# ΜΑΘΗΜΑ 24 (4/5/2011)

## Επικαμπύλια, Επιφανειακά Ολοκληρώματα

**Γενικά**

$\Gamma$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ : $\vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$), συνεχής, $\vec{r}([a,\beta])=\Gamma$

$\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ t\in[a,\beta]$

Παραμέτρηση της $\Gamma$

**Ορισμοί I**

1α) Η $\Gamma$ είναι $C^1$-καμπύλη $\Leftrightarrow \exists\ \vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) παραμέτρηση ώστε η παράγωγος $\vec{r}\,'$ να είναι συνεχής

β) Η $\Gamma$ είναι κατά τμήματα $C^1$ $\Leftrightarrow \exists\ \vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) παραμέτρηση και $a=t_0<t_1<\ldots<t_k=\beta$ ώστε $\vec{r}\big|_{(t_{i-1},t_i)}$ $i=1,2,\ldots,n$ να είναι $C^1$.

2α) Η $\Gamma$ είναι λεία $\Leftrightarrow \exists\ \vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) παραμέτρηση ώστε $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0},\ t\in[a,\beta]$

β) Η $\Gamma$ είναι κατά τμήματα λεία $\exists\ \vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) παραμέτρηση και $a=t_0<t_1<\ldots<t_k=\beta$ ώστε $\vec{r}\big|_{(t_{i-1},t_i)}$ $i=1,\ldots$ να είναι λεία ($\vec{r}\,'(t)\neq 0,\ t\neq t_i,\ i=0,1,\ldots,k$)

**Ορισμοί II**

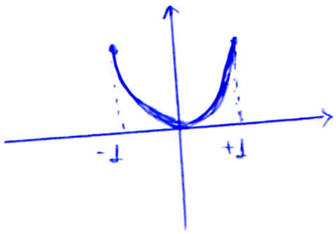
1) $\Gamma$ απλή καμπύλη $\Leftrightarrow \exists\ \vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) παραμέτρηση ώστε η $\vec{r}$ να είναι 1-1 απεικόνιση.

2) $\Gamma$ κλειστή καμπύλη $\Leftrightarrow \exists\ \vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) παραμέτρηση ώστε $\vec{r}(a)=\vec{r}(\beta)$

3) Γ <u>απλή κλειστή καμπύλη</u> (ή τόξο Jordan) $\Leftrightarrow$ $\exists\ \vec{r}:[a,\beta]\to\mathbb{R}^2$ ή ($\mathbb{R}^3$) παραμέτρηση ώστε $\vec{r}|_{(a,\beta)}$ είναι <u>1-1</u> και $\vec{r}(a)=\vec{r}(\beta)$.

## Παραδείγματα:

1)

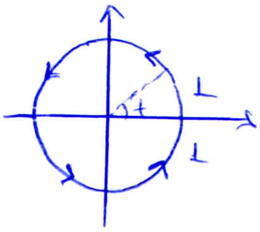



$\Gamma: y=x^2,\ x\in[-1,+1]$

$\vec{r}(t)=(t,t^2),\ t\in[-1,+1]$

1-1, $\vec{r}\,'(t)=(1,2t)$ : Γ: $C^1$, απλή, λεία

2) Γ:




$x^2+y^2=1,\ \vec{r}(t)=(\sigma\upsilon\nu t,\ \eta\mu t),\ t\in[0,2\pi]$

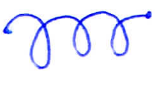
$\vec{r}\big|_{(0,2\pi)}$ 1-1, $\vec{r}(0)=\vec{r}(2\pi)$

$\vec{r}\,'(t)=(-\eta\mu t,\ \sigma\upsilon\nu t)\neq(0,0)$

$C^1$, απλή + κλειστή (τόξο Jordan)

3) κλειστή, όχι απλή

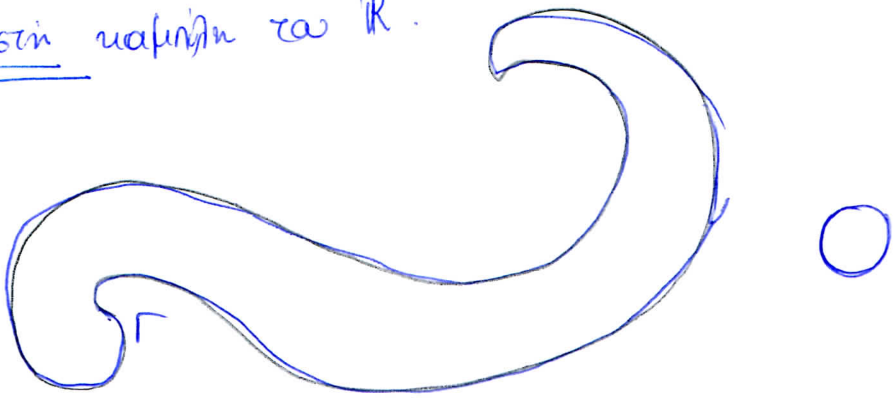
4) όχι τόξο Jordan
λεία



<u>Ισχύει το εξής θεώρημα στο $\mathbb{R}^2$</u>

<u>Θ. Jordan</u>

Έστω Γ <u>απλή + κλειστή</u> καμπύλη του $\mathbb{R}^2$.

