

Μάθημα 27. (20/5/11)

Επιφανειακά Οδοκνηρώματα (Εφαρμογή)
(Σκοπός: Οσώλημα Stokes, Μαθ. 28)

Απαιτώμενα.

- (1) Σχεβιδιώσης διανοσηαυκού πεδίου
- (2) Παράμετρικες επιφάνειες στον \mathbb{R}^3
- (3) Οδοκνηώματα επί (παραμετρικής) επιφάνειας
 - α) Βαθμωτού πεδίου
 - β) Διαν. πεδίου.

(1) Υπενθυμίζουμε την έννοια του Σχεβιδιώτου.

Ορισμός. Έστω $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$

C^1 διανοσηαυκού πεδίου (δηλαδή οι συναρτήσεις $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν συνεχείς παραγώγους ως προς τις μεταβλητές). Ο σχεβιδιώτης του \vec{F} είναι το διανοσηαυκού πεδίο

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ειδικά αν $\vec{F} = (P, Q, 0)$ τότε

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \perp \vec{F}$$

(2) Παράμετρικες Εμφάνειες των \mathbb{R}^3

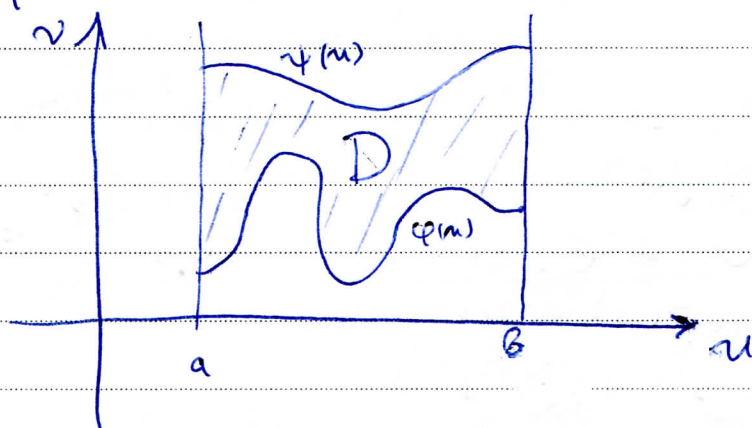
Ορισμός Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Το D θα λέγεται

u -απλό (ή v -απλό) εάν υπάρχουν συνεχείς
 $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$D = \{(u, v) : a \leq u \leq b, \varphi(u) \leq v \leq \psi(u)\}$$

$$(\text{ή } D = \{(u, v) : a \leq v \leq b, \varphi(v) \leq u \leq \psi(v)\})$$

Επομένως, το D αποτελεί το ζήτημα των
στη επίπεδο ανάμεσα στα γραφήματα των
 φ και ψ :



Σημείωση. Θα καλούμε το D απλό χωρίς να

διακρίνουμε εάν είναι u -απλό ή v -απλό.

Όλα τα σύνολα D στη συνέχεια θα
θεωρούνται απλά.

Ορισμός. Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, και $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομομορφισμός

Το σύνολο $S' = \{ \vec{r}(u,v) : (u,v) \in D \} \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται παραμετρική επιφάνεια. Η απεικόνιση \vec{r} καλείται παραμετρική της S .

Σχόλιο. Ο ορισμός δεν αποκλείει διάφορες "παθολογικές" περιπτώσεις επιφανειών, όπως επιφάνειες με γωνίες ή με αυτοζότητες.

Θα περιοριστούμε στις εξεταζόμενες επιφάνειες ως ακολούθως.

Ορισμός. Έστω $S' = \{ \vec{r}(u,v) : (u,v) \in D \}$ παραμετρική επιφάνεια. Η S' θα καλείται

α) C^1 , εάν η $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι C^1 .

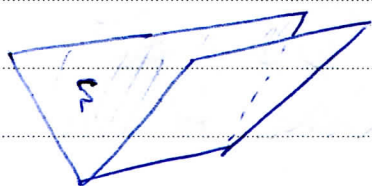
β) Μαδακή, εάν η $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ πληροί την σχέση
(ή λέει) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq (0,0,0)$

παντού στο D (Γεωμετρικά, η S' έχει παντού εφαπτόμενο επίπεδο).

