12/04/2010

Πολλαπλά Ολοκληρώματα

1) Στον $\mathbb{R}^n$ το σύνολο $I=[\alpha_1,b_1]\times\cdots\times[\alpha_n,b_n]=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \alpha_i\le x_i\le b_i,\ i=1,\ldots n\}$ καλείται **ορθογώνιο** διάστασης n. ($\alpha_i<b_i$, $\alpha_i,b_i\in\mathbb{R}$ $i=1,2,\ldots n$) $(n\in\mathbb{N}, n\geq 1)$

Ιδιαίτερα: Το I για $n=1$ καλείται (κλειστό) διάστημα, για $n=2$ καλείται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, για $n=3$ καλείται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

2) Ορίζουμε ως **μέτρο του I** το $\mu(I):=(b_1-\alpha_1)\cdot(b_2-\alpha_2)\cdots(b_n-\alpha_n)$

Ιδιαίτερα: Το $\mu(I)$ για $n=1$ καλείται μήκος, για $n=2$ εμβαδόν, για $n=3$ όγκος του I.

3) Εάν το I είναι ορθογώνιο και P_k είναι διαμέριση(*) του $[\alpha_k,b_k]$ $k=1,\ldots,n$ τότε το $P=P_1\times P_2\times\cdots\times P_n$ καλείται **διαμέριση του I**.

(* ως γνωστόν αν $[\gamma,\delta]\subseteq\mathbb{R}$ η $P=\{\gamma=x_0<x_1<\cdots<x_\nu=\delta\}$ καλείται διαμέριση του $[\gamma,\delta]$)

Ολοκλήρωμα Riemann

1) Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ορθογώνιο I του $\mathbb{R}^n$. Εάν P είναι διαμέριση του I και $I_1,\ldots,I_m$ είναι τα (υπο)ορθογώνια που αποτελείται η P ορίζουμε

$m_k=\inf\{f(\vec{x}): \vec{x}\in I_k\}$, $M_k=\sup\{f(\vec{x}): \vec{x}\in I_k\}$ $k=1,\ldots m$ και

$U(f,P)=\sum_{k=1}^{m} m_k\,\mu(I_k)$, $L(f,P)=\sum_{k=1}^{m} M_k\,\mu(I_k)$ το άνω και κάτω άθροισμα Riemann ως προς την διαμέριση P.

Ως **άνω** και **κάτω** **ολοκλήρωμα Riemann της f στο I** ορίζουμε

$\overline{\int_I} f\,d\vec{x}=\inf\{U(f,P): P \text{ διαμέριση του } I\}$

$\underline{\int_I} f\,d\vec{x}=\sup\{L(f,P): P \text{ διαμέριση του } I\}$

Ισχύει: $\underline{\int_I} f\,d\vec{x}\le\overline{\int_I} f\,d\vec{x}$

Εάν $\overline{\int_I} f\,d\vec{x}=\underline{\int_I} f\,d\vec{x}$ τότε η f καλείται **ολοκληρώσιμη στο I** κατά Riemann και την κοινή τιμή $\int_I f\,d\vec{x}$ καλούμε **ολοκλήρωμα Riemann της f στο I**

2) Έστω $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με πεδίο ορισμού φραγμένο σύνολο B του $\mathbb{R}^n$.
Εάν I είναι ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ με $B \subseteq I$ ορίζουμε $g(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \vec{x} \in B \\ 0 & \vec{x} \in I \setminus B \end{cases}$
Εάν υπάρχει το ολοκλήρωμα της $g: I \to \mathbb{R}$ τότε ορίζουμε
$\int_B f\, d\vec{x} =: \int_I g\, d\vec{x}$ και η f καλείται <u>ολοκληρώσιμη στο B</u>.

Σημείωση: Ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες (γραμμικότητα, προσθετικότητα) που γνωρίζουμε για $n=1$.

<u>Απλά σύνολα στον $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$</u>

1) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Το B καλείται <u>x-απλό</u> αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \le x \le \beta,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi \le \psi$.
Ανάλογα ορίζεται το <u>y-απλό</u>.
<u>Απλό</u> καλείται το σύνολο που είναι x και y απλό.

2) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Το B καλείται <u>xy-απλό</u> αν $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ w_1(x,y) \le z \le w_2(x,y)\}$ όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ x-απλό σύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $w_1, w_2 : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $w_1 \le$
Ανάλογα ορίζονται τα <u>yx-απλά</u>, xz-απλά, zx-απλά, yz-απλά, zy-απλά.
<u>Απλό</u> καλείται το σύνολο που είναι xy και yx και xz και zx και yz και zy απλό.

