Μάθημα 18 (6-04) Τ20

(ΙΙ) Έστω πολυώνυμο $P(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(u,v)\cdot(x,y)+\delta$

πολυώνυμο βαθμού ≤ 2, ως προς x-y,

δηλαδή $P(x,y)=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+ux+uy+\delta$

(παραβολοειδές ή κυλινδρική επιφάνεια: εξαρτάται από τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$)

- $P(0,0)=\delta$
- $\frac{\partial P}{\partial x}(0,0)=u$, $\frac{\partial P}{\partial y}(0,0)=v$. Άρα το διαφορικό $D_1P(0,0)(x,y)=ux+$
  $D_1P(0,0)(x,y)\equiv\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right.$
- $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(0,0)=2\alpha$, $\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(0,0)=2\beta$, $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0,0)=2\gamma$

Ορίζουμε 2-διαφορικό του P στο (0,0)

$$D_2P(0,0)(x,y)\equiv\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2P(0,0)=:x^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(0,0)+2xy\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(0,0)+y^2\frac{\partial^2}{\partial y}$$

Τότε

$$\boxed{P(x,y)=P(0,0)+\frac{1}{1!}D_1P(0,0)(x,y)+\frac{1}{2!}D_2P(0,0)(x,y)}\quad (x,y)\in$$

$$\boxed{P(x,y)=P(0,0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)P(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2P(0,0)}$$

Γενικά: Εάν έχουμε πολυώνυμο βαθμού $\leq n$, ως προς x-y,

$$P(x,y)=P(0,0)+\frac{1}{1!}D_1P(0,0)(x,y)+\dots+\frac{1}{n!}D_nP(0,0)(x,y)$$

όπου $D_kP(0,0)(x,y)\equiv\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^kP(0,0)=:\sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}x^v y^{k-v}\frac{\partial^k P(0,0)}{\partial x^v\partial y^{k-v}}$

- Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Ανάλογα θα έχουμε

$$P(x,y)=P(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}D_1P(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)+\dots+\frac{1}{n!}D_nP(x_0,y_0)(x-x_0$$

όπου $D_kP(0,0)(x-x_0,y-y_0)\equiv\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\right)^kP(x_0,y_0)=:$

$$=:\sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}(x-x_0)^v(y-y_0)^{k-v}\frac{\partial^k P(x_0,y_0)}{\partial x^v\partial y^{k-v}}$$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$

- Έστω $f:(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει n-τάξεως συνεχείς μερικές παραγώγους και $(x_0,y_0)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$

Το πολυώνυμο $T_{n,(x_0,y_0)}(x,y)=f(x_0,y_0)+\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\dots$
$+\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$

Έχει ίδια τιμή στο (x_0,y_0) με την f και
ίδιες μερικές παραγώγους τάξεως $k=1,\dots,n$ στο (x_0,y_0) με την f

καλείται πολυώνυμο Taylor (MacLaurin αν $(x_0,y_0)=(0,0)$) n-βαθμού, της f στο (x_0,y_0).

Το $R_{n,(x_0,y_0)}(x,y)=f(x,y)-T_{n,(x_0,y_0)}(x,y)$ καλείται υπόλοιπο Taylor (MacLaurin αν $(x_0,y_0)=(0,0)$)

Εάν υπάρχουν και οι $(n+1)$-τάξεως παράγωγοι τότε

$$R_{n,(x_0,y_0)}(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}D_{n+1}f(\xi_1,\xi_2)(x-x_0,y-y_0)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(\xi_1,\xi_2)$$

για κάποιο (ξ_1,ξ_2) στο ευθ. τμήμα $[(x_0,y_0),(x,y)]$

Σημείωση: 1) Η απόδειξη για το $R_{n,(x_0,y_0)}(x,y)$ ανάγεται στον Τύπο Taylor (σελ. T3) περιορίζοντας την f σε ευθ. τμήμα και εφαρμόζοντας τον Κανόνα της Αλυσιδωτής Παραγώγισης.
2) Η θεωρία γενικεύεται για συναρτήσεις $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ για $k\geq 3$.

Στις εφαρμογές περιοριζόμαστε στην προσέγγιση $f:(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$ με πολυώνυμο Taylor 1ου βαθμού, δηλαδή στην Γραμμικοποίηση της f σε κάποιο σημείο $(x_0,y_0)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ και στο αντίστοιχο υπόλοιπο.