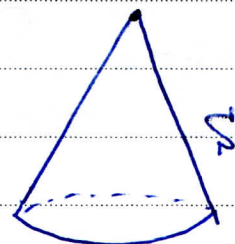
γ) Απλή, εάν η $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

Παρατήρηση. Η \vec{r} δεν είναι μαδακή.

Σχόλιο.



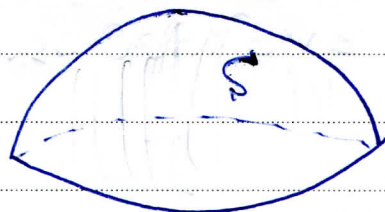
Σ: Ένωση δυο επιπέδων.
 όχι C^1



Σ: κώνος κορυφής, κωνικό
 όχι ομαλή



Σ: "Μοβιούλια του Klein"
 όχι απλή



Σ: επιφάνεια
 ημωσφαιρίου του \mathbb{R}^3 .
 C^1 , ομαλή, απλή

Παρατήρηση. Θεωρούμε την υπερβολή

$$\{(y, z) : z = 1/y, y > 0\} \text{ στο επίπεδο } Oyz.$$

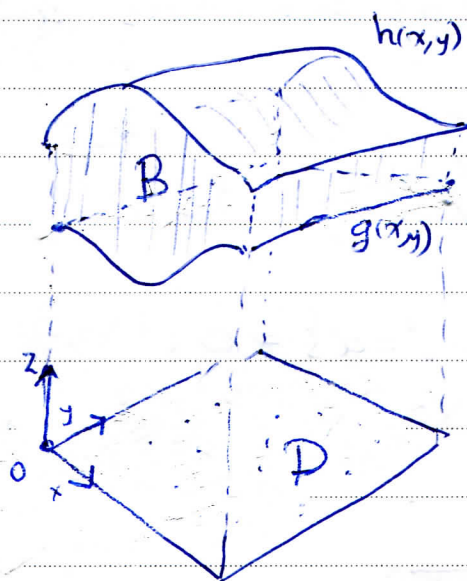
Την περιστρέφουμε περί των x άξονα Ox και καθόλου την επιφάνεια που προκύπτει "ψευδοσφαίρα". Η ψευδοσφαίρα είναι C^1 , ομαλή, απλή. Μα στο $(0,0,0)$ απειρίζεται. Ξαδιμάωμε να αποδείξουμε αντιστοιχίες επιφάνειες από την ανάδοσή της.

Εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός Ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται

xy -απλά, εάν υπάρχουν ομογενείς συναρτήσεις $g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά
έτσι ώστε

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y) \leq z \leq h(x, y), (x, y) \in D \}$$



Σημείωση. Αντιστοίχοι ορισμοί ισχύουν για

yz -απλά, xz -απλά σύνολα. Θα καθορίσω B
απλά χωρίς να εξασκεθώ εάν είναι
 xy -απλά κ.ο.κ.

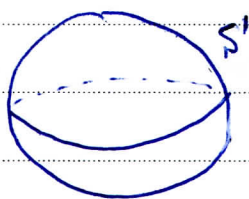
Μπορούμε τώρα να εισάγουμε την έννοια
της κλειστής επιφάνειας.

Ορισμός. Έστω S' (παράμετρική) επιφάνεια
στο \mathbb{R}^3 . Η S' θα λέγεται κλειστή εάν
 $S' = \partial B$, όπου $B \subseteq \mathbb{R}^3$ απλά.

Ορισμός. Μια επιφάνεια $\Sigma' = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ η οποία είναι C^1 , ορατή, απλή και κλειστή θα λέγεται κανονική.

Παραδείγματα Επιφανειών

① Επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $a > 0$.



