ΜΑΘΗΜΑ 25 (6-05)

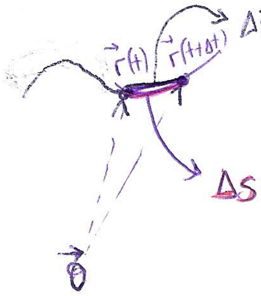
Επικαμπύλια ολοκληρώματα 1ου είδους (συνέχεια)

$f : B\,(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ συνεχής / Αριθμητικό πεδίο ή Βαθμωτό πεδίο

(πυκνότητα, μάζας, θερμοκρασία, πίεση, ...)

$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$, C^1 ή κατά τμήματα C^1 ($\exists\, \vec{r}\,' =$ συνεχής)

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt, \quad ds = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$



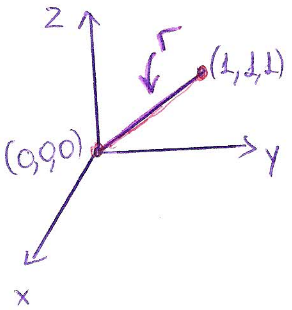
$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \simeq \vec{r}\,'(t)\,\Delta t$

$\|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\| \simeq \|\vec{r}\,'(t)\|\,\Delta t$

$\Delta s = \|\vec{r}\,'(t)\|\,\Delta t$

Ασκήσεις:

1) $\int_\Gamma f\,ds$, $\quad \Gamma : [\,(0,0,0),\ (1,1,1)\,]$, $\quad f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$



$\Gamma : \vec{r}(t) = (t,t,t), \quad t \in [0,1]$

$\vec{r}\,'(t) = (1,1,1), \quad \|\vec{r}(t)\| = \sqrt{3}$

$$I=\int_0^1 f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt=\int_0^1 (t-3t^2+t)\sqrt{3}\,dt=\dots=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

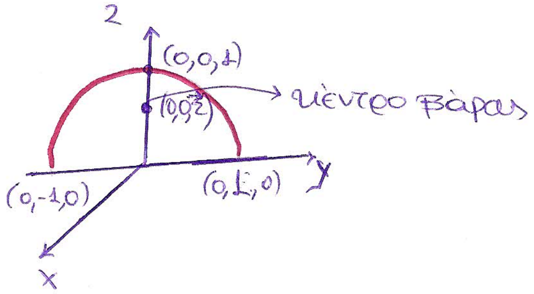
⊛ συμμετρία ως προς τον άξονα

2) $\Gamma: y^2+z^2=1$ ⊛ $z\geq 0$ στο επίπεδο $x=0$.

$\delta(x,y,z)=2-z$

i) Μάζα $M=\int_\Gamma \delta\,ds$

ii) ΚΒ: $\left(\bar{x}=\dfrac{\int_\Gamma x\delta\,ds}{M},\ \bar{y}=\dfrac{\int_\Gamma y\delta\,ds}{M},\ \bar{z}=\dfrac{\int_\Gamma z\delta\,ds}{M}\right)$



$\Gamma=\vec{r}(t)=(0,\text{συν}t,\text{ημ}t)$, $t\in[0,\pi]$

$\vec{r}\,'(t)=(0,-\text{ημ}t,\text{συν}t)$ $\quad\|\vec{r}\,'(t)\|=1$

i) $M=\int_0^\pi \delta(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt=\int_0^\pi (2-\text{ημ}t)\cdot 1\,dt=2\pi-2$

ii) $\bar{z}=\int_\Gamma z\delta\,ds=\dots=\dfrac{8-\pi}{2}$ [αντικαθιστώ όπου $z=\text{ημ}t$]