<u>Θεώρημα Fubini</u> (Διαδοχικών Ολοκληρωμάτων)

1) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^2$ x-απλό σύνολο και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B και ισχύει: $\int_B f\, d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$
Ανάλογα για y-απλό σύνολο.

2) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$ xy-απλό σύνολο και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B και ισχύει $\int_B f\, d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{w_1(x,y)}^{w_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx$
Ανάλογα για $yx, \dots, zy$ απλό σύνολο.

Ιδιαιτέρως: Για $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, $\int_I f\, d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\, dy \right] dx = \int_\gamma^\delta \left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\, dx \right] dy$.
και για $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \times [\varepsilon, \zeta]$, $\int_I f\, d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta \left[\int_\varepsilon^\zeta f(x,y,z)\, dz \right] dy \right) dx = \dots = \int_\varepsilon^\zeta \left(\int_\gamma^\delta \left[\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\, dx \right] dy \right)$

Όγκος στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο. Ορίζουμε ως όγκο το B το $V(B)=\int_B 1\, d\vec{x}$ (αν υπάρχει).
Για $n=1,2,3$ καλείται μήκος, εμβαδόν, όγκος του B αντίστοιχα.

Ιδιαίτερα:

- Αν το B είναι x-απλό στον $\mathbb{R}^2$, τότε το εμβαδόν του $A(B)=\int_B 1\, dx dy =$
$= \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\; dy\right] dx = \int_\alpha^\beta (\psi(x)-\varphi(x))dx$
- Αν το B είναι xy-απλό στον $\mathbb{R}^3$, τότε ο όγκος του $V(B)=\int_B 1\, dx dy dz =$
$= \int_\alpha^\beta \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{w_1(x,y)}^{w_2(x,y)} 1\, dz\, dy\, dx = \int_\alpha^\beta \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (w_2(x,y)-w_1(x,y))\, dy\, dx.$
- Ανάλογα για τις άλλες περιπτώσεις για το B.
- Αν το B είναι ορθογώνιο τότε $V(B)=\mu(B)$

Μάζα, Ροπές, Κέντρο βάρους στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο με πυκνότητα $\delta(\vec{x})$ στο $\vec{x}\in B$. Ορίζουμε ως μάζα του B το $M=\int_B \delta(\vec{x})d\vec{x}$.
Εάν $M_{x_2x_3\ldots x_n}=\int_B x_1\delta(\vec{x})d\vec{x}$, $M_{x_1x_3\ldots x_n}=\int_B x_2\delta(\vec{x})d\vec{x}$, $\ldots$, $M_{x_1x_2\ldots x_{n-1}}=\int_B x_n\delta(\vec{x})d\vec{x}$
είναι οι πρώτες ροπές του B το κέντρο βάρους του B είναι το σημείο

$$\left(\frac{M_{x_2\ldots x_n}}{M}, \frac{M_{x_1x_3\ldots x_n}}{M}, \ldots, \frac{M_{x_1x_2\ldots x_{n-1}}}{M}\right) \qquad (M\neq 0)$$

Αλλαγή μεταβλητής

Έστω $\vec{g}=(g_1,\ldots,g_n): S\to\mathbb{R}^n$ 1-1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό σύνολο $S\subseteq\mathbb{R}^n$.
Υποθέτουμε ότι η $\vec{g}$ είναι C^1 (υπάρχουν οι μερ. παράγωγοι και είναι συνεχείς) και
η Ιακωβιανή ορίζουσα $\left|J_{\vec{g}}(\vec{t})\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\vec{t}} \neq 0$ για κάθε $\vec{t}\in S$.

(πίν. διαφορικού)

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\vec{g}"] \arrow[dr, "f\circ\vec{g}"'] & X\subseteq\vec{g}(S) \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Εάν $f: X\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και το $X\subseteq g(S)$ είναι φραγμένο σύνολο
και η f είναι ολοκληρώσιμη στο X, τότε $\int_X f\, d\vec{x} = \int_{\vec{g}^{-1}(X)} f(\vec{g}(\vec{t}))\underbrace{\left|J_{\vec{g}}(\vec{t})\right|}_{\text{απ. τιμή}} d\vec{t}$

Σημείωση: Για $n=1$, αν $g:[\gamma,\delta]\to[\alpha,\beta]$ (επί) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(g(t))|g'(t)|dt$. (*)
Η απόδειξη για κάθε $n\in\mathbb{N}$ χρησιμοποιεί τον τύπο (*), το θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 2$) και μαθηματική επαγωγή.
Ο τύπος (*) αποδεικνύεται από το ΘΘΑΛ και τον κανόνα της Αλυσιδωτής Παραγ.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ $\boxed{\frac{\partial(g_1,g_2,\ldots,g_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}}$ η ορίζουσα του πίνακα Jacobi της $\vec{g}=(g_1\ldots g_n)$