Αναλυτικά:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left((x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1,\xi_2)+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi_1,\xi_2)+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right.$$
$$=f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)+\frac{1}{2}\left[(x-x_0,y-y_0)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_{(\xi_1,\xi_2)}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right.$$

Ο πίνακας $H(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_{(x,y)}=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(x,y)}$ (Εσσιανός - Hessian) είναι ιδιαίτερα χρήσιμος, επειδή

1) Μας δίνει εκτίμηση σφάλματος (υπολοίπου) από την Γραμμικοποίηση της f στο (x_0,y_0)

2) Μας βοηθάει στον εντοπισμό Ακροτάτων σημείων αν $\nabla f(x_0,y_0)=0$. Είναι η "δεύτερη παράγωγος" για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

T23

Παράδειγμα (Σχήματα στο Γ))

Να υπολογιστεί το $T_{n,(x_0,y_0)}(x,y)$ για $n=1,2,3,4$ της συνάρτησης

$$f(x,y)=\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu^2 x_0+\eta\mu^2 y_0=1$$

Υπολογίζουμε έως και 4-τάξης μερικές παραγώγους

$$f_x(x,y)=\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y \quad , \quad f_y(x,y)=-\eta\mu x\,\eta\mu y$$

$$f_{xx}(x,y)=-\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y\,,\ f_{xy}(x,y)=-\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu y\,,\ f_{yy}(x,y)=-\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y.$$

$$f_{xxx}(x,y)=-\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y\,,\ f_{xxy}(x,y)=\eta\mu x\,\eta\mu y,\ f_{xyy}(x,y)=-\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y\,,\ f_{yyy}(x,y)=\eta\mu x\,\eta\mu y$$

$$\left(\begin{array}{l} f_{xxxx}(x,y)=\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y,\ f_{xxxy}(x,y)=\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu y\,,\ f_{xxyy}(x,y)=\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y\,,\ f_{xyyy}(x,y)=\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu y, \\ f_{yyyy}(x,y)=\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y \end{array}\right.$$

$$T_{1,(x_0,y_0)}(x,y)=\eta\mu x_0\,\sigma\upsilon\nu y_0+(x-x_0)\sigma\upsilon\nu x_0\,\sigma\upsilon\nu y_0-(y-y_0)\eta\mu x_0\,\eta\mu y_0 \ \text{(Επίπεδο/Γραφ}$$

π.χ. Για $(x_0=0,\ y_0=\frac{\pi}{2})$ ή $(x_0=\pm\frac{\pi}{2},\ y_0=0)$, $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ $(\nabla f(x_0,y_0)=(0,0))$, $T_{1,(0,\frac{\pi}{2})}(x,y)=0=T_{1,(\pm\frac{\pi}{2},0)}$

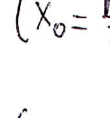
$$T_{2,(x_0,y_0)}(x,y)=\eta\mu x_0\,\sigma\upsilon\nu y_0+(x-x_0)\sigma\upsilon\nu x_0\,\sigma\upsilon\nu y_0-(y-y_0)\eta\mu x_0\,\eta\mu y_0 \; +$$
$$+\frac{1}{2}\left[-(x-x_0)^2\eta\mu x_0\,\sigma\upsilon\nu y_0-2(x-x_0)(y-y_0)\sigma\upsilon\nu x_0\,\eta\mu y_0-(y-y_0)^2\eta\mu x_0\,\sigma\upsilon\nu y_0\right]$$

π.χ. Για $(x_0=0,\ y_0=\frac{\pi}{2})$, $T_{2(0,\frac{\pi}{2})}(x,y)=-x(y-\frac{\pi}{2})$ (Υπερβολικό Παρ… Σέλλα στο $(0,\frac{\pi}{2})$)

Για $(x_0=\frac{\pi}{2},\ y_0=0)$, $T_{2,(\frac{\pi}{2},0)}(x,y)=-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2-\frac{1}{2}y^2$ (* Κυκλικό Παρ… με μέγιστο στο…

Για $(x_0=-\frac{\pi}{2},\ y_0=0)$, $T_{2(-\frac{\pi}{2},0)}(x,y)=\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{2})^2+\frac{1}{2}y^2$ (** Κυκλικό Π… με ελάχιστο…

**


*

/ $T_{3,(x_0,y_0)}$ $T_{4,(x_0,y_0)}$ Αντικατάσταση στους τύπους σελ T20 /