ΚΒ $\left(0,0,\dfrac{\frac{8-\pi}{2}}{2(\pi-1)}\right)=\dfrac{8-\pi}{4(\pi-1)}$

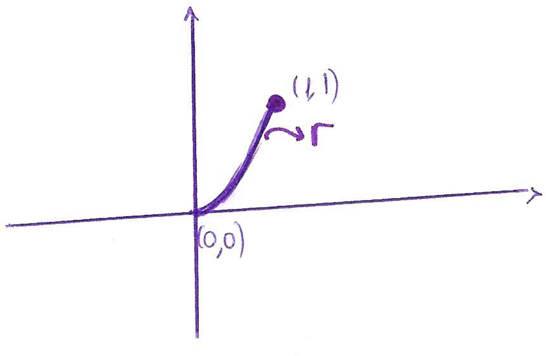
(Το Κ.Β είναι στο επίπεδο $x=0$, όπου βρίσκεται το σύρμα Γ. Το Γ είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των z και η $\delta(x,-y,z)=\delta(x,y,z)$ άρα $\bar{y}=0$ **)

3) $I=\int_\Gamma x\,ds$ $\quad\Gamma: y=x^2$ με $x\in[0,1]$.

Γ $\quad\vec{r}(t)=(t,t^2)$, $t\in[0,1]$

$\vec{r}\,'(t)=(1,2t)$

$\|\vec{r}\,'(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$



** Αν δεν παρατηρούσαμε αυτό, υπολογίζουμε το $\bar{x}$ και το $\bar{y}$.

$$I = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = (1+4t^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right)$$

4) $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, $\quad \Gamma: r(\theta) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu(2\theta)}$ $\quad \theta\in[0,\frac{\pi}{6}]$

$$\Gamma: \vec{r}(\theta) = \left(r(\theta)\sigma\upsilon\nu\theta,\ r(\theta)\cdot\eta\mu\theta\right)$$

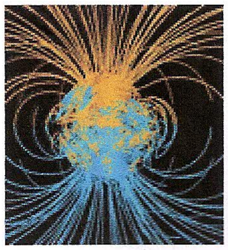
$$\vec{r}\,'(\theta) = \left(r'(\theta)\sigma\upsilon\nu\theta - r(\theta)\eta\mu\theta,\ r'(\theta)\eta\mu\theta + r(\theta)\sigma\upsilon\nu\theta\right)$$

! $$\|\vec{r}\,'(\theta)\| = \sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu(2\theta)}}$$

$$f(\vec{r}(\theta)) = \sqrt{(r(\theta)\sigma\upsilon\nu\theta)^2+(r(\theta)\eta\mu\theta)^2} = r(\theta) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu(2\theta)}$$

$$\int_0^{\pi/6} f(\vec{r}(\theta))\|\vec{r}\,'(\theta)\|\,d\theta = \int_0^{\pi/6}\sqrt{\sigma\upsilon\nu(2\theta)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu(2\theta)}}\,d\theta = \pi/6$$

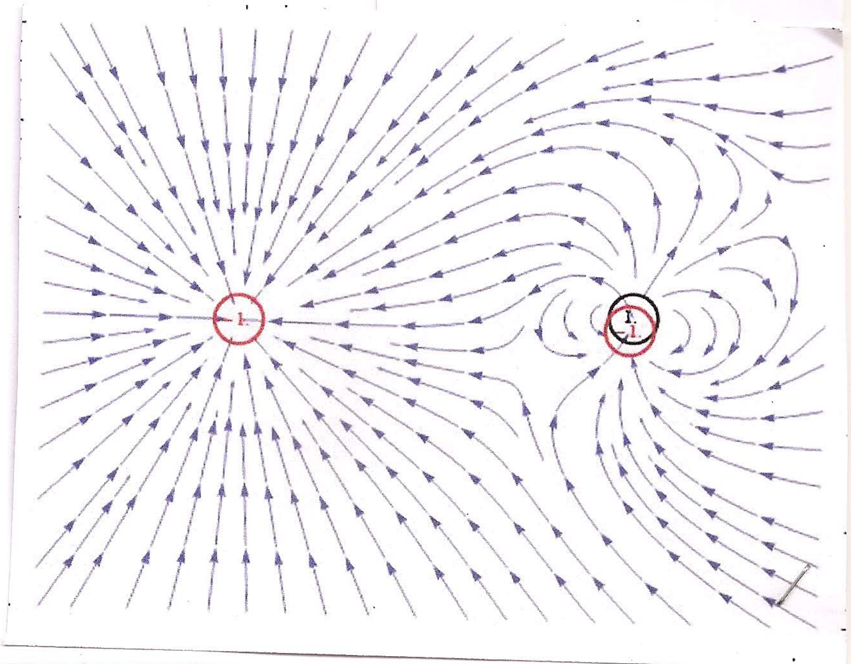
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης (2ο είδος)

