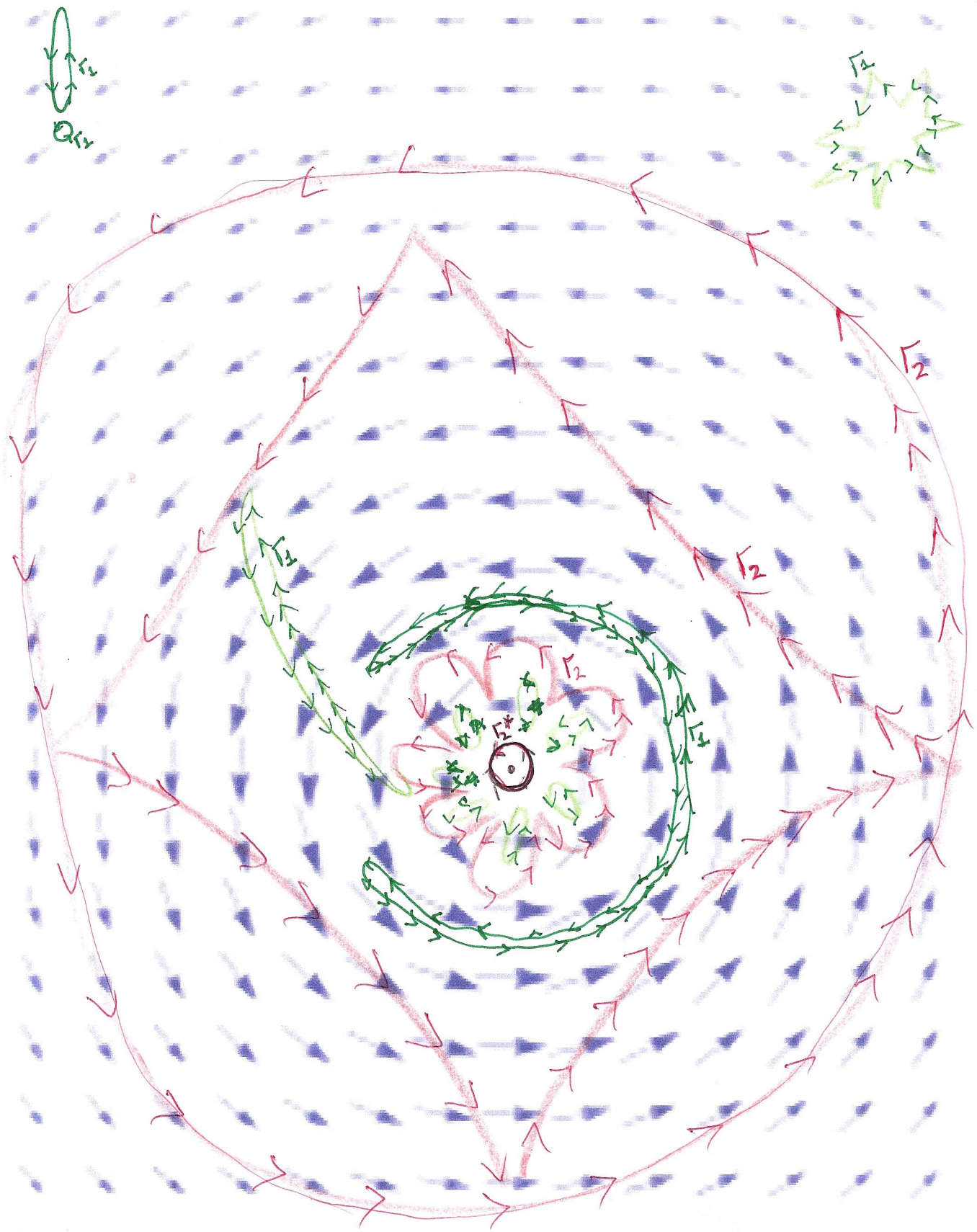
Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θ. Green :

$\oint_{(\partial B)^+} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{T} ds - \oint_{\Gamma_2^*} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$. Άρα

$\oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \oint_{\Gamma_2^*} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\alpha \cos t}{\alpha^2}, \frac{\alpha \sin t}{\alpha^2} \right) \cdot (-\alpha \sin t, \alpha \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$

$(\Gamma_2^* : \vec{r}(t) = (\alpha \cos t, \alpha \sin t), t \in [0, 2\pi], \vec{r}'(t) = (-\alpha \sin t, \alpha \cos t))$

Άρα για ωχαι $\Gamma_2 \notin (0,0) \in \text{εε}\Gamma_2$ έχουμε $\oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 2\pi$