$\Sigma' = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} = \partial \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$
 και $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ είναι xy -απλά, καθώς

$$B = \{(x,y,z) : -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

Η Σ' είναι κανονική επιφάνεια. Αντίθετα, η επιφάνεια του ημισφαιρίου

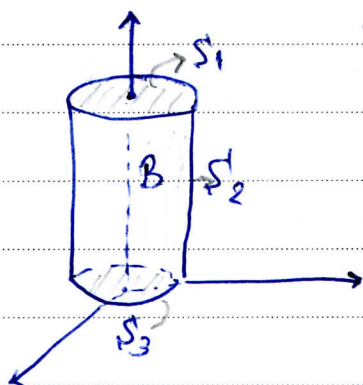
$$\Sigma'_+ = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$$

δεν είναι κλειστή επιφάνεια (γιατί;)

②

Επιφάνεια ορθού κυκλικού κώνου, ακτίνας βάσης $a > 0$ και ύψους $h > 0$.

Η S αποτελείται από την ένωση των επιφανειών S_1 της κορυφής, S_2 της πλευρικής επιφάνειας, και S_3 της βάσης.

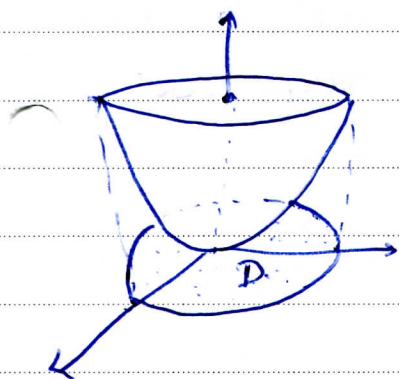


Περίηται, εάν

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b\}$$

$$\begin{aligned} \text{τότε } \partial B &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, 0 < z < b\} \cup \{(x, y, z) : z = \\ & x^2 + y^2 < a^2\} \cup \{(x, y, z) : z = b, x^2 + y^2 < a^2\} \\ &= S_2 \cup S_3 \cup S_1. \end{aligned}$$

③ Επιφάνεια ορθού κυλινδρικού παραβολοειδούς



$$S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

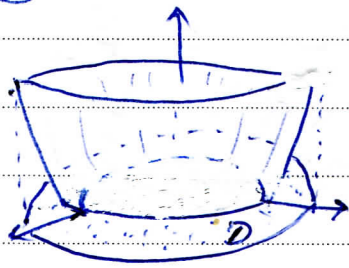
Το S δει είναι η δειστή επιφάνεια (ηαζιζ)

Μια παραμετρική για την S είναι η

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y)) = (x, y, x^2 + y^2), (x, y) \in D$$

όπου $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Δηλαδή η S είναι το γράφημα της συνάρτησης $z(x, y) = x^2 + y^2$ επί του D .

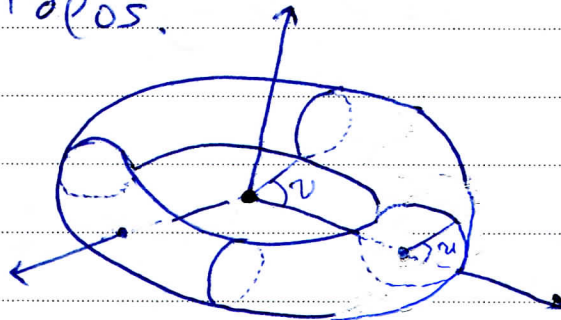
④ "Φουζιέρα".



$$S = \{(x, y, z) : z = -1 + (x^2 + y^2), 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$U \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

⑤ Τόπος.



Θεωρούμε κύκλο κέντρου $(R, 0, 0)$ και ακτίνας $r > 0$ στο επίπεδο Oxz . Με περιστροφή περί τον άξονα Oz , αποκτούμε την επιφάνεια