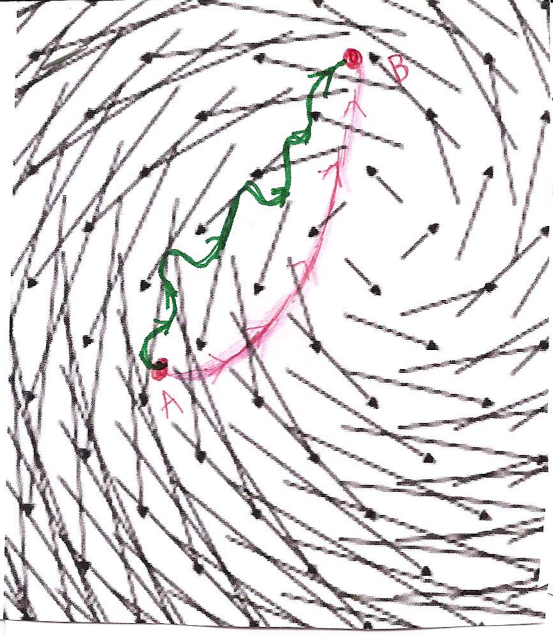


$\vec{F}: B\,(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διαν. πεδίο

- πεδίο δυνάμεων
- πεδίο ταχυτήτων
- ηλεκτρικό/μαγνητικό πεδίο (*)

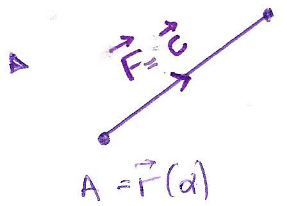




Το πρόβλημα:

Να υπολογίσουμε το "έργο" της $\vec{F}$ όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το $A \to B$ κατά μήκος της διαδρομής Γ. Γ έχει αρχή το A και πέρας το B.

Αρχίζουμε (όπως πάντα) από ευθ. τμήμα και $\vec{F} = \vec{c}$ // ευθ. τμήμα.

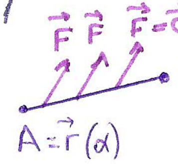


$B = \vec{r}(\beta)$, $\vec{r}(t) = \vec{r}(\alpha) + t(\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha))$, $t \in [\alpha, \beta]$

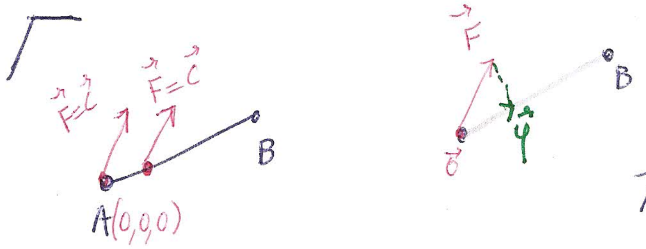
$(\vec{r}(\beta) \neq \vec{r}(\alpha))$

$$W =: \vec{F} \circ (\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \circ \vec{r}\,'(t) \quad \left(W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\| \overset{\theta=0}{=\!=} = \vec{F} \circ (\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)) \right)$$