ΣΥΝΟΨΗ (ℓ = μήκος στον $\mathbb{R}$, A = εμβαδόν στον $\mathbb{R}^2$, V_3 = όγκος στον $\mathbb{R}^3$, V_4 = όγκος στον $\mathbb{R}^4$)

$D_1=\{x\in\mathbb{R} : \alpha\leq x\leq \beta\}\subseteq\mathbb{R}$, $f_1, g_1 : D_1\to\mathbb{R}$, $f_1\geq g_1$

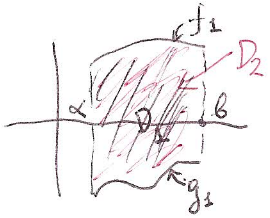
$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in D_1 , g_1(x)\leq y\leq f_1(x)\}$, $f_2, g_2 : D_2\to\mathbb{R}$, $f_2\geq g_2$

$D_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D_2 , g_2(x,y)\leq z\leq f_2(x,y)\}$, $f_3, g_3 : D_3\to\mathbb{R}$, $f_3\geq g_3$

$D_4=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : (x,y,z)\in D_3 , g_3(x,y,z)\leq w\leq f_3(x,y,z)\}$, … (κοκ..)

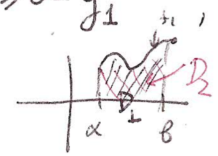
- 

  $\ell(D_1)=\beta-\alpha=\int_{D_1}1\,dx$

- 

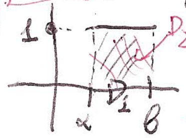
  $$\begin{cases} A(D_2)\overset{(*)}{=}\iint_{D_2}1\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta\left(\int_{g_1(x)}^{f_1(x)}1\,dy\right)dx \\ A(D_2)=\int_\alpha^\beta\left(f_1(x)-g_1(x)\right)dx=\int_{D_1}(f_1-g_1)dx \end{cases}$$

  $f_1\geq 0=g_1$, $A(D_2)=\int_\alpha^\beta f_1(x)dx$

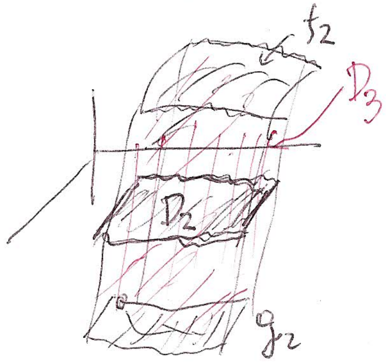
  

  Ειδική περίπτωση D_2 (βάση D_1, ύψος 1)

  $\boxed{f_1\equiv 1}\geq 0=g_1$

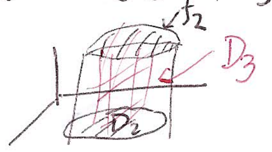
  

  $A(D_2)=\int_{D_1}1\,dx=\ell(D_1)$

- 

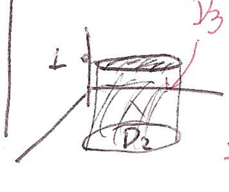
  $$\begin{cases} V_3(D_3)=\iiint_{D_3}1\,dxdydz=\iint_{D_2}\left(\int_{g_2(x,y)}^{f_2(x,y)}1\,dz\right)dxdy \\ V_3(D_3)\overset{(**)}{=}\iint_{D_2}\left(f_2(x,y)-g_2(x,y)\right)dxdy \end{cases}$$

  $f_2\geq 0=g_2$, $V_3(D_3)=\iint_{D_2}f_2\,dxdy$

  Ειδική περίπτωση D_3 (βάση D_2, ύψος 1)

  $\boxed{f_2\equiv 1}\geq 0=g_2$

  $V_3(D_3)=\iint_{D_2}1\,dxdy\overset{(*)}{=}A(D_2)$

- $V_4(D_4)=\iiiint_{D_4}1\,dxdy\,dzdw=\iiint_{D_3}\left(\int_{g_3}^{f_3}1\,dw\right)dxdydz$

  $V_4(D_4)=\iiint_{D_3}(f_3-g_3)dx\,dy\,dz$

  Ειδική περίπτωση D_4 (βάση D_3, ύψος 1)

  $\boxed{f_3\equiv 1}\geq g_3\equiv 0$

  $V_4(D_4)=\iiint_{D_3}1\,dx\,dy\,dz=\iint_{D_2}\left(\int_{g_2(x,y)}^{f_2(x,y)}1\,dz\right)dx\,dy=\iint_{D_2}(f_2-g_2)dxdy\overset{(**)}{=}V_3(D_3)$