$$S = \{ \vec{r}(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi \}$$

όπου

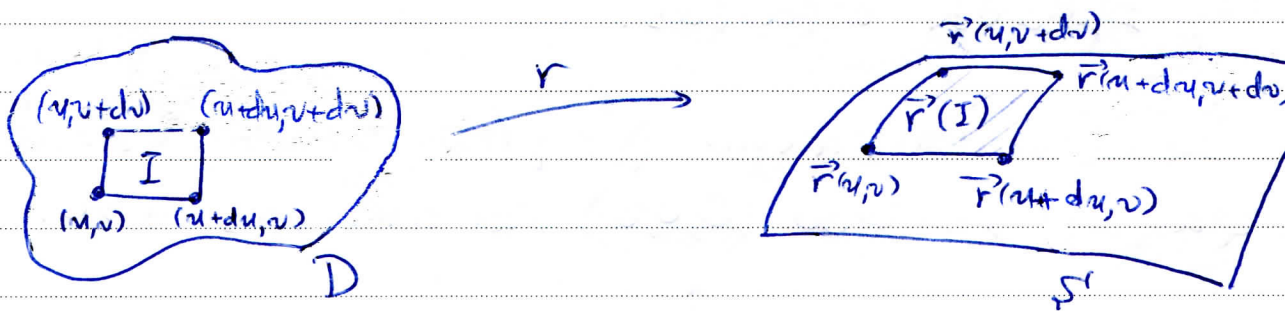
$$\vec{r}(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$$

και οι παράμετροι u, v είναι οι γωνίες του σχήματος.

Επιφάνειες Κανονικής Εξίσωσης.

Έστω $S = \{ \vec{r}(u, v) : (u, v) \in D \}$ κανονική επιφάνεια.

Θεωρούμε στοιχειώδες τετράγωνο εμβαδού του D και την εικόνα του επί της S :



Έχουμε δύο στοιχειώδες εμβαδά του $\vec{r}(I)$

$$dS' = \| (\vec{r}(u+du, v) - \vec{r}(u, v)) \times (\vec{r}(u, v+dv) - \vec{r}(u, v)) \|$$

$$\approx \| \vec{r}_u(u, v) du \times \vec{r}_v(u, v) dv \|$$

$$= \| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| du dv$$

Αναμένουμε πως ολοκληρώνοντας τα στοιχειώδη εμβαδά θα έχουμε το εμβαδόν της S . Πράγματι

Ορισμός. Έστω $S = \{ \vec{r}(u, v) : (u, v) \in D \}$ κανονική

επιφάνεια. Το εμβαδόν της S είναι

$$A(S) = \iint_S dS' = \iint_D \| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| du dv.$$

Παρατηρήσεις ① Το σφαιράκι είναι ανεξάρτητο της παραμέτρησης.

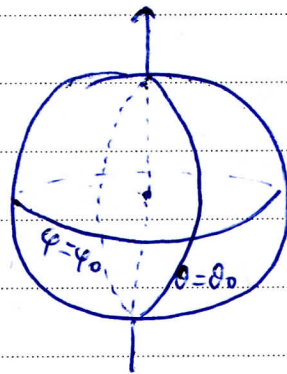
② Εάν η S είναι το γραφικό της $z(x,y)$, τότε

$$dS' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Ασκήσεις

(1) Σφαιράκι σφαιρικές.

Έστω η επιφάνεια $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ σφαιρικές κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $a > 0$.



Γεωγραφικό μήκος/
γεωγραφικό πλάτος

Θεωρούμε την παραμέτρηση

$$r(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \sin \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \varphi)$$

$$\text{όπου } (\theta, \varphi) \in D, D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

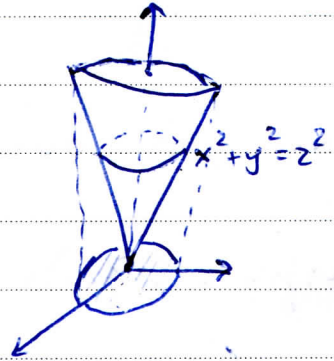
Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \|r_\theta \times r_\varphi\| &= \|(-a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, 0) \times (a \cos \theta \sin \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, -a \cos \varphi)\| \\ &= a^2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

οτιοτι $A(S) = \iint_D \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\| d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin\varphi d\theta d\varphi$
 $= 4\pi a^2.$

2) Εμβαδον κωνου.

Εστω $S = \{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq z \leq 1\}$



Θεωρούμε την παραμετροποίηση

$\vec{r}(\theta, z) = (z \cos\theta, z \sin\theta, z)$
 όπου $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] = D$.

