Ασκήσεις

1) Να ευρεθεί κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο $\vec{x}_0 \in S$ και το εφαπτόμενο επίπεδο :

$S = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2\}$ στο $\vec{x}_0 = (1,1,2) \in S$.

α) $F(x,y,z) = z - x^2 + y^2$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $S = S_0$ ισοσταθμική της F με $c=0$

Κάθετο στο $(1,1,2)$ είναι

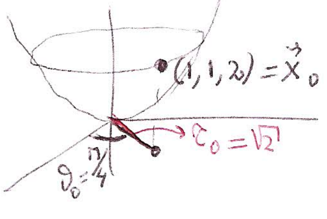
$\vec{N}(1,1,2) = \nabla F(1,1,2) = (-2,-2,1)$

α') $S = \{(x,y,z) : f(x,y) = x^2 + y^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $S =$ γράφημα της f

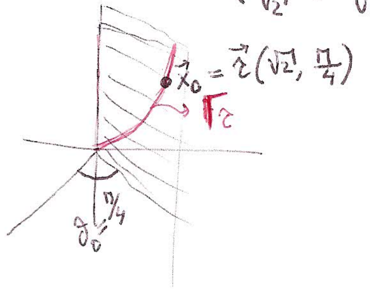
Κάθετο στο $(1,1,2)$ είναι $\vec{N}(1,1,2) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), -\frac{\partial f}{\partial y}(1,1), +1\right) = (-2,-2,1)$

β) $S = \{\vec{r}(r,\theta) = (r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta, r^2) , (r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi]\}$

$(1,1,2) = \vec{r}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

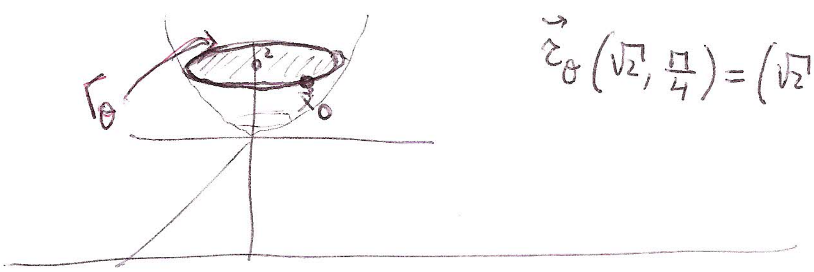


Γ_r : $\vec{r}_1\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, r^2\right)$



$\vec{r}_r\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, r^2\right)'_{(r=\sqrt{2})} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)$

Γ_θ : $\vec{r}_2(\sqrt{2}, \theta) = (\sqrt{2}\,\text{συν}\theta, \sqrt{2}\,\text{ημ}\theta, 2)$



$\vec{r}_\theta\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}\,\text{συν}\theta, \sqrt{2}\,\text{ημ}\theta, 2)'_{\theta = \frac{\pi}{4}} = (-1, 1, 0)$

$\vec{N}(1,1,2) = \vec{r}_r\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \times \vec{r}_\theta\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) \times (-1, 1, 0) \Rightarrow$

$\vec{N}(1,1,2) = \sqrt{2}(-2,-2,1)$

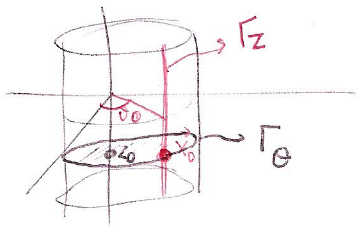
Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι $\vec{N}(1,1,2)\circ(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$ (στο $(1,1,2)\in S$)

$$2(x-x_0)+2(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad , \quad (x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$$

$$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$$

$$z=2x+2y-2$$ Εφ. επίπεδο της S στο $(1,1,2)$

2) Να βρεθεί κάθετο διάνυσμα της $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=a^2\}$ $(\alpha>0)$ στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$.