DO YOURSELF (Γ_1, Γ_2)

233

$(0,0)$

Τεχνικά Έστω Γ καμπύλη του A , ανοίτη + υλειστη C^1 , λεία

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} 0, & (\alpha, \beta) \notin \Gamma, \\ c, & (\alpha, \beta) \in \Gamma, \end{cases} \quad \vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^1$$

$(\alpha, \beta) \in \partial A, (\alpha, \beta) \notin A (= \text{ανοιχτός})$
 $c = \text{αριθμητικό του } \Gamma$

(II) Θ. Green (Κάθετη Κορφή)

Προϋπόθεση $\vec{F}: A (\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{F} = (P, Q) \quad C^1$

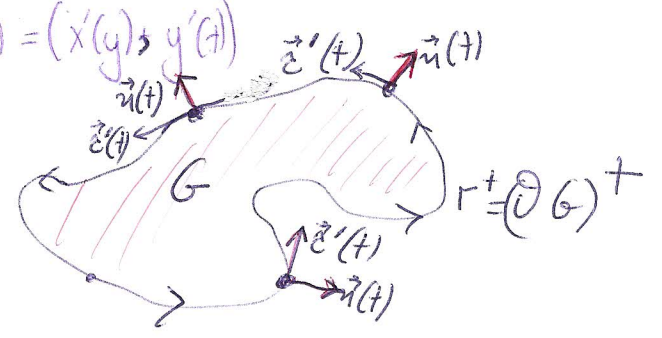
$G = \text{σύνολο Green}, G \subseteq A$

Τότε $\oint_{\Gamma^+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iint_G (\text{div } \vec{F}) dx dy, \Gamma^+ = (\partial G)^+$

όπου $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta], \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$

$\vec{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\vec{r}'(t)\|} (\perp \vec{r}'(t))$



$I = \text{εξωτερική ποή δια μέσου της } \Gamma$

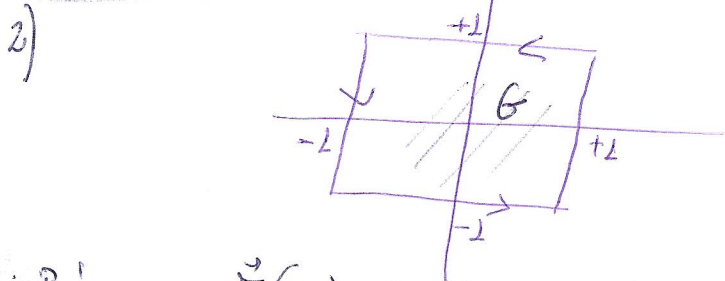
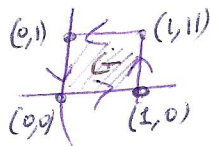
(αν το $\vec{n} \perp \vec{r}, \vec{n}$ νοείται ως το εξωτ. της \vec{r})



Άσκησης (Κάθετη μορφή Θ. Green)

3) Ροή του $\vec{F}(x,y) = xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ δια μέσου του συνόρου του $G = [0,1] \times [0,1]$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 (y+2y) dx \right) dy = \frac{3}{2}$$

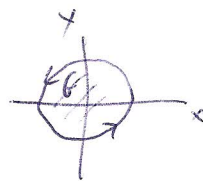


Ροή του $\vec{F}(x,y) = (x, y^2)$ δια μέσου του συνόρου του $G = [-1,1] \times [-1,1]$

$$I = \iint_G (1+2y) dx dy = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} (1+2y) dx \right) dy = \dots = 4$$

1) Εφαρμόσετε την κάθετη μορφή του Θ. Green για

$$\vec{F}(x,y) = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}, \quad G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$$(\partial G)^+ : \vec{c}(t) = (cost, sint), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{c}'(t) = (-sint, cost), \quad \vec{n}(t) = (cost, sint) \quad (\perp \vec{c}'(t), \|\vec{n}(t)\| = 1)$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{c}(t)) \cdot \vec{n}(t) \|\vec{c}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (cost - sint, cost) \cdot (cost, sint) dt = \int_0^{2\pi} cost^2 dt = \pi //$$

$I_1 = \pi$

$$I_2 = \iint_G \text{div } \vec{F} dx dy = \iint_G (1+0) dx dy = \iint_G 1 dx dy = \text{εμβαδόν του } G = \pi$$

$I_2 = \pi$

$I_1 = I_2$! εφαρμόζεται το Θ. Green / κάθετη μορφή.