Έχουμε $\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z\| = \sqrt{2} z$, άρα

$A(S) = \iint_D \sqrt{2} z d\theta dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} z\sqrt{2} d\theta dz = \pi\sqrt{2}$

Σημείωση. Η S δεν είναι κανονική στο $(0,0,0)$,
 ήα δεν υπάρχει συνεισφορά στο εμβαδον ε

Παρατήρηση. Η επιλογή κατεύθυνσης παραμετροποίησης αποδοποιεί ποσο το ολοκλήρωμα

$\iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv.$

(3) Επιφανειακό Ολοκλήρωμα Βαθμωτού Πεδίου

Ορισμός. Έστω $S' = \{ \vec{r}(u,v) : (u,v) \in D \}$ κανονική επιφάνεια και $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε

$$\iint_{S'} f dS' = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv.$$

Ερμηνεία. Έστω S' λεπτό φιλίμο υλικού

Εάν $f(x,y)$ η πυκνότητα στο σημείο (x,y) τότε

$$\iint_{S'} f dS' = \text{μάζα του } S'.$$

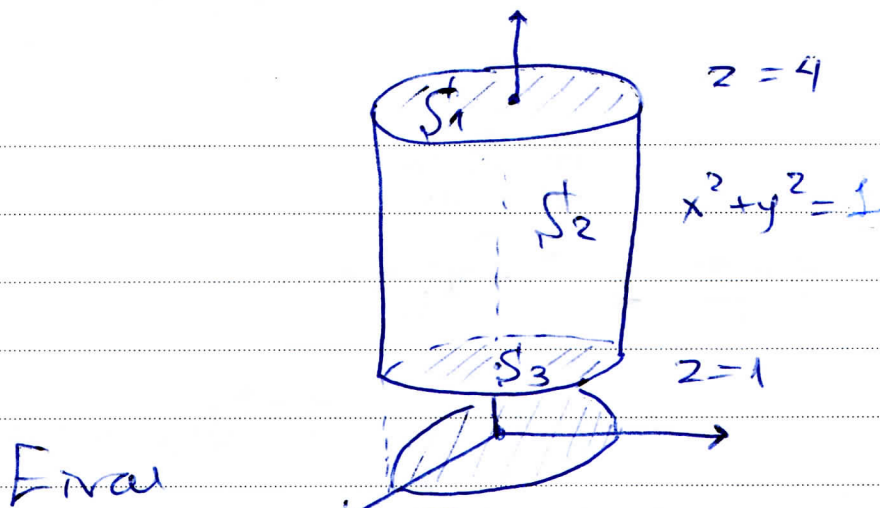
Άσκηση. Έστω S η επιφάνεια του κυλίνδρου

$x^2 + y^2 = 1$ με βάσεις στα επίπεδα $z=1, z=4$.

Εάν $\delta(x,y,z) = z(x^2 + y^2)$ να υπολογιστεί το

$$M = \iint_{S'} \delta dS'.$$

Απάντηση. Έχουμε $S' = S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$ όπου



Είναι

$$\iint_S \delta dS = \iint_{S_1} \delta dS + \iint_{S_2} \delta dS + \iint_{S_3} \delta dS.$$

Θα μελετήσουμε τις παραμετρήσεις

$$S_1 = \{ (p \cos \theta, p \sin \theta, 4) : 0 \leq p \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

$$S_2 = \{ (\cos \theta, \sin \theta, z) : 1 \leq z \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

$$S_3 = \{ (p \cos \theta, p \sin \theta, 1) : 0 \leq p \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

και υπολογισουμε

$$\iint_{S_1} \delta dS = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} 4p^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \|\vec{r}_p \times \vec{r}_\theta\| dp d\theta = 16\pi$$

$$\iint_{S_2} \delta dS = \iint_{[1,4] \times [0,2\pi]} z (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \|\vec{r}_z \times \vec{r}_\theta\| dz d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{S_3} \delta dS = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} p^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \|\vec{r}_p \times \vec{r}_\theta\| dp d\theta = 2\pi$$

