Ανάλυση II - 15/04/2011 - μάθημα 22

(I) Αλλαγή συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^2$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{T}(r,\theta) = (r\,\text{συν}\theta,\ r\,\text{ημ}\theta)$

ορίζουσα

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\vec{T}^{-1}(D)} f(r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta)\,\|J\vec{T}(r,\theta)\|\,dr\,d\theta$$

απόλ. τιμή

$$= \iint_{\vec{T}^{-1}(D)} f(r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

Ασκήσεις (με πολικό μετασχηματισμό)

1) (i) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $A(D)$ όπου D κυκλικός δίσκος ακτίνας a $(a>0)$

(ii) Εάν $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$ να υπολογιστεί

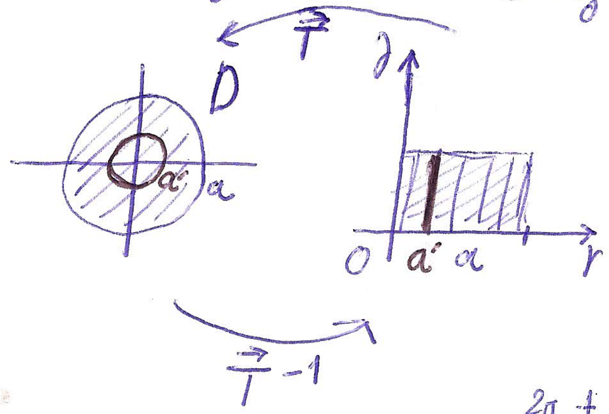
$$I = \iint \text{ημ}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Λύση

(i) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$

(Το εμβαδόν και ο όγκος ενός B είναι αναλλοίωτα ως προς τις μεταθέσεις και τις στροφές)

$$A(D)=\iint_D 1\,dx\,dy=\int_0^a\left(\int_0^{2\pi} r\,d\theta\right)dr=\int_0^a r(2\pi)\,dr=2\pi\frac{r^2}{2}\Big|_0^a$$



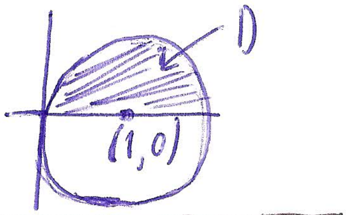
$=\underline{\pi a^2}$ (Καταλήξαμε στον τύπο του Αρχιμήδη)

Αν είχαμε αντίστροφη σειρά ολοκλήρωσης

(ii) $I=\int_0^a\int_0^{2\pi} r\,\eta\mu(r^2)\,d\theta\,dr=2\pi\int_0^a (r\,\eta\mu r^2)\,dr=$

$$=2\pi\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu r^2}{2}\right]_0^a=\pi\left(1-\sigma\upsilon\nu(a^2)\right)$$

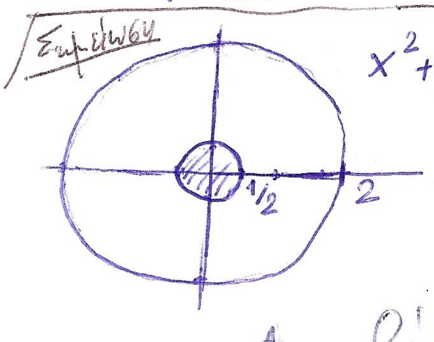
2η ασκ.) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, D περιβάλλεται από την καμπύλη $x^2+y^2=2x$ και έχει $y\geq 0$



$(x-1)^2+y^2=1$

$\vec{T}^{-1}(D)=\{(r,\theta): 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq r\leq 2\sigma\upsilon\nu\theta\}$

Σημείωση

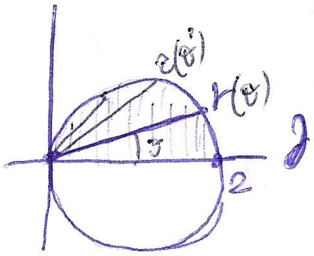


$x^2+y^2\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$r\leq\frac{1}{2}$

ΚΑΝΟΥΜΕ ΛΑΘΟΣ .....

..... αν βάλουμε $r\leq\frac{1}{2}$ ή $r\leq 2$, τότε $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2\}$ ή $\leq 2^2$



$$x^2+y^2=2x$$
$$r^2=2r\,\sigma\upsilon\nu\theta$$
$$r=2\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\sigma\upsilon\nu\theta} r^2\cdot r\,dr\right)d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{(2\,\sigma\upsilon\nu\theta)^4}{4}\,d\theta=4\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^4\theta\,d\theta=\dots\frac{3\pi}{2}$$

(II) Αλλαγή συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

πίνακας Jacobi του $\vec{T}$ στο (u,v,w)

$$=\iiint_{\vec{T}^{-1}(B)} f(\vec{T}(u,v,w))\,\Big|\,\big|J\vec{T}(u,v,w)\big|\,\Big|\,du\,dv\,dw$$

ορίζουσα

απόλυτη τιμή

$\vec{T}(u,v,w)=(x,y,z)$

Τύπος αλλαγής συντεταγμένων στο τριπλό ολοκλήρωμα

- Τι μας δίνει το $\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ για $f\geq 0$

Έστω $f: B\to\mathbb{R}$ (συνεχής), $B\subseteq\mathbb{R}^3$, xy-απλό (ή xz απλό, ... ή απλό), $f\geq 0$.