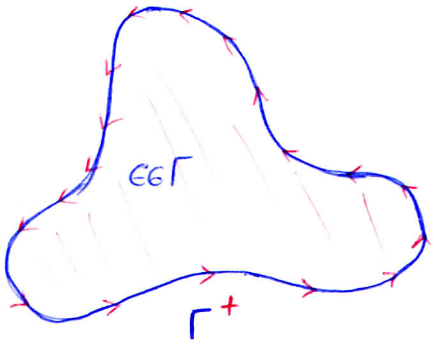

Τότε $\exists\ A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ ώστε

$\mathbb{R}^2 = A \cup B \cup \Gamma$, $A$ = φραγμένο, $B$ = μη φραγμένο

Το σύνολο Α ονομάζεται εσωτερικό της καμπύλης Γ, συμβολίζεται εσΓ.

» » εξωτερικό της καμπύλης Γ, συμβολίζεται εξΓ.

Ορίζουμε προσανατολισμό της Γ. (Γ τόξο Jordan)

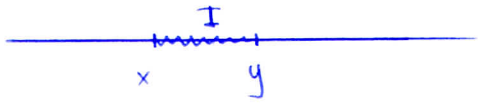



Η Γ είναι θετικά προσανατολισμένη αν, κινούμενοι πάνω στην Γ έχουμε το εσΓ στα αριστερά μας δηλ. κινούμεθα με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού μας.

Συμβ. $\Gamma^+$

Μήκος καμπύλης ($C^1$ ή κατά τμήματα $C^1$)

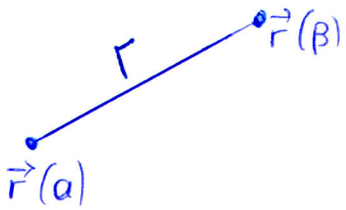
$\mathbb{R}$:




$I$ άκρα τα $x, y (\in \mathbb{R})$ (x

$\mu(I) = |x-y|$ ορίζεται ως μήκος του $I$

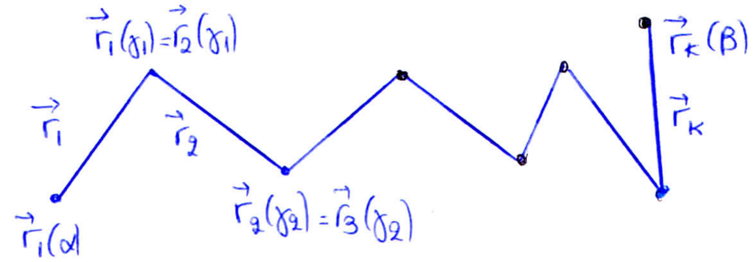
$\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$




, Γ ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\vec{r}(a), \vec{r}(\beta)$ $(\vec{r}(\alpha) \neq \vec{r}(\beta))$

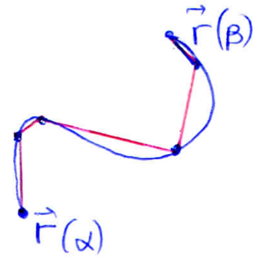
$\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + t(\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha))$, $t \in [0,1]$ (παράλληλο διάνυσμα το $\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)$)

τότε $\mu(\Gamma) = \|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(a)\| = \|\vec{r}'(t)\|$ ορίζεται ως μήκος του Γ




Π: Πολυγωνική γραμμή $\mu(\Pi)=\sum_{i=1}^{\kappa}\|\vec{r}_i\,'(t)\|$ ορίζεται ως μήκος της Π.