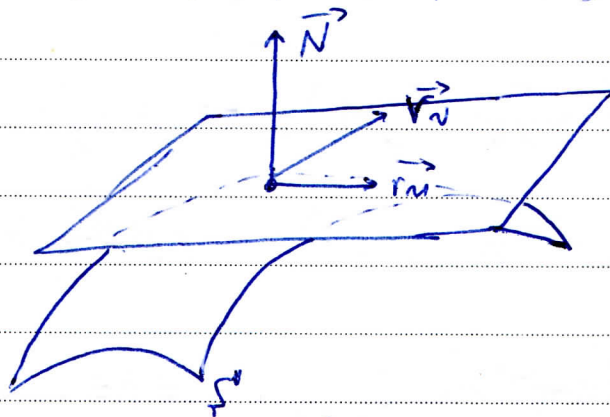
Τελεώς

$$\iint_S \delta \, dS = 15\pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi.$$

(3b) Επιφανειακό Οδοκλήρωμα

Διανυσματικό Πεδίο

Έστω $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ κανονική επιφάνεια



Το διάνυσμα $\vec{r}_u(u,v)$ είναι εφαπτόμενο στην S στο $\vec{r}(u,v)$, όπως και το $\vec{r}_v(u,v)$. Συνεπώς το διάνυσμα $\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\vec{r}(u,v)$, και το διάνυσμα

$$\vec{N} = \frac{1}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

είναι μοναδιαίο και κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\vec{r}(u,v)$.

Εάν $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ένα συνεχές διαν. πεδίο τότε η ροή του \vec{F} μέσω του στοιχειώδους εμβαδού dS' εν S' είναι

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v) dS' &= \vec{F} \cdot (\vec{N} dS') \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{S}' \end{aligned}$$

Ορισμός Η ροή του \vec{F} διαμέσω της S είναι

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}' &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS' \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) du dv \end{aligned}$$

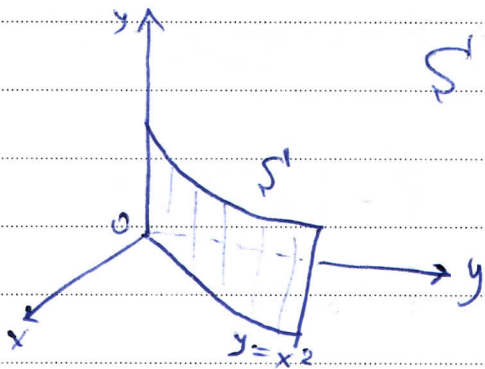
Παρατήρηση Η ροή εξαρτάται από την παρατήρηση, με την έννοια πως η επιλογή του $-\vec{N}$ ως κατεύθυνσης της S' , μας δίνει αντίθετο πρόσημο για την ροή.

Ασκησης

① Να βρεθεί η ροή του πεδίου $\vec{F}(x,y,z) = (yz, x, z)$ διαμέσω της επιφάνειας

$$S = \{(x,y,z) : y = x^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$$

Απάντηση θεωρούμε την παραμέτρηση



$$S' = \{ F(x, z) = (x, x^2, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 4 \}$$

Το χυλι $F(\vec{r}) = (x^2z, x, -z^3)$
και επίσης

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_z = (2x, -1, 0)$$

οπότε πωσ

$$\iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{S}' = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{N} dS' = \iint_{[0,1] \times [0,4]} \vec{F} \cdot \vec{r}_x \times \vec{r}_z dx dz$$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,4]} (x^2z, x, -z^3) \cdot (2x, -1, 0) dx dz$$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,4]} (2x^3z - x) dx dz$$

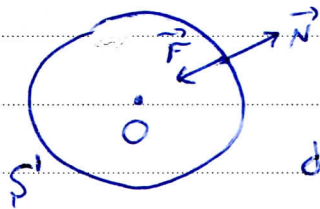
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^4 (2x^3z - x) dz \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ 2x^3 \cdot \frac{4^2}{2} - 4x \right\} dx$$

$$= 6.$$

(2) Να βρεθεί η ροή του πεδίου $\vec{F}(x,y,z)$

$= (-x, -y, -z)$ διαμέσου της $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$



Έχουμε $S = \{ \vec{r}(\theta, \varphi) : (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \}$
 όπου $\vec{r}(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \sin \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta)$

και $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = -a \sin \varphi \vec{r}(\theta, \varphi)$.