Συνεχίζουμε με ευθ. τμήμα και $\vec{F} = \vec{c}$



$$W = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$



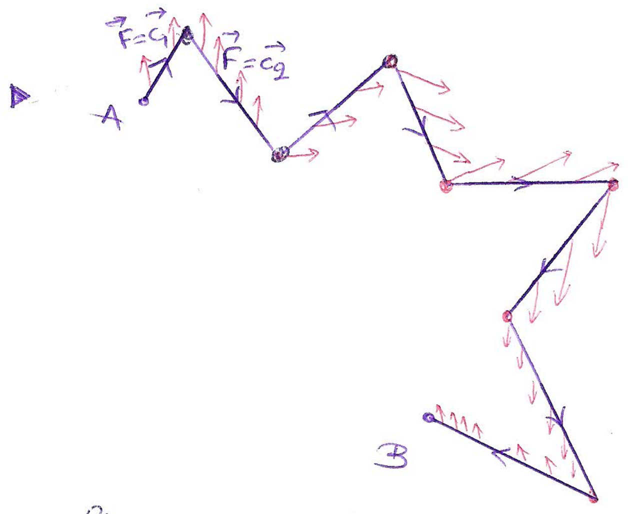
Προβάλλουμε την $\vec{F}$ στο $\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)$ (Μάθημα 3, σχ. 28)

Τότε
$$\vec{\varphi} = \frac{\vec{F} \circ (\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha))}{\|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\|^2} (\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha))$$
$$= \frac{\vec{F} \circ (\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha))}{\|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\|} \cdot \frac{\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)}{\|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\|}$$
$$\overset{\circledast}{=} \lambda_{\vec{F}} \frac{\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)}{\|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\|} \quad (\lambda_{\vec{F}} \text{ καλείται Αριθ. συνιστώσα της } \vec{F} \text{ στο } \vec{d} = \vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha))$$

$\|\vec{\varphi}\| = |\lambda_{\vec{F}}|$ (ας πάρουμε $\lambda_{\vec{F}} > 0$).

Τότε
$$W = \lambda_{\vec{F}} \|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\|$$
$$\overset{\circledast}{=} \frac{\vec{F} \circ (\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha))}{\|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\|} \cdot \|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)\|$$
$$= \vec{F} \circ \vec{r}\,'$$

(Στο έργο συνεισφέρει μόνο η $\vec{\varphi}$)

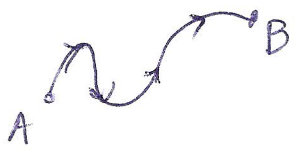


Προχωρούμε σε πολυγωνική γραμμή

$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec F(\vec r_i(t))\cdot \vec r_i\,'(t)$$

Είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε το έργο για C^1 (ή κ.τ. C^1) καμπύλη!

άρα: C^1 (κατά τμήματα C^1)



$\vec r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\quad t\in[\alpha,\beta]$

$$\boxed{W = \int_a^\beta \vec F(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt}$$

επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους

Συμβολισμός: $\displaystyle\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec r = \int_a^\beta \vec F(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt =$

$$\int_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\cdot(x'(t),y'(t),z'(t))\,dt$$

αν $\vec F = (P,Q,R)$, $(P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R})$

$$I = \int_a^\beta (Px'+Qy'+Rz')\,dt = \int_\Gamma (P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$$

$d\vec r = \vec r\,'(t)\,dt$

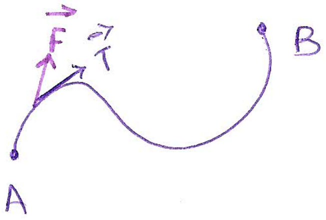
(στη Φυσική)

· Σχέση επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων

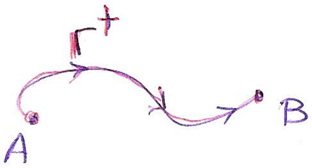
$$\int_\Gamma \vec{F}d\vec{r} = \int_T \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)dt \overset{\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}}{=\!=} \int_\Gamma \left[\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}\right]\|\vec{r}\,'(t)\|dt =$$

$$\overset{\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}}{=\!=\!=} \int_T \big(\underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{T}(t)}_{f(\vec{r}(t))}\big)\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_\Gamma (\vec{F}\cdot\vec{T})ds =$$