$\Gamma$ $C^1$ (ή κ.τ $C^1$)

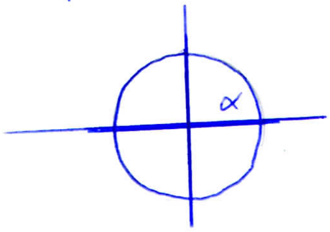



$$\mu(\Gamma)=:\int_\alpha^\beta \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

## Ασκήσεις

1) Να βρεθεί το μήκος της μοναδιαίας περιφέρειας: $\Gamma$ $x^2+y^2=1$

Γενικά: $x^2+y^2=\alpha^2$ $(\alpha>0)$




$\vec{r}(t)=(\alpha\,\sigma\upsilon\nu t,\ \alpha\,\eta\mu t)$, $t\in[0,2\pi]$

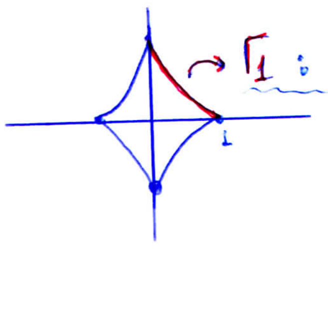
$\vec{r}\,'(t)=(-\alpha\,\eta\mu t,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu t)$

$\|\vec{r}\,'(t)\|=\alpha$

$$\mu(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt=2\pi\alpha$$

2) $\Gamma$: $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

$\vec{r}(t)=(\sigma\upsilon\nu^3 t,\ \eta\mu^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$




$\Gamma_1$: $\Gamma$ στο $x,y\geq 0$.

$\vec{r}\,'(t)=(-3\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu t,\ 3\sigma\upsilon\nu t\,\eta\mu^2 t)$

$\|\vec{r}\,'(t)\|=3\sqrt{\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu^2 t}\overset{x,y\geq 0}{=}3\,\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t$

$\mu(\Gamma_1)=\int_0^{\pi/2}3\,\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t\,dt=\frac{3}{2}$.

Άρα $\mu(\Gamma)=4\mu(\Gamma_1)=\underline{\underline{6}}$

3) $\Gamma: \vec{r}(t) = (t\cdot\eta\mu t,\ t\sigma\upsilon\nu t,\ t)$ , $t\in[0,\pi/2]$

$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{t^2+2}$

$$\mu(\Gamma) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{t^2+2}\,dt = \frac{\pi\sqrt{\pi^2+8}}{8} + \ln\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+8}}{2\sqrt{2}}$$

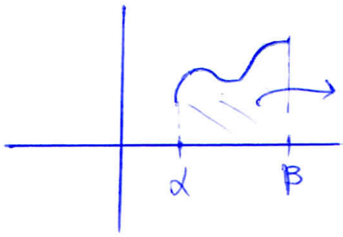
## (A) Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης
(1ου Είδους Επ. ολοκληρώματος)

Στον $\mathbb{R}$

$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f\geq 0$

Τι είναι $\int_\alpha^\beta f$; ;;

α)



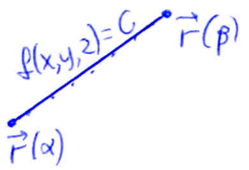
$E=\int_\alpha^\beta f$ (το εμβαδόν της $S=\{(x,y):\ x\in[\alpha,\beta]=I,\ 0\leq y\leq$

β) $f$ πυκνότητα (ή θερμοκρασία), $M=\int_\alpha^\beta f$ μάζα του $I=[\alpha,\beta]$

• $f$ = θερμοκρασία

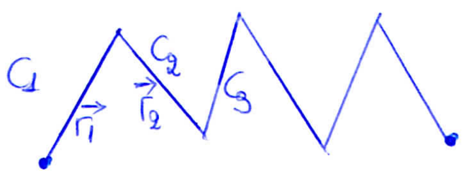
$$\frac{\int_\alpha^\beta f}{\mu(I)}$$ = μέση θερμοκρασία του σύρματος $I$.

$\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ :



