ΣΥΝΟΨΗ

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Καμπύλη Γ: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$
$t\in[\alpha,\beta]$

Εφαπτόμενο διάνυσμα

$\vec{r}\,'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

Μοναδιαίο εφ. διάνυσμα

$$\vec{T}(t_0)=\frac{\vec{r}\,'(t_0)}{\|\vec{r}\,'(t_0)\|}$$

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Επιφάνεια S: $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$
$(u,v)\in D$ (D u-απλό ή v-απλό ή απλό)

Κάθετο διάνυσμα

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}_{(u,v)}$$

Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\vec{N}(u,v)=\frac{(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(u,v)}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u,v)}$$

Μήκος καμπύλης $\ell(\Gamma)=\int_\alpha^\beta\|\vec{r}\,'(t)\|dt$

Εμβαδόν επιφάνειας $A(S)=\iint_D\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u,v)\,du\,dv$

$$\boxed{f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}$$

Επικαμπύλιο ολ. της f στην Γ

$$\int_\Gamma f\,ds=:\int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

- f = πυκνότητα, $M=\int_\Gamma f\,ds$ η μάζα του σύρματος Γ

Επιφανειακό ολ. της f στην S

$$\iint_S f\,dS=:\iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u,v)\,du\,dv$$

- f = πυκνότητα, $M=\iint_S f\,dS$ η μάζα του κελύφους S.

$$\boxed{\vec{F}=(P,Q,R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}$$

Επικαμπύλιο ολ. της $\vec{F}$ στην Γ

$$\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=:\int_\alpha^\beta F(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

- $\vec{F}$ = πεδίο δυνάμεων, $W=\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}$ έργο
- $\vec{F}$ = πεδίο ταχυτήτων $I=\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}$ η ροή του $\vec{F}$, κατά μήκος της Γ

Εάν Γ = κλειστή $I=\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}$ η κυκλοφορία του $\vec{F}$ κατά μήκος της Γ

Επιφανειακό ολ. της $\vec{F}$ στην S

$$\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}=:\iint_D\vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(u,v)\,du\,dv$$

- $\vec{F}$ = πεδίο ταχυτήτων, $I=\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}$ η ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της S, με κατεύθυνση $\vec{N}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν "καλές" προϋποθέσεις για όλα.