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r} = \int_\Gamma (\vec{F}\circ\vec{T})ds}\ ,\ \underline{όπου}\ \boxed{\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}}$$

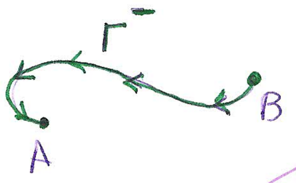


Γ έχει αρχή το A και πέρας το B; Γ^+



$\{\vec{r}(0)=A,\ \vec{r}(1)=B\ ,\ \vec{r}([0,1])=\Gamma$

$\begin{cases}\vec{\rho}(t)=\vec{r}(1-t),\ t\in[0,1]\\ \vec{\rho}(0)=B\ ,\ \vec{\rho}(1)=A\end{cases}\quad \vec{\rho}([0,1])=\Gamma$



Γ^-

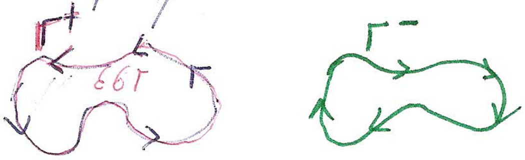
$$\int_{\Gamma^-}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\Gamma^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\Gamma^+}\vec{F}\circ d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\circ\vec{r}\,'(t)dt \qquad (1)$$

$$\int_{\Gamma^-}\vec{F}\circ d\vec{\rho} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\rho}(t))\circ\vec{\rho}\,'(t)dt = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\rho}(t))\circ(\vec{r}\,'(1-t)\circ(-1))dt = -\int_0^1 ((\vec{F}\circ\vec{r})(1-t))\circ(\vec{r}\,'(1-t))dt =$$

$$\underset{(dt=-d\tau)}{\overset{\tau=1-t}{=\!=}} -\int_1^0 \vec{F}(\vec{r}(\tau))\circ\vec{r}\,'(\tau)\circ(-d\tau) = \int_1^0 \vec{F}\circ\vec{r}\,'d\tau = -\int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(\tau))\circ\vec{r}\,'(\tau)d\tau \quad (2)$$

Άρα $\int_{\Gamma^-}\vec{F}\circ d\vec{r} = -\int_{\Gamma^+}\vec{F}\circ d\vec{r}$ (από (1),(2)) Για κλειστές καμπύλες



$$-\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = +\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Τι μας δίνει το $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ στην Φυσική;

1) $\vec{F}$ = π. δυνάμεων το $W=\int_\Gamma \vec{F}d\vec{r}$ δίνει έργο

2) $\vec{F}$ = π. ταχυτήτων το $I=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ δίνει Ροή κατά μήκος της Γ.

Γ = κλειστή, $I=\oint_\Gamma \vec{F}d\vec{r}$ κυκλοφορία

Ασκήσεις:

1) $\vec{F}(x,y,z)=(y-x^2, z-y^2, x-z^2)$, $W_1=\int_{\Gamma_1}\vec{F}d\vec{r}$, $W_2=\int_{\Gamma_2}\vec{F}d\vec{r}$

όπου $\Gamma_1 : \vec{r}_1(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in[0,1]$

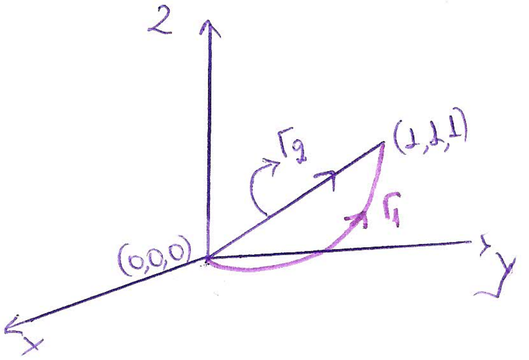
$\Gamma_2 : [(0,0,0),(1,1,1)]$

Είναι $W_1=W_2$;

