Εφαρμογές πολ. Taylor $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(Β) Τοπικά Ακρότατα

$f: U (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, $\vec{z}_0 \in U$

i) Το $\vec{z}_0$ είναι σημείο τοπ. ελαχίστου της f

$\iff \exists S(\vec{z}_0, \delta) : \vec{x} \in U \cap S(\vec{z}_0, \delta)$

(δηλ. $\vec{x} \in U$, $\|\vec{x} - \vec{z}_0\| < \delta$) έχουμε $f(\vec{x}) \geq f(\vec{z}_0)$

ii) Το $\vec{z}_0$ είναι σημείο Τοπικού Μεγίστου της f

$\iff \exists S(\vec{z}_0, \delta) : \vec{x} \in U \cap S(\vec{z}_0, \delta')$ έχουμε

$f(\vec{x}) \leq f(\vec{z}_0)$ // Εάν $\vec{z}_0$ είναι σ. Τοπ. Ελαχίστου ή Τοπικού Μεγίστου καλείται σημείο Τοπ. Ακρότατου της f.

iii) Το $\vec{z}_0$ είναι Σαγματικό Σημείο (ή σημείο Σέλλας) της $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $n \geq 2$

$\iff \forall \delta > 0, \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S(\vec{z}_0, \delta) : f(\vec{x}_1) < f(\vec{z}_0) < f(\vec{x}_2)$

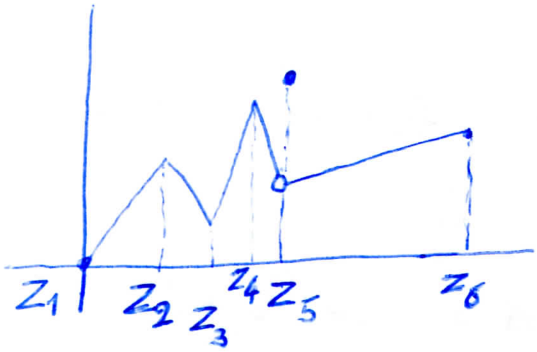
($n=1$, παρόμοιο με Σημείο Καμπ

iv) Το $\vec{z}_0$ είναι σημείο <u>Ολικού Μεγίστου</u>

(Ολικού Ελαχίστου) $\Leftrightarrow f(\vec{z}_0) \geq f(\vec{x})$

$(f(\vec{z}_0) \leq f(\vec{x}))$ για <u>κάθε</u> $\vec{x} \in U$.

π.χ.



Τοπ. Ελ.: z_1, z_3
Ολ. Ελ.: z_1
Τοπ. Μέγ.: z_2, z_4, z_5, z_6
Ολικό Μέγ: z_5

Η εύρεση των Τοπ. Ακροτάτων είναι γενικά <u>μη</u> επιλύσιμο πρόβλημα: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Στην περίπτωση που έχουμε $f: U(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$

<u>U = ανοικτό</u> και η f είναι C^2

δηλ. έχει παραγώγους έως και 2ης τάξης, συνεχείς, τότε υπάρχουν περιπτώσεις όπου έχουμε απάντηση

(ή αν f είναι κυρτή ή κοίλη)

(I) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $z_0\in(a,b)$, C^2

Πρόταση (Αρχή Fermat)

Εάν το z_0 είναι σ. Τ. Ακροτάτου $\Rightarrow f'(z_0)=0$

$\not\Leftarrow$

(π.χ. x^3, x^5, x^7, ...)

Απόδ

z_0 = Τοπ. Ελαχίστου

$f(x)\geq f(z_0)$, $x\in(z_0-\delta, z_0+\delta)\subseteq(a,b)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to z_0^+}\dfrac{f(x)-f(z_0)}{x-z_0}\geq 0,\quad f'_+(z_0)\geq 0\\[2ex] \lim\limits_{x\to z_0^-}\dfrac{f(x)-f(z_0)}{x-z_0}\leq 0,\quad f'_-(z_0)\leq 0\end{array}\right\} f'(z_0)=0$$

z_0 x

Ορισμός: Εάν $f'(z_0)=0$, το z_0 καλείται κρίσιμο σημείο

Ισχύει το εξής:

Έστω z_0 = κρίσιμο, $f''(z_0)\neq 0$

$f''(z_0)>0$, z_0 = τοπ. Ελ.

$f''(z_0)<0$, z_0 = Τοπ. Μεγ.

$$f(z_0+h) \cong f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1}h + \frac{f''(z_0)}{2}h^2$$

$$f(z_0+h) - f(z_0) \cong \frac{f''(z_0)}{2}h^2 \begin{cases} f''(z_0)>0, & f(z_0+h) \geq f(z_0) \\ f''(z_0)<0, & f(z_0+h) \leq f(z_0) \end{cases}$$

II $f: U\ (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $U =$ ανοικτό

$f\ C^2$

Πρόταση (Αρχή Fermat)

Εάν το $\vec{z}_0$ είναι Τοπ. Ακρότατο τότε

$$\nabla f(\vec{z}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{z}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{z}_0)\right) = (0,0)$$

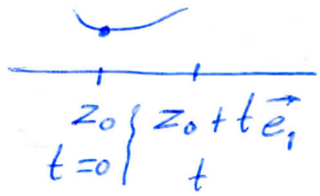
$\cancel{\Leftarrow}$ πχ $f(x,y) = x^3$, $(0,0)$

Απόδ.