$S=\{\vec{r}(\theta,z)=(\alpha\,\text{συν}\theta,\ \alpha\,\text{ημ}\theta,\ z):\ (\theta,z)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}\}$

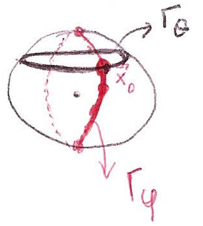
$\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)=(-\alpha\,\text{ημ}\theta_0,\ \alpha\,\text{συν}\theta_0,\ 0)$

$\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(0,\ 0,\ 1)$

$\vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)\times\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(\alpha\,\text{συν}\theta_0,\ \alpha\,\text{ημ}\theta_0,\ 0)$

όπου $(x_0,y_0,z_0)=(\alpha\,\text{συν}\theta_0,\ \alpha\,\text{ημ}\theta_0,\ z_0)$

3) Να βρεθεί κάθετο διάνυσμα στην $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$.



$(x_0,y_0,z_0)=(\alpha\,\text{συν}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ \alpha\,\text{ημ}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ \alpha\,\text{συν}\varphi_0)$

$S:\ \vec{r}(\theta,\varphi)=(\alpha\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ \alpha\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ \alpha\,\text{συν}\varphi)\quad,\ (\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$

$\vec{r}_\theta(\theta_0,\varphi_0)=(-\alpha\,\text{ημ}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ \alpha\,\text{συν}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ 0)$

$\vec{r}_\varphi(\theta_0,\varphi_0)=(\alpha\,\text{συν}\theta_0\,\text{συν}\varphi_0,\ \alpha\,\text{ημ}\theta_0\,\text{συν}\varphi_0,\ -\alpha\,\text{ημ}\varphi_0)$

$\vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,\varphi_0)\times\vec{r}_\varphi(\theta_0,\varphi_0)=-\alpha\,\text{ημ}\varphi_0\,\vec{r}(\theta_0,\varphi_0)$

$(=c(x_0,y_0,z_0)\quad,\ c=\text{σταθερά})$

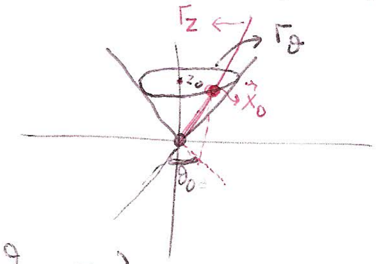
4) Να βρεθεί κάθετο στην S: $z^2=x^2+y^2$, στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$ με $z_0\neq 0$.

—

$\vec{r}(\theta,z)=(z\,\text{συν}\theta,\ z\,\text{ημ}\theta,\ z)$, $(x_0,y_0,z_0)=(z_0\,\text{συν}\theta_0,\ z_0\,\text{ημ}\theta_0,\ z_0)$

$\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)=(-z_0\,\text{ημ}\theta_0,\ z_0\,\text{συν}\theta_0,\ 0)$

$\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(\text{συν}\theta_0,\ \text{ημ}\theta_0,\ 1)$



$\vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)\times\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(z_0\,\text{συν}\theta_0,\ z_0\,\text{ημ}\theta_0,\ -z_0)$.

<u>Σημείωση</u> Στις 2), 3), 4) το εφαπτόμενο βρίσκεται ευκολότερα με τον α)

2) $F(x,y,z)=x^2+y^2-\alpha^2$, $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,0)\perp S$
$(x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2-\alpha^2=0\}$ $(\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$ διότι $\alpha>0)$

Άρα το <u>εφ. επίπεδο είναι</u> $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+0(z-z_0)=0$

$\underline{xx_0+yy_0=\alpha^2}$

3) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\alpha^2$, $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)\perp S$
$(x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2-\alpha^2=0\}$ $(\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ διότι $\alpha>0)$

Άρα το <u>εφ. επίπεδο</u> είναι $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$

$xx_0+yy_0+zz_0=\alpha^2$

4) $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \\ (x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2=0\} \end{cases}$ $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,-2z_0)\perp S$

(<u>Πρέπει</u> $z_0\neq 0$ για να έχουμε $\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$)

Άρα το <u>εφ. επίπεδο</u> είναι $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0$

$xx_0+yy_0-zz_0=0$

<u>ΣΗΜ</u> Προφανώς εάν $\vec{N}\perp S$ κάθε $\lambda\vec{N}$ με $\lambda\neq 0$ είναι κάθετο.
Τα $\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, $-\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ είναι τα μοναδικά <u>Μοναδιαία κάθετα</u>.