$$W_1 = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r_1}(t))\cdot \vec{r_1}'(t)\,dt =$$

$$\int_0^1 (t^2-t^2,\ t^3-t^4,\ t-t^6)\cdot(1,\ 2t,\ 3t^2)\,dt =$$

$$\int_0^1 \left[2t(t^3-t^4)+3t^2(t-t^6)\right]dt = \frac{29}{60}$$



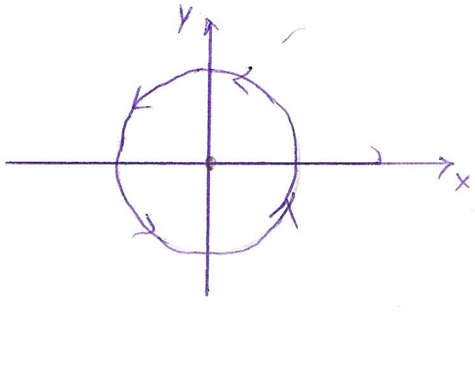
Γ_2 : $\quad \vec{r}(t) = (t,t,t)\ ,\ t\in[0,1]$

$$W_2 = \dots = 1/3$$

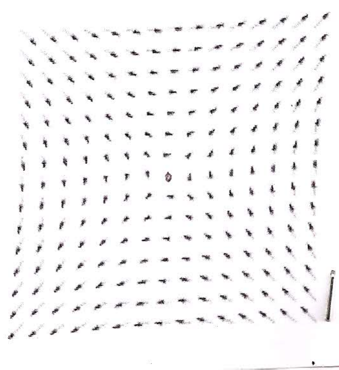
Οι καμπύλες Γ_1, Γ_2 έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας. Όμως $W_1 \neq W_2$.

$$\Gamma = \Gamma_1^{+} + \Gamma_2^{-}\ ,\quad W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{29}{60} - \frac{1}{3} \neq 0$$

2) $\vec{F}(x,y) = (y,x)$, $\Gamma: \vec{r}(t) = (\alpha\cos t,\ \alpha\sin t)$ $\quad t\in[0,2\pi]$ $\quad(\alpha>0)$



$\vec{F}(x,y)=(y,x)$



$\vec{r}\,'(t) = (-\alpha\,\eta\mu t,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu t)$

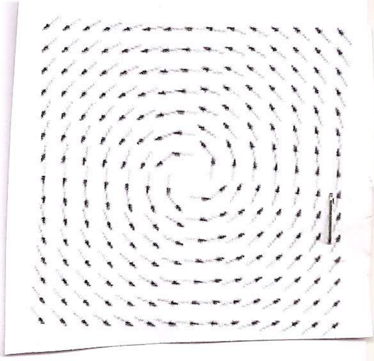
$$W = \int_0^{2\pi} (\alpha\cdot\eta\mu t,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu t)(-\alpha\cdot\eta\mu t,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu t)\,dt = \alpha^2(-\pi+\pi) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_1(x,y) &= y \\ Q_1(x,y) &= x \end{aligned}} \qquad \vec{F}_1 = (P_1, Q_1)$$

3) $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$, $\Gamma: \vec{r}(t) = (\alpha\,\sigma\upsilon\nu t,\ \alpha\cdot\eta\mu t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$W = \int_0^{2\pi} (-\alpha\cdot\eta\mu t,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu t)\cdot(-\alpha\,\eta\mu t,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu t)\,dt$$

$$W = \int_0^{2\pi} \alpha^2(\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t)\,dt = 2\pi\alpha^2 \neq 0$$



$\vec{F}(x,y) = (-y, x)$

$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x,y) &= -y \\ Q_2(x,y) &= x \end{aligned}} \qquad \vec{F}_2 = (P_2, Q_2)$$

Τι συμβαίνει; $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$ ενώ $\dfrac{\partial P_2}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q_2}{\partial x}$

Άρα;

Η απάντηση στο τέλος!

(Τυφώνας Κατρίνα/Katrina) 2005, USA