$g(t) = f(\vec{z}_0 + t\vec{e}_1)$, $g(t) \geq g(0)$, $g: (-\delta,+\delta)(\subseteq \mathbb{R}) \to$

$$|t|<\delta \xRightarrow[\text{FERMA}]{\text{ΑΡΧΗ}} g'(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{z}_0) = 0$$



Όμοια $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{z}_0) = 0$

Οι αποδείξεις ΜΟΝΟΝ για τους ενδιαφερόμενους

Έστω $\vec{z}_0 = (x_0, y_0)$ $\quad \underline{\underline{\nabla f(\vec{z}_0) = (0,0)}}$

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}$$

$$\cdot\left[(x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}\right] \text{(Taylo}$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\Big[(x-x_0)^2\cdot f_{xx}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\cdot f_{xy}(x_0,y_0) +$$
$$+ (y-y_0)^2\cdot f_{yy}(x_0,y_0)\Big]$$

Για να βρούμε το είδος του τοπ. ακροτάτου του Κρίσιμου Σημείου $\vec{z}_0(x_0,y_0)$ $(\nabla f(x_0,y_0) = (0,0))$ πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του Εσσιανού Πίνακα $H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a = f_{xx}(x_0,y_0) & \gamma = f_{xy}(x_0,y_0) \\ \gamma = f_{xy}(x_0,y_0) & b = f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

δηλ. του $H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b\end{pmatrix}$ ("Δεύτερη Παράγωγος" στο (x_0,y_0))

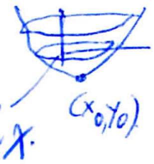
Έστω $P(x,y) = (x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}$ με $\begin{vmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b\end{vmatrix} = ab - \gamma^2 \neq 0$

π.χ.

$$\gamma = 0, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad p(x,y) = a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2,$$

$a \cdot b \neq 0$, Παραβολοειδές

• $ab > 0$ $\begin{cases} a>0 \ (b>0), & p(x,y) \text{ Ελ. Παραβολοειδές με } (x_0, y_0) \text{ Τοπ. Ελάχ.} \\ a<0 \ (b<0), & \ldots \text{ με } (x_0,y_0) \text{ Τοπ. Μέγιστο} \end{cases}$



• $ab<0$. $p(x,y)$ Υπερβ. παραβολοειδές με σημείο σαγματικό στο (x_0, y_0)

π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ $\gamma \neq 0$, $p(x,y) = 2\gamma^2 (x-x_0)(y-y_0)$

Υπερβ. παραβολοειδές με σαγμ. σημ. στο (x_0, y_0)

Γενικά

$$p(x,y) = (x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \text{ με } \Delta = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta > 0$ και $a>0$ το (x_0, y_0) Τοπ. Ελάχιστο

$\Delta > 0$ και $a<0$ το (x_0, y_0) Τοπ. Μέγιστο

$\Delta < 0$ Το (x_0, y_0) Σαγματικό Σημείο.

Κριτήριο (μαθαίνουμε απ' έξω)

Έστω (x_0, y_0) κρίσιμο σημείο της f, $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$

$$H(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

i) Εάν η ορίζουσα $|H(x_0,y_0)| =$

$= f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$

Τότε $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, (x_0,y_0) Τοπ. Ελάχ

$f_{xx}(x_0,y_0)<0$, (x_0,y_0) Τοπ Μέγιστο

ii) Εάν $|H(x_0,y_0)|<0$, (x_0,y_0) Σαγμ. σημείο.

Ασκήσεις

1) $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Να βρεθούν τα σημεία Τοπ. Ακροτάτων και σημεία σάγματος.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y-2x-2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-2y-2$

$\nabla f(x,y)=(0,0)$

$(x_1=-2,\ y_1=-2)$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}(x_1,y_1) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1,y_1) = -2 \\ f_{yy}(x_1,y_1) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,y_1) = -2 \\ f_{xy}(x_1,y_1) &= 1 \end{aligned}\right\} H(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|H(x_1,y_1)| = 4 - 1 = 3 > 0$$
$$a = f_{xx}(x_1,y_1) = -2 < 0$$

$(-2, -2)$ Τοπ. Μέγιστο

2) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 6x = 0$$
$$f_y(x,y) = 2y = 0$$

Κρίσιμα σημεία: $(x_1 = 0, y_1 = 0)$, $(x_2 = 2, y_2 = 0)$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -12 < 0,$$ $(0,0)$ Σημείο Σάγματος

$$H(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12 > 0$$

$(2,0)$ Τοπ. Ελάχιστο.

3) $f(x,y)=x^3+x^2y-y^2-4y$

Κρίσιμα: $(0,-2)$, $\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $(-4,6)$

$H(0,-2)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $(0,-2)$ Τ. Μέγιστο

$H\left(1,\frac{-3}{2}\right)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $\left(1,\frac{-3}{2}\right)$ Σάγμα

$H(-4,6)=\begin{pmatrix}-12 & -8\\ -8 & -2\end{pmatrix}$, $(-4,6)$ Σάγμα.

4) $f(x,y)=x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$ (Μόνοι μας)

Σημείωση: Ανάλογη θεωρία ισχύει για $f:V(\subseteq\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0,z_0)\in V$
και γενικότερα για $f:V(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ $(n\geq 4)$

Περισσότερες Ασκήσεις

Υλικό Παρελθόντων Ετών → ασκήσεις 2007 → 0.5 Ακρότατα Συνα
→ Ασκήσεις: 5.1, 5.3 (με σχήματα)

ΚΑΙ Taylor + Ακρότατα (Π. Μπουμπούλης)