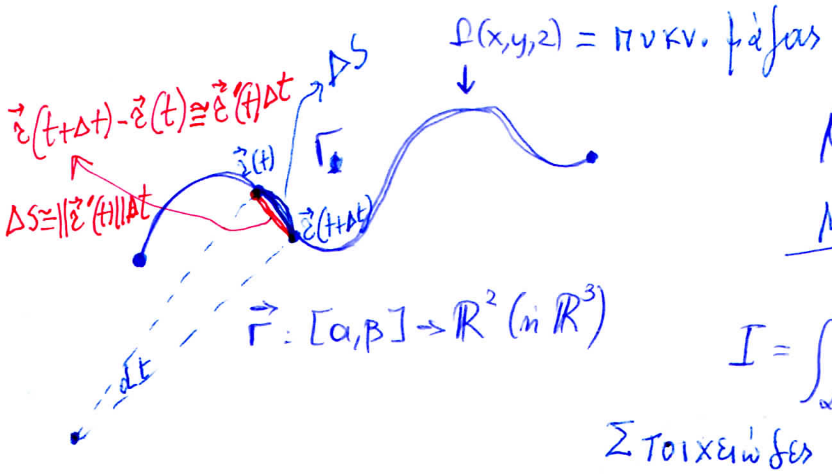

$C$ = σταθ. πυκνότητα

Μάζα : $M = C\cdot\|\vec{r}(\beta)-\vec{r}(\alpha)\| = c\,\|\vec{r}\,'(t)\|$




$M = \sum_{i=1}^{k} C_i\,\|\vec{r}_i\,'(t)\|$

Μάζα του πολυγωνικού σύρματος




$$M=\int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt$$

Μάζα του σύρματος Γ

$$I=\int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt \overset{\text{συμβ}}{=} \int_\Gamma f\,ds$$

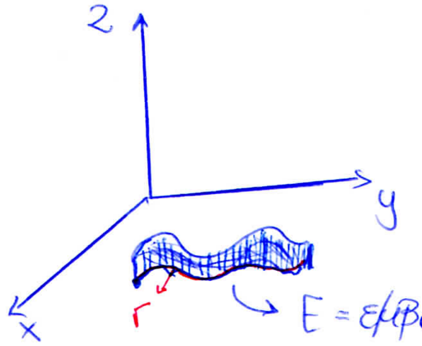
Στοιχειώδες μήκος $ds=\|\vec{r}'(t)\|\,dt$.

## Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (1ου είδους) της $f$ στην Γ

$$\boxed{\int_\Gamma f\,ds=\int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt}$$

Τι δίνει το $\int_\Gamma f\,ds$, $f\geq 0$; // ;;

α) $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^2$




$E$ = εμβαδόν της $S=\{(x,y,z):(x,y)\in\Gamma,\ 0\leq z\leq f(x,y)\}$

β) $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

$f$ = πυκν. μάζας : $M=\int_\Gamma f\,ds$ είναι η μάζα του σύρματος Γ.

KB της Γ $\left(\dfrac{\int_\Gamma x f\,ds}{M},\ \dfrac{\int_\Gamma y f\,ds}{M},\ \dfrac{\int z f\,ds}{M}\right)$

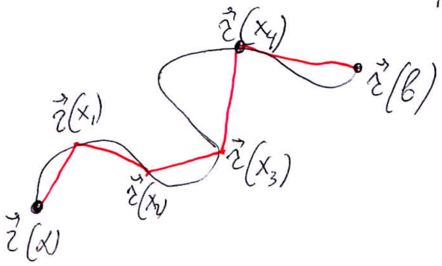
---

$f$ = θερμοκρασία : $\dfrac{\int_\Gamma f\,ds}{\mu(\Gamma)}$ = Μέση θερμ. σύρματος Γ.

# Μήκος Καμπύλης (για τους ενδιαφερόμενους)

Έστω $\vec{r}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ συνεχής απεικόνιση και $\Gamma=\vec{r}([\alpha,\beta])$ η καμπύλη που αντιστοιχεί.

$P=\{\alpha=x_0<x_1<\dots<x_k=\beta\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$




Ορίζουμε την πολυγωνική γραμμή

$$\Pi_P=[\vec r(\alpha),\vec r(x_1)]\cup\dots\cup[\vec r(x_{k-1}),\vec r(\beta)]$$

Και το μήκος της να είναι $\ell(\Pi_P)=:\sum_{i=1}^{k}\|\vec r(x_i)-\vec r(x_{i-1})\|$

Ως μήκος της $\Gamma$ ορίζουμε το

$$\ell(\Gamma)=\sup\{\ell(\Pi_P): P \text{ διαμέριση του } [\alpha,\beta]\}$$

Τότε $0\le\ell(\Gamma)\le+\infty$.

---

Εάν η $\vec r$ είναι $C^1$ (ή κ.τ. $C^1$) αποδεικνύεται ότι

$$\ell(\Gamma)=\int_\alpha^\beta\|\vec r\,'(t)\|\,dt$$

---

Υπάρχουν καμπύλες που δεν έχουν εφαπτομένη σε κάθε $t\in[\alpha,\beta]$ δηλ. δεν υπάρχει η $\vec r\,'(t)$ για $t\in[\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα τέτοιας καμπύλης είναι η χιονονιφάδα του Koch (α[illegible] βλ. 2). Το μήκος ανάμεσα σε δυο σημεία $\vec x,\vec y\in\Gamma$ $(\vec x\neq\vec y)$ είναι άπειρο!!

και άλλες πολλές (πχ ~~Drag~~ Dragon curve από το βιβλίο-ταινία Jurassic Park)