Τελικώς

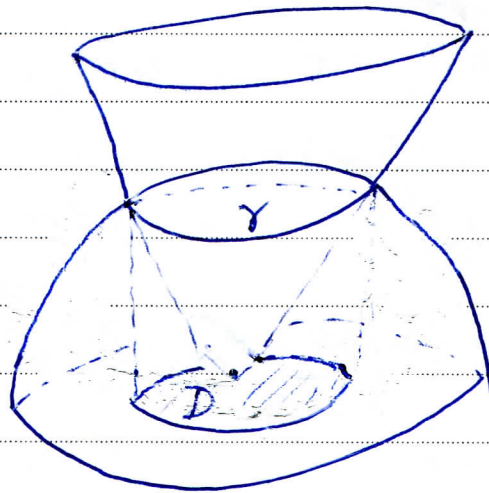
$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{r} \cdot \vec{N} dS = \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \|\vec{r}\|^2 a \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= 4\pi a^3 \end{aligned}$$

Παρατήρηση Η ροή είναι ίση με

$$4\pi a^3 = 3 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \iiint_{\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}} 3 dx dy dz$$

Το θεώρημα Gauss μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας χρησιμοποιώντας το τρίπλο ολοκλήρωμα με αποκλίση.

3) Να βρεθεί το εμβαδόν A που κρύβει ο κώνος $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ από την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.



Λύση.

Αναζητούμε την καμπύλη γ της ζώνης του:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Οπότε η προβολή του τμήματος της σφαίρας στο Oxy επίπεδο είναι το σύνολο

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Η εξίσωση της σφαίρας είναι $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Rightarrow z = z(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, για $(x, y) \in D$, είναι η παράσταση του τμήματος ως δέκαπλα επί του Συστήματος

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= \iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dx dy.$$

Αλλάζω σε πολικούς συντεταγμένες :

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$
με $dx dy = r dr d\varphi$. Τελικά

$$A = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}} r dr d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{2} r}{\sqrt{2-r^2}} dr$$

$$= -\sqrt{2} \pi \int_0^1 \frac{d(-r^2)}{\sqrt{2-r^2}}$$

$$= -\sqrt{2} \pi \int_0^1 \frac{d(2-r^2)}{\sqrt{2-r^2}}$$

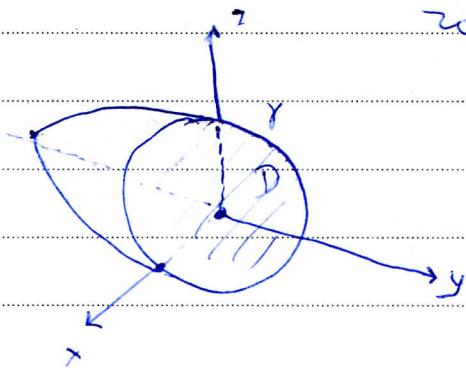
$$= -\pi \sqrt{2} \left[2\sqrt{2-r^2} \right]_0^1$$

$$= 2\sqrt{2} \pi \{ \sqrt{2} - 1 \}.$$

Άσκηση Να βρεθεί το εμβαδόν που κόβει το επίπεδο $y=0$ από το παραβολοειδές $x^2+y+z^2=2$

Απάντηση

Υποδοχίζουμε την καρτέδα γ της ζομής των δύο επιφανειών:



$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+y+z^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+z^2=2$$

είναι προβολή στον Oxz

επίπεδο, έχουμε πως η ζητούμενη επιφάνεια είναι το γράφημα της συνάρτησης $y=y(x,z)=2-x^2-z^2$ επί του $D=\{(x,z): x^2+z^2 \leq 2\}$. Συνεπώς το εμβαδόν της είναι

$$\iint_{S'} dS' = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)} dx dz$$

$$\stackrel{\text{(παλιός)}}{=} \iint_{[0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi \sqrt{1 + 4r^2} r dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{3/2} \right]' dr$$

$$= \frac{52\pi}{3}$$