Υπενθύμιση

Αν $f: D\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$, $\Sigma(f,D)=\{(x,y,z):(x,y)\in D\ (\subseteq\mathbb{R}^2),\ 0\leq z\leq f(x,y)\}$

$D\subseteq\mathbb{R}^2$ x-απλό (ή y-απλό ή απλό).

$$\Sigma(f,D), \quad V(\Sigma(f,D)) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$f \equiv 1, \quad V(\Sigma(f,D)) = \iint 1\,dx\,dy = A(D)$$

(A = εμβαδόν)

$M = \iint_D f\,dx\,dy$ = Μάζα του D αν υπάρχει πυκνότητα $f(x,y)$ στο $(x,y) \in D$

Το $V_4(\Sigma(f,B)) = \iiint_B f\,dx\,dy\,dz$

ή $M = \iiint_B f\,dx\,dy\,dz$ η μάζα του στερεού B με πυκνότητα $f(x,y,z)$ στο $(x,y,z) \in B$

$$f \equiv 1, \quad V_4(\Sigma(f,B)) = \iiint_B 1\,dx\,dy\,dz = V_3(B)$$

<u>Ασκήσεις</u> I (Αλλαγή μεταβλητών σε κυλινδρικές)

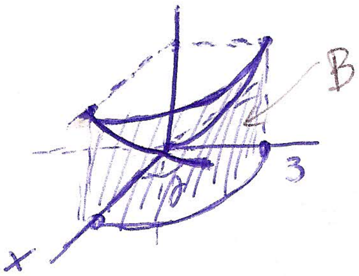
$$\boxed{\text{\underline{Σημείωση}: Χρησιμοποιούμε κυλινδρ. συντεταγμένες όταν στο πρόβλημά μας υπάρχει συμμετρία ως προς \underline{ΑΞΟΝΑ} z}}$$

. Η ορίζουσα του πίνακα Jacobi του $\vec{T}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ είναι (απολύτως) $\underline{\underline{r}}$

Η ορίζουσα του πίνακα Jacobi του $\vec{T}(r\theta,z) =$
$= (r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta, z)$ είναι (απολύτως) $\underline{\underline{r}}$

Ασκήσεις (με Κυλινδρικό Μετασχηματισμό)

1) Όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο $1^{ο}$ ογδοημόριο (δηλ. $x, y, z \geq 0$) και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2+y^2=9$, $3z=x^2+y^2$



$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \begin{cases} \overset{\text{κύλινδρος}}{r^2 \leq 9} \text{ και } \overset{\text{παραβολοειδές}}{3z \leq r^2} \end{cases}$$

$$x, y \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

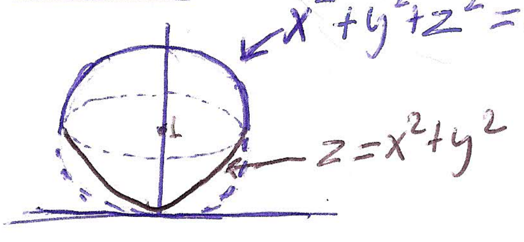
$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 9,\ 3z\leq x^2+y^2,\ x,y,z\geq 0\}$$

$$\vec{T}^{-1}(B)=\{(r,\theta,r) : 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq r\leq 3,\ 0\leq z\leq\frac{r^2}{3}\}$$

$$V(B)=\int_0^{\pi/2}\int_0^3\left(\int_0^{r^2/3} r\,dz\right)dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^3\frac{r^3}{3}\,dr=\frac{\pi\, 3^4}{2\cdot 3\cdot 4}$$

2) Όγκος B που βρίσκεται εντός της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=2z$ και εντός του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$

$x=r\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=r\eta\mu\theta$, $z=z$



$$\left.\begin{aligned} &\text{Σφαίρα: } r^2+z^2=2z \\ &\text{Παραβ/δές: } z=r^2 \end{aligned}\right\} \text{Τομή στο } z=1 \text{, επίπεδο.}$$

...Σφαίρα

$z^2-2z+r^2=0$

$z=1+\sqrt{1-r^2}$

Παραβολοειδές

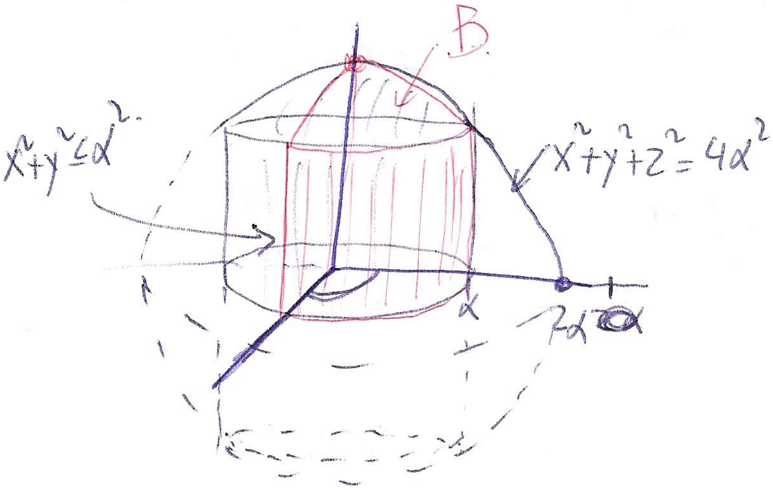
$z=r^2$.

$$V(B)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r\,dz\right)dr\,d\theta=\ldots=\frac{5\pi}{6}$$

3) $M=\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ (= Μάζα του B με πυκνότητα μάζας $\delta(x,y,z)=z$)

$B=\{(x,y,z): x,y,z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 4a^2,\ x^2+y^2\leq a^2\}$ $(a>0)$

$$M=\int_0^{\pi/2}\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\cdot z\,dz\right)dr\,d\theta=\frac{7\pi}{16}a^2$$



Σφαίρα

$r^2+z^2\leq 4\alpha^2$

Κύλινδρος

$r^2\leq\alpha^2$.